MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE SECONDA

TOMO XXIII

TORINO

DALLA STAMPERIA REALE

MEMORIE

DELLA REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

S-1109.B 58

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE SECONDA

Tomo XVIII.

TORINO
DALLA STAMPERIA REALE
MDCCCLIX.


NATURAL HISTORY.

INDICE

Elenco degli Accademici Residenti, Nazionali non Residenti e Stranieri . . . . . pag. IX

Mutazioni accadute nel Corpo Accademico dopo la pubblicazione del precedente Volume . . . . . » XVIII

Doni fatti all'Accademia dal 1.° gennaio 1858 al 1.° aprile 1859 » XIX

CLASSE DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Notizia storica dei lavori fatti dalla Classe di Scienze Fisiche e Matematiche nell'anno 1858; scritta dal Professore Eugenio Sismonda, Segretario perpetuo di essa Classe . . . . » LI

— Nauman — Lettera sulla nutrizione dei tessuti dell'organismo animale . . . . . » ivi

— De Filippi e Sismonda (Eugenio) — Parere su una Memoria manoscritta dei sig.ri Prof. Emilio Cornalia e Dott. Paolo Panceri, col titolo: *Osservazioni zoologico-anatomiche sopra un nuovo genere di Crostacei isopodi* ecc. . . . . » LII

— Plana — Comunicazione intorno a macchie del Sole . . » LIII

— Id. — Comunicazione sull'eclisse parziale della Luna nel giorno 27 febbraio 1858 . . . . . » LIV

— Id. — Indicazione delle principali circostanze dell'eclisse di Sole del dì 15 marzo 1858 . . . . . » LV

— Sella, Sismonda (Angelo) e Piria — Parere intorno ad una Memoria manoscritta dell'Ingegnere sig. Montefiore-Levi *Sopra una nuova lega cristallizzata di Nichelio e Ferro* . . . . . » LVIII

— Cavalli — Esposizione verbale di alcuni suoi pensieri intorno ai principii che debbono regolare il *passo nei cannoni ad elica* » LX

— Plana — *Note sur la théorie de la lumière polarisée* . . . . » LXII

— Berruti e Botto — Parere intorno ad un apparecchio ideato dal Cav. Faa di Bruno per *insegnare od agevolare ai ciechi la scrittura* . . . . . pag. LXIV

— Caligny — Brani di lettere relative ai meccanismi adoperati nella perforazione delle Alpi . . . . . » LXV

— Calloud — Lettera sulla *fosforescenza del Valerianato di Chinina* » LXXI

— De Filippi e Sismonda (Eugenio) — Parere su una Memoria manoscritta del Prof. sig. Luigi Bellardi, intitolata: *Saggio di Ditterologia messicana* . . . . . » LXXII

— Sismonda (Eugenio) — Osservazioni meteorologiche fatte alla Specola dell'Accademia nell'anno 1858 . . . . . » LXXIII

Mémoire sur l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune; par Jean Plana . . . . . pag. 1

Notes du même Auteur.

— Note *sur l'expression indéfinie* de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune . . . . . » 47

— Errata du Tome premier de la Théorie du mouvement de la Lune . » 58

— Id. du Tome second . . . . . » 59

Recherches historiques sur la première explication de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune, d'après le principe de la gravitation universelle; par Jean Plana . . . . » 61

Notes diverses.

— Errata pour le second Volume de la Mécanique analytique de Lagrange (Édition de 1815) . . . . . » 77

— Note sur le N.° 44 (page 55) du second Volume de la Mécanique analytique de Lagrange . . . . . » 88

— Note sur le N.° 46 du second Volume de la Mécanique analytique de Lagrange, relatif à la détermination de l'orbite parabolique des Comètes . . » 91

— 2.ème Note sur le N.° 46. Formation de l'équation finale en ayant égard à la *quatrième* puissance du temps dans l'expression des trois fonctions V, V', V'' . . . . . » 105

— Note sur l'expression analytique des rapports $\frac{R''}{R}$, $\frac{R''}{R'}$, $\frac{R'}{R}$ entre deux des trois distances R, R', R'' de la Comète à la Terre . . . . . » 109

— 2.de Note sur le N.° 44 du second Volume de la Mécanique analytique de Lagrange . . . . . » 117

— Note sur l'évaluation numérique des quantités $\frac{Q}{G}$, $\frac{Q_1}{G}$, $\frac{Q_2}{G}$, $\frac{Q_1}{Q}$, $\frac{Q_2}{Q}$, nécessaires à la détermination de l'orbite des Comètes par les formules de Lagrange, adaptées au cas où l'on prend l'Écliptique pour le plan fixe de projection . . . . . pag. 127

— Note sur l'application des formules de Lagrange à la Comète de l'année 1769, faite par Pingré à la page 306 du second Volume de sa *Cométographie* » 134

Cryptogamae vasculares ligusticae, seu Equisetacearum, Marsileacearum (Isoetearum), Lycopodiacearum ac Filicum in agro ligustico hucusque detectarum Synopsis; huc accedunt notae quaedam botanico-geographicae, stirpiumque italicarum, praeter ligusticas, enumeratio: auctore Patritio Gennari M. D. . » 139

Sopra alcuni Pesci nuovi o poco noti del Mediterraneo; Nota di F. De Filippi e G. B. Verany . . . . . » 187

Troisième Mémoire pour servir à l'histoire génétique des Trématodes; par le Docteur Ph. De Filippi . . . . . » 201

Note.

— Note sur la formation des perles . . . . . » 223

Essai d'une distribution orographico-géographique des Mollusques terrestres dans la Lombardie; par Pélégrin Strobel . . » 233

Memoria sulle pressioni sopportate dai punti d'appoggio di un sistema equilibrato ed in istato prossimo al moto; dell'Ingegnere idraulico Alessandro Dorna, Professore di matematica di prima classe, incaricato dell'insegnamento della meccanica nella R. Accademia militare di Torino . . . . . » 281

Mémoire sur un rapprochement nouveau entre la Théorie moderne de la propagation *linéaire du Son*, dans un tuyau cylindrique horizontal d'une longueur indéfinie, et la Théorie des *pulsions*, exposée par Newton dans les deux Propositions xlvii et xlix du second Livre des *Principes;* par Jean Plana . . . » 319

Notes diverses.

— Note sur le mouvement des Ondes excitées dans un canal rectangulaire indéfini; la profondeur et la largeur du fluide étant fort petite et constante dans toute la longueur du canal . . . . . » 353

Démonstration de l'équation $\left(\frac{7}{2}K^2 - 9\right)\text{tang.}K + 9K = 0$, qui doit remplacer celle donnée par Poisson à la page 122 de son Mémoire *Sur la Théorie des Ondes* . . . . . pag. 363

Note sur la réduction de l'intégrale quadruple

$$z = -\frac{hll'}{g\pi^2}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\int_0^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}(1-s^2)\,s\,ds\,s\,d\psi\,d\omega\,.\,R\,du\ ;$$

$$R = \cos.(u\rho\cos\omega)\cos.(t.\sqrt{gu})\ ;$$

obtenue par Poisson à la page 156 de son Mémoire *Sur la Théorie des Ondes*, à une autre équation entre des intégrales définies simples . . . » 375

— Propagation des Ondes par mouvement apparent accéléré . . . » 397

Mémoire sur le mouvement conique, *à double courbure*, d'un pendule simple, dans le vide, abstraction faite de la rotation diurne de la Terre; par Jean Plana . . . . . » 401

Muscı Napoani, sive Muscorum ad flumen Napo in Columbia a clarissimo Osculati lectorum recensio; curante Josepho De Notaris . . . . . » 437

Appunti per un nuovo censimento delle Epatiche italiane; per cura di G. De Notaris . . . . . » 457

Note sur les pages 68, 69 et 75 du second Volume des *Opuscula analytica* d'Euler publié en 1785; par Jean Plana . . » 499

Mémoire sur les formules propres à déterminer la parallaxe annuelle des étoiles simples, ou *optiquement doubles;* par Jean Plana . . . . . » 503

Prodrome d'une Flore tertiaire du Piémont; par Eugène Sismonda » 519

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI, E STRANIERI

AL I.° DI GENNAIO MDCCCLIX.

ACCADEMICI NAZIONALI.

Presidente

Plana, Barone Giovanni, Senatore del Regno, Regio Astronomo, Professore d'Analisi nella Regia Università, Direttore Generale degli studi nella Regia Accademia Militare, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze), G. Cord. ✻, Cav. e Cons. ✠, Uffiz. della L. d'O. di F., C. della C. F. d'A. di 2.ª classe.

Vice-Presidente

Ferrero della Marmora, Conte Alberto, Luogotenente-Generale, Senatore del Regno, Membro del Consiglio delle Miniere, della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria e della Commissione superiore di Statistica, G. Cord. ✻, Gr. Uffiz. ✪, Cav. e Cons. onor. ✠, Cav. della L. d'O. di F.

Tesoriere

Peyron, Abate Amedeo, Teologo Collegiato, Professore emerito di Lingue Orientali, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Socio Straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Accademico corrispondente della Crusca, Comm. ✻, Cav. e Cons. ✠, Cav. della L. d'O. di F.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

Direttore

Moris, Dottore Giuseppe Giacinto, Senatore del Regno, Professore di Botanica nella Regia Università, Vice-Presidente del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, Direttore del Regio Orto Botanico, Membro delle Reali Accademie di Agricoltura e Medico-Chirurgica di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Comm. ✻, Cav. e Cons. ✠.

Segretario Perpetuo.

Sismonda, Eugenio, Dottore in Medicina, Professore Sostituito di Mineralogia nella R. Università, Professore di Storia Naturale nel Collegio nazionale di Torino, Preside del Collegio di Scienze fisiche, Membro delle Reali Accademie Medico-Chirurgica e d'Agricoltura di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, ✻, ✠.

ACCADEMICI RESIDENTI

Plana, Giovanni, *predetto.*

Moris, Giuseppe Giacinto, *predetto.*

Cantù, Gian Lorenzo, Senatore del Regno, Dottore Collegiato in Medicina, Professore emerito di Chimica generale nella Regia Università, Vice-Presidente del Consiglio delle Miniere, Ispettore presso il Consiglio superiore militare di Sanità, Membro delle Reali Accademie di Agricoltura e Medico Chirurgica di Torino, Comm. ✻.

Ferrero della Marmora, Conte Alberto, *predetto.*

Botto, Giuseppe Domenico, Professore emerito di Fisica nella Regia Università, Membro della Reale Accademia d'Agricoltura di Torino, Consigliere ordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, Uffiz ✻.

Sismonda, Angelo, Professore di Mineralogia e Direttore del Museo Mineralogico della Regia Università, Membro del Consiglio delle Miniere, della Reale Accademia d'Agricoltura di Torino, della Società Geologica di

Londra, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Uffiz. ✻, ✠.

Menabrea, Nobile Luigi Federigo, Maggiore Generale nel Corpo Reale del Genio Militare, Professore di Costruzione nella R. Università, Deputato al Parlamento nazionale, Membro straordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, Uffiz. ✻, ✠, Uffiz. ✪, Comm. di S. G. di T., di Carlo III di Sp., del M. Civ. di Sass., di C. di Port., Uffiz. della L. d'O. di F.

Riberi, Alessandro, Senatore del Regno, Chirurgo Primario di S. M. il Re e della Reale Famiglia, Medico-Chirurgo in 1.° delle LL. AA. RR. il Duca e la Duchessa di Genova, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Medicina operativa nella Regia Università, Presidente del Consiglio superiore militare di Sanità, Consigliere ordinario del Consiglio superiore dell'Istruzione pubblica, Membro straordinario del Consiglio superiore di Sanità, Chirurgo dello Spedale Maggiore di S. Giovanni Battista, Membro dell'Amministrazione dell'Opera della Maternità, e della R. Accademia Medico-Chirurgica di Torino, Comm. ✻, della L. d'O. di Fr. e dell'O. di C. di Port., Cav. e Cons. ✠.

Mosca, Carlo Bernardo, Senatore del Regno, Primo Architetto di S. M., Primo Ingegnere Architetto dell'Ordine de'Ss. Maurizio e Lazzaro, Ispettore di Prima Classe nel Corpo Reale del Genio Civile, Membro del Consiglio degli Edili, delle Reali Accademie delle Belle Arti e di Agricoltura di Torino, dell'Accademia Pontificia delle Belle Arti denominata di San Luca a Roma e dell'I. e R. Accademia delle Belle Arti di Milano. Comm. ✻, Cav. e Cons. ✠, Uffiz. della L. d'O. di F.

Sismonda, Dottore Eugenio, *predetto.*

Sobrero, Ascanio, Dottore in Medicina ed in Chirurgia, Professore di Chimica applicata alle Arti, Membro del Collegio di Scienze fisiche e matematiche e della Reale Accademia d'Agricoltura di Torino, Uffiz. ✻.

Cavalli, Giovanni, Colonnello d'Artiglieria, Deputato al Parlamento nazionale, Membro del Consiglio delle Miniere e dell'Accademia delle Scienze militari di Stockolma, Uffiz. ✻, ✠, Uffiz. ✪, dell'O. Militare Portogh. di Torre e Spada, e dell'O. di Leop. del B., Cav. di S. Wl. di R. di 4.ª cl., della Sp. di Sv., dell'A. R. di Pr. di 3.ª cl.

Berruti, Secondo Giovanni, Professore di Fisiologia sperimentale nella R. Università, Membro della Giunta provinciale di Statistica e della R. Accademia Medico-Chirurgica di Torino, Membro onorario della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, ✻.

Richelmy, Prospero, Professore d'Idraulica, e Direttore dello Stabilimento Idraulico della Regia Università, ✻.

Di Filippi, Dottore Filippo, Professore di Zoologia e Direttore del Museo Zoologico della Regia Università, Consigliere ordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, Membro delle Reali Accademie Medico-Chirurgica e d'Agricoltura di Torino, ✻.

Sella, Quintino, Ingegnere delle Miniere, Professore di Geometria e Direttore del Gabinetto mineralogico del Regio Istituto Tecnico di Torino, Membro dell'Imp. Società Mineralogica di Pietroborgo, Ufliz. ✻.

Delponte, Giambatista, Dottore di Medicina e di Chirurgia, Professore Sostituito di Botanica nella Regia Università, Membro delle Reali Accademie Medico-Chirurgica e d'Agricoltura di Torino, ✻.

Piria, Raffaele, Professore di Chimica generale nella Regia Università di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, ✻.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Borgnis, Giuseppe Antonio, Ingegnere Civile, Professore di Matematica applicata nell'I. R. Università di Pavia, ✻.

Bertoloni, Antonio, Dottore in Medicina, Professore emerito di Botanica nella Pontificia Università di Bologna, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, ✠.

Marianini, Stefano, Professore di Fisica sperimentale nell'Università di Modena, Presidente della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia, ✠.

De Notaris, Giuseppe, Dottore in Medicina, Professore di Botanica nella Regia Università di Genova, ✠.

Pareto, Marchese Lorenzo Damaso, Deputato al Parlamento nazionale, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, a Genova.

Billiet, Monsignor Alessio, Senatore del Regno, Presidente Perpetuo onorario dell'Accademia Reale di Savoia, Arcivescovo di Sciamberì, Gr. Cord. ✻.

Mossotti, Ottaviano Fabrizio, Professore di Fisica e di Meccanica Celeste nell'I. R. Università di Pisa, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, ✻, e C. di S. G. di T.

Belli, Giuseppe, Professore di Fisica nell'I. R. Università di Pavia, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, ✻.

Cerise, Lorenzo, Dottore in Medicina, ✠, Cav. della L. d'O. di F., a Parigi.

ACCADEMICI STRANIERI.

Élie di Beaumont, Giambatista Armando Lodovico Leonzio, Senatore, Ispettore generale delle Miniere, Membro del Consiglio Imperiale dell'Istruzione pubblica, Professore di Storia naturale dei corpi inorganici nel Collegio di Francia, Segretario Perpetuo dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto, Comm. ✻, e della L. d'O. di F., a Parigi.

Herschel, Giovanni Federico Guglielmo, Membro della Società Reale di Londra, Socio Straniero dell'Istituto di Francia.

Poncelet, Giovanni Vittorio, Generale del Genio, Membro dell'Istituto di Francia, Gr. Uffiz. della L. d'O. di F., a Parigi.

Tiedemann, Federigo, Professore d'Anatomia e di Fisiologia comparativa nell'Università di Heidelberg, Socio Straniero dell'Istituto di Francia, C. della L. d'O. di F., a Heidelberg.

Faraday, Michele, Membro della Società Reale di Londra, Socio Straniero dell'Istituto di Francia, Comm. della L. d'O. di F., a Londra.

Liebig, Barone Giusto, Professore di Chimica nella R. Università di Monaco (*Baviera*), Socio corrispondente dell'Istituto di Francia, ✻, Uffiz. della L. d'O. di F., a Monaco.

Poinsot, Luigi, Senatore, Membro dell'Istituto di Francia, G. Uffiz. della L. d'O. di F., a Parigi.

Panizza, Bartolomeo, Professore di Anatomia nell'I. R. Università di Pavia, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia, C. C. F. d'A.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore

Sauli d'Igliano, Conte Lodovico, Senatore del Regno, Consigliere di Legazione, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Accademico d'onore dell'Accademia Reale di Belle Arti, Vice-Presidente del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Comm. ✻, Cav. e Cons. ✠.

Segretario Perpetuo

Gorresio, Abate Gaspare, Dottore del Collegio di Belle Lettere e Filosofia, Prefetto della Biblioteca della Regia Università, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), ✻, ✠, Uffiz. della L. d'O. di F.

ACCADEMICI RESIDENTI

Peyron, Amedeo, *predetto.*

Manno, Barone Giuseppe, Senatore del Regno, Primo Presidente della Corte di Cassazione, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, e della Giunta d'Antichità e Belle Arti, Accademico corrispondente della Crusca, G. Cord. ✻, Cav. e Cons. onor. ✠.

Sauli d'Igliano, Conte Lodovico, *predetto.*

Sclopis di Salerano, Conte Federigo, Primo Presidente, Vice-Presidente del Senato del Regno, Presidente della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria e del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche), Gr. Cord. ✻, Cav. e Cons. ✠, C. di S. G. di T. e della L. d'O. di F.

Cibrario, Nobile Giovanni Antonio Luigi, Senatore del Regno, Primo Presidente di Corte d'Appello, Primo Segretario di S. M. pel Gran

Magistero dell'Ordine de'Ss. Maurizio e Lazzaro, Vice-Presidente della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro della Giunta di Antichità e Belle Arti, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Scienze morali e politiche), Gr. Cord. ✻, ✠, Gr. Uffiz. della L. d'O. di F., Gr Cr. degli Ord. di Leop. del B., della Concez. di Port., di Carlo III di Sp., del Leone dei P. B., Comm. dell'O. di Cr. di Port., Cav. di Croce in oro del Salv. di Gr., Cav. di S. Gius. di T., dell'Aq. rossa di 3.ª cl. di Pr., di S. Stan. di 2.ª cl. di R., di W. di Sv., freg. dell'O. Ott. del Mejid. di 1.ª cl., e della Gr. Med. d'oro di R. pel merito scientifico e letterario.

Ferrero della Marmora, Conte Alberto, *predetto*.

Baudi di Vesme, Conte Carlo, Senatore del Regno, Membro della Commissione provinciale di Statistica, Segretario della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, ✻, ✠.

Bertolotti, Davide, Consigliere di S. M., ✻, ✠, Cav. dell'O. del Salv. di Grec., e dell'O. di Leop. del Belg.

Promis, Domenico Casimiro, Bibliotecario di S. M., Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Uffiz. ✻.

Ricotti, Ercole, Maggiore nel R. Esercito, Professore di Storia moderna nella R. Università, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, ✻, ✠, ✪.

Bon-Compagni, Cavaliere e Presidente Carlo, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, e della Commissione superiore di Statistica, Inviato straordinario e Ministro plenipotenziario presso le Corti di Toscana, Parma e Modena, Gr. Uffiz. ✻.

Promis, Carlo, Professore di Architettura Civile nella Regia Università, Regio Archeologo, Ispettore dei Monumenti d'Antichità, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Accademico d'onore dell'Accademia Reale di Belle Arti, ✻.

Gorresio, Abate Gaspare, *predetto*.

Barucchi, Avvocato Francesco, Professore di Storia antica nella R. Università, Direttore del R. Museo d'Antichità ed Egizio, Consigliere onorario della pubblica Istruzione, Uffiz. ✻.

Bertini, Giovanni Maria, Professore di Storia della Filosofia antica nella Regia Università, Consigliere ordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, ✻.

Capellina, Domenico, Reggente la Cattedra di letteratura italiana

nella Regia Università, Membro straordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, ✻.

Albini, Pietro Luigi, Professore di Filosofia del Diritto nella Regia Università, Consigliere ordinario del Consiglio superiore di pubblica Istruzione, ✻.

Carutti di Cantogno, Domenico, Segretario Generale del Ministero degli Affari Esteri, Membro e Segretario del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Uffiz. ✻, ✠, Cav. dell'O. di Leop. del Belg.

Varese, Carlo, Dottore in Medicina, Deputato al Parlamento nazionale, ✠.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Coppi, Abate Antonio, Membro della Pontificia Accademia di Archeologia, ✻, a Roma.

Charvaz, Monsignor Andrea, Arcivescovo di Genova, Gr. Cord. ✻.

Calleri, Giuseppe Maria, Segretario Interprete dell'Imperatore de' Francesi per le lingue della Cina, ✠, Cav. della L. d'O. di F. e dell'O. di Leop. del Belg., Gr. Collare Tartaro dell'Impero Cinese, a Parigi.

Pillet-Will, Conte Federigo, Reggente della Banca di Francia, Comm. ✻, e della L. d'O. di F., a Parigi.

Martini, Pietro, Dottore in ambe Leggi, Socio del Collegio di Filosofia, e Presidente della Biblioteca della Regia Università di Cagliari, Membro della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, ✻, ✠.

Costa di Beauregard, Marchese Leone, Presidente dell'Accademia Reale di Savoia, Deputato al Parlamento Nazionale, Comm. ✻.

Spano, Giovanni, Dottore in Teologia, Canonico Protonotario Apostolico della Chiesa Metropolitana di Cagliari, Professore emerito di Sacra Scrittura e Lingue Orientali nella R. Università, Preside del Real Collegio-Convitto di Santa Teresa, Uffiz. ✻.

Tola, Pasquale, Consigliere nella Corte d'Appello di Genova, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Uffiz. ✻.

ACCADEMICI STRANIERI.

Baugière di Barante, Barone Amabile Guglielmo Prospero, Membro dell'Istituto di Francia, Gr. Cr. della L. d'O. di F., Gr. Cord. di S. Aless. Newschi di R., a Parigi.

Manzoni, Alessandro, Accademico della Crusca, a Milano.

Di Savigny, Federigo Carlo, Professore nella Regia Università e Membro della Reale Accademia delle Scienze di Berlino, Socio Straniero dell'Istituto Imperiale di Francia.

Borghesi, Bartolomeo, Patrizio della Repubblica di San Marino, Socio corrispondente dell'Istituto Imperiale di Francia, Comm. *

Thiers, Luigi Adolfo, Membro dell'Istituto Imperiale di Francia, Gr. Uffiz. della L. d'O., a Parigi.

Macaulay di Rothley, Tommaso Babington, Pari della Grande Bretagna, Professore nell'Università di Cambridge (Gran Bretagna), Socio Straniero dell'Istituto Imperiale di Francia.

Di Boeckh, Augusto, Professore nella Regia Università di Berlino, Membro e Segretario Perpetuo della Reale Accademia delle Scienze, Socio Straniero dell'Istituto Imperiale di Francia, Cav. della L. d'O. di F

Cousin, Vittorio, Professore onorario di Filosofia della Facoltà delle Lettere di Parigi, Membro dell'Istituto Imperiale di Francia, Comm. della L. d'O. di Fr.

MUTAZIONI

accadute nel Corpo Accademico dopo la pubblicazione del precedente Volume.

MORTI

10 di giugno 1858.

Brown, Roberto, Membro della Società Reale di Londra.

8 di marzo 1859.

Carena, Giacinto, Professore di Filosofia, Membro onorario della Reale Accademia di Agricoltura di Torino, Accademico corrispondente della Crusca, Uffiz. ✻, Cav. e Cons. ✠, Cav. di Cr. in oro dell' O. del Salv. di Grecia.

5 maggio 1859.

Gazzera, Abate Costanzo, Professore di Filosofia, Vice-Presidente della Regia Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Prefetto della Biblioteca della Regia Università di Torino, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere), Uffiz. ✻, ✠.

6 maggio 1859.

Di Humboldt, Barone Federigo Enrico Alessandro, Membro della Reale Accademia delle Scienze di Berlino, Socio Straniero dell'Istituto di Francia, Gr. Cord. ✻, Gr. Cr. della L. d'O. di F., a Berlino.

29 giugno 1859.

Giulio, Carlo Ignazio, Senatore del Regno, Consigliere di S. M., Consigliere di Stato, Membro della Reale Accademia d'Agricoltura e della Commissione superiore di Statistica, Professore emerito di Meccanica nella Regia Università, Professore di Meccanica applicata alle Arti e Direttore del R. Istituto Tecnico di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze residente in Modena, Comm. ✻, ✠, Cav. della L. d'O. di F.

ELEZIONE DI UFFIZIALI

Sismonda, Cav. e Prof. Eugenio, Segretario Aggiunto della Classe di Scienze fisiche e matematiche, eletto il 27 marzo 1859 Segretario Perpetuo di detta Classe in surrogazione del defunto Cav. Giacinto Carena.

Gorresio, Abate e Cav. Gaspare, Segretario Aggiunto della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche, eletto il 12 maggio 1859 Segretario Perpetuo di detta Classe in surrogazione del defunto Cavaliere Costanzo Gazzera.

DONI

FATTI

ALLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

DAL 1.° GENNAIO 1858 AL 1.° APRILE 1859

Flora Brasiliensis, sive enumeratio plantarum in Brasilia hactenus detectarum, quas, cura Musei Caes. Reg. Palat. Vindobonensis, suis aliorumque botanicorum studiis descriptas et methodo naturali digestas, sub auspiciis Ferdinandi I Austriae Imperatoris et Ludovici I Bavariae Regis, edidit Carolus Frid. Phil. De Martius. Fasc. XIII-XIV, XVIII-XXII. Lipsiae, 1857-1858; fol.° fig. — S. M. IL RE VITTORIO EMANUELE

Monumenti storico-diplomatici degli archivi Ferrero-Ponziglione e di altre nobili Case Subalpine dalla fine del secolo XII al principio del XIX; raccolti ed illustrati per Giovambatista Adriani. Torino, Ribotta, 1858; 1 vol. in-fol. con ritratto. — ADRIANI.

Intorno ad una disquisizione storica circa la prima applicazione del pendolo all'orologio; lettera di E. Albèri al Professore Vincenzo Flauti. Firenze, 1858; ½ fogl. 4.° — ALBERI.

Fr. Ambrosii Flora Tiroliae australis. Vol. II, fasc. 2.° Padova, Sicca, 1858; 8.° — AMBROSI.

Misura esatta del cerchio, ovvero la sua quadratura geometricamente dimostrata dal Rev. Domenico Angherà. Malta, Cumbio, 1857; 16.° — ANGHERA.

Nuovi studi sul problema aerostatico, Appendice sull'automa aerio pubblicato nel 1855 dal Professore Vittorio Angius. Torino, Cassone, 1857; 8.° — ANGIUS.

Archivio meteorologico centrale italiano nell'I. e R. Museo di fisica e storia naturale. Prima pubblicazione; Firenze, 1858; 1 vol., 4.° picc. — ANTINORI.

ARCHIAC (D') Note sur l'*Histoire des progrès de la Géologie* de M. d'Archiac (Extr. des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de l'Institut I. de France*, Tome XLVI, 1858); 4.°

Histoire des progrès de la Géologie, de 1834 à 1856, par A. d'Archiac; publiée par la Société Géologique de France, sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. Tome VII, Formation jurassique, 2.e partie. Paris, Martinet, 1857; 1 vol. 8.°

Études géologiques sur les départements de l'Aude et des Pyrénées-orientales (Résumé); par A. d'Archiac. Paris, 1857; 8.°

ARNAUDON Études sur quelques produits naturels applicables à la teinture et provenant de l'exposition universelle de 1855, par M. J. Arnaudon. Paris, 1858; 8.°

Recherches sur les bois d'amarante, par M. J. Arnaudon (Extr. des *Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences de l'Institut I. de France*, Tome XLVII, 1858): 4.°

Recherches sur un nouvel Acide extrait du bois de taigu du Paraguay, par M. Arnaudon (Extr. id., Tome XLVI, 1858); 4.°

AROUX Les mystères de la chevalerie et l'amour platonique au moyen-âge, par E. Aroux. Paris, Remquet et C.e, 1858; 1 vol. 8.°

La Comédie de Dante (Enfer, Purgatoire, Paradis), traduite en vers selon la lettre, et commentée selon l'esprit, suivie de la clef du langage symbolique des fidèles d'amour, par E. Aroux. Paris, Remquet et C.e, 1856; 2 vol. 8.°

Dante hérétique, révolutionnaire et socialiste, révélations d'un catholique sur le moyen-âge, par E. Aroux. Paris, Remquet et C.e, 1854; 1 vol. 8.°

AUBERT Beiträge zur lateinischen Grammatik, von L. C. M. Aubert. Christiania, 1856; 8.°

AXERIO Relazione dell'Ingegnere Giulio Axerio sulle miniere e stabilimenti della Società *L'Esploratrice*. Torino, Bona, 1859; 4.° fig.

AZEGLIO (D') (Roberto). Dei danni che le antiche e moderne conquiste recarono alle belle arti, di Roberto d'Azeglio (Estratto dalla *Rivista contemporanea*). Torino, Pelazza, 1857; 1 vol. 8.°

BAIRD Catalogue of North American Mammals, chiefly in the Museum of the Smithsonian Institution, by Spencer F. Baird. Washington, 1857; 4.°

BALDASSINI Prolusione alla prima adunanza dell'Accademia Agraria in Pesaro, letta la sera dei 30 gennaio 1859 da Francesco Baldassini, Segretario. Pesaro, Nobili, 1858; 8.° con ritratto.

BARLA Aperçu mycologique et Catalogue des Champignons observés dans les environs de Nice, par J. B. Barla. Nice, Canis frères, 1858: f.°

Discorso sul Bosforo di Suez al XXV Congresso scientifico di Francia, del Prof. Cav. G. Fr. Baruffi, e voto emesso in conseguenza dall'illustre adunanza tenuta in Auxerre il 2 settembre 1858 (Estr. dal *Bullettino dell'Istmo di Suez*, Anno III). Torino, Unione tip. Editrice, 1858; 8.° — BARUFFI

Il Cavaliere Giulio Cordero dei Conti di San Quintino; notizia biografica di G. Fr. Baruffi. Torino, 1858; 8.°

Pellegrinaggio storico e descrittivo di Terrasanta, del P. Alessandro Bassi. Torino, Artero, Cotta e Pelazza, 1856-1857; 2 vol., 8.° — BASSI.

Considérations générales sur la prothèse des membres, par le Comte de Beaufort. Paris, Remquet, 1858; 8.° — BEAUFORT (DE)

Théorie de la résistance et de la flexion plane des solides, dont les dimensions transversales sont petites relativement à leur longueur, par J. B. Belanger. Paris, 1858; 8.° — BELANGER.

Sposizione elementare della teorica dei determinati, compilata dal Prof. Giusto Bellavitis (Estr. dal Vol. VII delle *Memorie dell'I. R. Istituto Veneto di Scienze, Lett. ed Arti*). Venezia, 1857; 4.° — BELLAVITIS.

Osservazioni fisiche instituite in parecchi siti delle Provincie Venete, durante l'eclissi solare del 15 marzo 1858, del Dott. Antonio Berti. Venezia, 1858; 8.° fig. — BERTI

Sulle manifestazioni ozonometriche durante l'ultima epidemia catarrale; Nota del Dott. Antonio Berti. Venezia, 1858; 8.°

Delle pressioni barometriche in rapporto con le epidemie coleriche; lettera del Dott. Antonio Berti al Dott. Gaetano Strambio. Milano, 1857; 8.°

Istituzioni scientifiche e tecniche, ossia Corso teorico e pratico di agricoltura, di Carlo Berti-Pichat; Dispense 66-73. Torino, Unione tip. Editrice, 1857; 8.° fig. — BERTI-PICHAT

Intorno a due pubblicazioni del signor Enrico Narducci; rapporto di B. Boncompagni. Roma, 1858; 4.° — BONCOMPAGNI.

Sur quatre personnages appelés *Thrasylle*; Extrait d'une lettre adressée par M. Th. Henri Martin à M. B. Boncompagni. Rome, 1858; 8.°

Chapitres IX et XX du livre second de l'Introduction arithmétique de Nicomaque de Gérase, tradnits du grec en français par M. Th. Henri Martin, avec des remarques du traducteur sur ces chapitres. Rome, 1858; 8.°

Bulletin annuel, ou Compte rendu des travaux de la Société Centrale d'Agriculture de Chambéry depuis le 19 avril 1857 jusqu'au 30 novembre 1858, rédigé par J. Bonjean; 1.ère et 2.de années. Chambéry, Ménard et C.e, 1858; 1 vol. 8.° — BONJEAN.

BOTTA — An account of the system of education, and of the institutions of science and art, in the Kingdom of Sardinia, by Vincenzo Botta. Hartford, 1858; 8.°

BOUSSINGAULT — La fosse à fumier, par M. Boussingault. Paris, 1858; 8.° fig.

BRIGHENTI — Relazione intorno alla generale livellazione del fiume Reno, eseguita negli anni 1854, 1855, del Professor Maurizio Cav. Brighenti, con tipi ed allegati. Fasc. 1.°, Roma, 1857; fol. mass.

CALDO — La vera quadratura del circolo trovata sul circolo, eseguita in modo geometrico ed aritmetico e provata razionalmente e naturalmente, del Sacerdote Giuseppe Caldo. Cuneo, Riba, 1858; 8.°

CALIGNY (DE) — Société Philomatique de Paris; Extrait des Procès-verbaux des séances pendant l'année 1844. Paris, 1844; 8.°

Expériences sur une nouvelle espèce d'ondes liquides à double mouvement oscillatoire et orbitaire, par M. Anatole de Caligny (Extr. du Journal de *Mathématiques pures et appliquées*, Tome XIII, 1848); 4.°

Expériences sur les tourbillons, les ondes et les vibrations des veines et des nappes liquides, par M. Anatole de Caligny. Paris, Bachelier, 1850; 4.°

Expériences sur un nouveau phénomène du frottement de l'eau dans des tubes d'un petit diamètre mouillés de diverses manières, par M. Anatole de Caligny. Paris, Bachelier, 1850; 4.°

Mémoires militaires de Vauban et des Ingénieurs Hue de Caligny; 2.e partie. Paris, 1854; 1 vol. 8.°

CALINDRI — Bullettino dell'Istmo di Suez, con tavole illustrative, diretto dal Prof. Ugo Calindri; vol. III. Torino, Stamp. dell'Unione tip. Editrice torinese, 1858; 8.°

Idrografia e lavori idraulici, secondo Rapporto del sig. Barone Carlo Dupin sul Canale marittimo di Suez fra il mare Rosso ed il Mediterraneo; letto nell'Adunanza del 3 maggio 1858 dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto Imperiale di Francia. Torino, Stamp. dell'Unione tipogr. Editrice, 1858; 8.°

CALVERT — On the relative power of metals and alloys to conduct heat; Part I, by F. Crace Calvert and Richard Johnson. London, 1858; 4.° fig.

CARRINGTON — A catalogue of 3735 circumpolar stars observed at Redhill in the years 1854-1856 and reduced to mean position for 1855·0, by Richard Christopher Carrington. London, 1857; 1 vol. fol.

CARUTTI — Storia del Regno di Carlo Emanuele III, scritta da Domenico Carutti: vol. I. Torino, Eredi Botta, 1859; 1 vol. 8.°

Que peut faire le Congrès pour l'indépendance de l'Italie? Tout. Que faut-il en espérer? Peu; par G. Casati. Turin, Marzorati, 1859; 8.° — Casati

Annuaire de l'Institut des Provinces et des Congrès scientifiques; Tome X. Caen, Hardel, 1858; 12.° — Caumont (de).

Congrès archéologique de France. Séances générales tenues à Mende, à Valence et à Grenoble en 1857 par la Société française d'Archéologie pour la conservation des monuments historiques. Caen, Hardel, 1858; 1 vol. 8.°

Lettre au Directeur de la *Revue Britannique* au sujet des recherches du Docteur Young sur les hiéroglyphes égyptiens, par M. J.-J. Champollion-Figeac. Paris, 1857; 8.° — Champollion-Figeac.

Utilité et réhabilitation du Moineau, par Victor Chatel. Angers, 1858; 8.° pièc. — Chatel.

Maladie de la vigne, par Victor Chatel. Angers, 1858; 4 pag. 8.°

Du rôle des animalcules dans les altérations des fruits, des tubercules de la pomme de terre, des truffes, des feuilles des végétaux, etc., par Victor Chatel. Paris, 1859; ½ fogl. 8.°

Histoire de la lutte des Papes et des Empereurs de la maison de Souabe, de ses causes et de ses effets, par C. De Cherrier; 2.e édition. Paris, Claye, 1858; 3 vol. 8.° — Cherrier (de)

Ricerche intorno ad alcuni punti di elettro-fisiologia, Memoria di Antonio Cima, premiata dall'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna (Estr. dal Tomo IX delle *Memorie dell'Accademia delle Scienze*). Bologna, 1858; 4.° fig. — Cima

Iscrizioni Etrusche e Etrusco-Latine in monumenti che si conservano nell'I. e R. Galleria degli Uffizi di Firenze, edite a *fac-simile* con tavole litografiche, aggiunte due tavole in rame con rappresentanze figurate, per cura del Conte Giancarlo Conestabile. Firenze, Cellini e C.a, 1858; 1 vol. di testo ed 1 di tavole, 4.° — Conestabile.

Annali d'Italia dal 1750, compilati da A. Coppi; Tomo IX dal 1846 al 1847. Firenze, Cellini e C.a, 1859; 1 vol. 8.° — Coppi.

Paolo V e la Repubblica Veneta; Giornale dal 22 ottobre 1605 – 9 giugno 1607, corredato di note e documenti ecc.; per Enrico Cornet. Vienna Ueberreuter, 1859; 1 vol. 8.° — Cornet.

Histoire et Annales de la ville d'Yverdon depuis les temps les plus reculés jusqu'à l'année 1845, par A. Crottet. Genève, Fick, 1859; 1 vol. 8.° — Crottet.

CURIONI — Appendice alla Memoria sulla successione normale dei diversi membri del terreno triasico nella Lombardia, di Giulio Curioni (Estr. dalle *Memorie dell'I. R. Istituto di Scienze, Lettere ed Arti;* vol. VII). Milano, 1858; 4.° fig.

DAGNINI — Insegnamento della Lingua Italiana in 30 lezioni (scritte solamente in italiano), ossia studi su le forme grammaticali colle quali gl'Italiani esprimono o deggiono esprimere le loro idee, per Ambrogio Dagnini; parte II. Liegi, Carmanne, 1857; 1 vol. 8.°

DAVIS — Theory of the motion of the heavenly bodies moving about the sun in conic sections: a translation of Gauss's « Theoria motus », with an appendix, by Charles Henry Davis. Boston, 1857; 1 vol. 4.°

DESIGALLA — Ἰωτὴρ Δεσιγάλλα Διατριβὴ περὶ Ἐλεφαντιάσεως. Ἐν Ἑρμουπόλει Σύρου, 1858; 8.°

DEMIDOFF (de). — Concours de l'Académie Impériale Léopoldo-Caroline des Naturalistes de Breslau, proposé par le Prince Anatole de Demidoff à l'occasion de l'anniversaire du jour de naissance de S. M. l'Impératrice Mère Alexandra de Russie le 13 juillet 1858. Florence, Le Monnier, 1857; 4.°

DESTREMX — Essai d'économie rurale et d'agriculture pratique, par Léonce Destremx de Saint-Cristol. Nimes, 1858; 1 vol. 8.°

DORNA — Note sur la distribution des pressions dans les systèmes élastiques, par Alexandre Dorna. Turin, 1858; 4.°

DRIAN — Note sur l'état actuel des études séricicoles, par M. Aimé Drian (Extr. des *Annales de la Société Imp. d'Agric., d'Hist. nat. et des Arts utiles de Lyon*, 1857); 8.°

DUPRAT Benjamin — Catalogue des livres composant la Bibliothèque de feu M. J. Fr. Boissonade. Paris, Remquet et C.ᵉ, 1859; 1 vol. 8.°

Catalogue des livres composant la Bibliothèque scientifique de feu M. Alexandre Brongniart. Paris, Remquet, 1858; 1 vol. 8.°

FAVRE — Observations relatives aux lettres sur la constitution géologique de quelques parties de la Savoie, adressées par le Prof. Ange Sismonda à M. Élie de Beaumont, avec notes de ce savant géologue, par M. Alph. Favre. Genève, 1858; 8.

Notice sur la géologie des bases de la montagne du Môle en Savoie, par Alph. Favre. Genève, 1857; 8.° fig.

Memoire sur les terrains liasique et keupérien de la Savoie, par Alph. Favre. Genève, Fick, 1859; 4.° fig.

FEE — Note extraite de l'histoire du Jardin botanique de Strasbourg, offerte en 1858 aux Membres de la session extraordinaire de la Société botanique de France. Strasbourg, Simon; 8.°

Giornale bibliografico delle Due Sicilie, dall'introduzione della stampa fin'oggi; N.° 15, anno II, 1858. Napoli, Nobili, 1858; 1 foglio. FENICIA

Sulle metamorfosi di Taranto e sulle cause delle sue singolari produzioni di terra e di mare; congetturazioni del Cav. Salvatore Fenicia. Napoli, Perrotti, 1858; 1 vol. 8.°

Monografia di Ruvo di Magna Grecia, del Cav. Salvatore Fenicia. Napoli, Piscopo, 1857; 1 vol. 8.°

Della vita e delle opere di Luigi Sacco, del Dottore Francesco Ferrario. Milano, 1858; 8.° FERRARIO.

Calcoli ed osservazioni in base alle quali fu trovata la direzione e locomozione degli Urani (Aerostati-Locomotori) da Costantino Fontana. Milano, Salvi e C.ª, 1857; 8.° fig. FONTANA

Note sur certaines tempêtes hibernales de l'Algérie, par M. J. Fournet. Lyon, 1857; 8.° FOURNET

Résumé des observations recueillies en 1857 dans le bassin de la Saône par les soins de la Commission hydrométrique de Lyon. Lyon, Barret; in fol. ed in 8.°

Lettre de M. Cappès à M. Fournet, au sujet de l'ozone atmosphérique et de ses relations avec les fièvres de l'Algérie. Lyon, 1857; 8.°

Bulletin de l'Institut national Genevois; N.° 17. Genève, 1858; 8.° GAULLIEUR

La diplomatie Sarde pendant la République et sous l'Empire, par Eusèbe Henri Gaullieur (Extr. de la *Biblioth. Univ. de Genève*, Tome IV, 1859); 8.°

Ricerche sui pesci fossili della Sicilia, per Gaetano Giorgio Gemmellaro; parte 1.ª Catania, Galatola, 1858; 4.° fig. GEMMELLARO

Leonardo Pisano, matematico del secolo XIII, articolo del sig. Angelo Genocchi. Roma, 1857; 8.° GENOCCHI.

Riduzione d'un integrale multiplo, nota del sig. Angelo Genocchi. Roma, 1857; 8.°

Intorno ad una somma di derivate successive, nota del signor Angelo Genocchi. Roma, 1857; 8.°

Sopra una formola di Lagrange spettante al moto dei liquidi nei vasi; Memoria del Prof. Angelo Genocchi. Roma, 1858; 8.°

Sopra una costruzione del teorema di Abel, nota del Professore Angelo Genocchi (Estratta dagli *Annali di matematica pura ed applicata pubblicati in Roma;* gennaio e febbraio 1858); 4.°

GLAY (LE). Spicilège d'histoire littéraire ou documents pour servir à l'histoire des Sciences, des Lettres et des Arts dans le nord de la France, par M. Le Glay; Fasc. I.er Lille, Danel, 1858; 8.°

GOULD. The terrestrial air-breathing mollusks of the United States, and the adjacent territories of North America, described and illustrated by Amos Binney; edited by Augustus A. Gould, vol. I-III. Cambridge, Boltes and Houghton, 1851, and 1857; 3 vol. 8.° fig.

GRIMELLI Solfo e carbone quali disinfettanti diretti e regolati per l'allevamento migliore dei bachi da seta, ecc., metodo del Prof. G. Grimelli. Modena, 1858; 8.°

HAULLEVILLE Histoire des Communes Lombardes depuis leur origine jusqu'à la fin du XIII.e siècle, par M. Prosper de Haulleville; Tome II. Paris, Didier, 1858; 1 vol. 8.°

HENRY Meteorology in its connection with agriculture, by Prof. Joseph Henry. Washington, 1858; 8.°

HENZEN Diploma militare d'Adriano, di G. Henzen. 8.°

HISLEY Cartulaire de la Chartreuse d'Oujon, précédé d'un avant-propos et suivi de tables et de répertoires, par J.-J. Hisley. Lausanne, 1852; 1 vol. 8.°

HÖRBYE Observations sur les phénomènes d'Érosion en Norvége, recueillies par J. C. Hörbye. Christiania, 1857; 4.° fig.

ISNARDI Problemi graduati di aritmetica applicati all'industria, al commercio, all'economia domestica ecc., ad uso delle scuole elementari, speciali e magistrali, del Prof. L. Isnardi e N. Belmonte. Torino, De-Agostini, 1858; 8.°

JOMARD De la Collection géographique créée à la Bibliothèque Royale; examen de ce qu'on a fait et de ce qui reste à faire pour compléter cette création et la rendre digne de la France. Paris, Duverger, 1848; 8.°

Remarques sur l'Oasis de Syouah ou de Jupiter Ammon, par M. Jomard, suivies d'une Relation de M. James Hamilton. Paris, Martinet, 1858; 8.°

JOURDAIN. La philosophie de Saint-Thomas d'Aquin, par Charles Jourdain; Ouvrage couronné par l'Institut Impérial de France *(Académie des Sciences morales et politiques)*. Tomes I-II. Paris, Hachette et C.e, 1858; 2 vol. 8.°

Un ouvrage inédit de Gilles de Rome, précepteur de Philippe-le-Bel en faveur de la papauté, par Charles Jourdain. Paris, 1858; 8.°

Sextus Empiricus et la philosophie scholastique, par Charles Jourdain. Paris, 1858; 8.°

Amadis; Erstes Buch. Nach der ältesten deutschen Bearbeitung, herausgegeben von Adelbert von Keller. Stuttgart, 1857; 1 vol. 8.° — KELLER.

Altdeutsche Gedichte, herausgegeben von Adelbert von Keller; zweiter Theil. Tübingen, 1855; 8.°

Denkrede auf Johann Nepomuk von Fuchs von Franz von Kobell. München, 1856; 4.° — KOBELL.

Einige Bemerkungen zur Geschichte der physiologischen Untersuchungen über das Urari, von A. Kölliker; 8.° — KÖLLIKER.

Handbuch der Gewebelehre des Menschen, für aerzte und studirende, von A. Kölliker. Leipzig, 1859; 1 vol. 8.° fig.

Ueber verschiedene Typen in der mikroskopischen Structur des Skelettes der Knochenfische, von A. Kölliker. Würzburg, 1859; 8.°

La Bourgogne. Revue oenologique et viticole, par C. Ladrey. 1.ère Livraison, 15 janvier 1859. Dijon, Rabutôt; 8.° — LADREY

Influence de l'esprit aléatoire sur l'économie politique et sociale. Trente-et-quarante dévoilé, par J. Jouet de Lanciduais. Paris, Gaittet, 1859; 1 vol. 8.° — LANCIDUAIS (JOUET DE)

Numismatique de l'Arménie, par Victor Langlois. Paris, Pommeret et Moreau, 1859; 4.° fig. — LANGLOIS.

Études physiologiques sur les animalcules des infusions végétales, comparés aux organes élémentaires des végétaux, par Paul Laurent. Tome 1.er – Des infusoires –. Nancy, Dard, 1854; 1 vol. 4.° fig. — LAURENT.

Documents pour servir à l'histoire de l'expédition aux sources du Nil confiée au commandement de M. le Comte d'Escayrac de Lauture (Extr. des *Nouvelles Annales des Voyages*, févr. 1857); 8.° — LAUTURE (DE).

Lettre adressée par M. le Comte d'Escayrac de Lauture au rédacteur de *La Presse*, en réponse à un article de ce Journal, inséré dans les N.os des 18 et 19 juin dernier (Extr. des *Nouvelles Annales des Voyages*, août 1857); 8.°

Observations générales sur le Mémoire sur le Soudan de M. le Comte d'Escayrac de Lauture, par M. Ch. Cuny (Extr. des *Nouvelles Annales des Voyages*, mars 1858); 8.°

De la Turquie et des États musulmans en général, par M. le Comte d'Escayrac de Lauture. Paris, Thunot et C.e, 1858; 1 vol. 8.°

Observations on the Genus Unio, together with descriptions of new species in the family Unionidae, by Isaac Lea. Philadelphia, 1857; 4.° fig. — LEA

Souvenirs de M. Thénard, par L. R. Le Canu. Paris, 1857; 8.° — LE CANU

LEE — Engravings of the ganglia and nerves of the uterus and heart, for the use of students in Anatomy and Physiology, by Robert Lee. London, Churchill, 1858; 4.°

LEIDY — Notice of remains of extinct vertebrata from the Valley of the Niobrara river, by Joseph Leidy. Philadelphia, 1858; 8.°

LEÔNIJ — Vita di Bartolommeo di Alviano, per Lorenzo Leônij. Todi, 1858; 1 vol. 8.°

LINATI — Intorno gli effetti della corrente elettrica continua sulle funzioni del gran-simpatico, nuove esperienze del Conte Cav. Fra Filippo Linati e del Dott. Primo Caggiati (Estr. dal *Tempo*, *Giornale di Med., Chirurg. e Sc. affini*, fasc. VIII, IX e X. 1858); 8.°

LÖHER — Die deutsche Politik König Heinrich I, von Franz Löher. München, 1857, 4.°

LONGHENA — Sulla storia del pontificato di Clemente XIV, del Padre Agostino Theiner, osservazioni del Prof. Francesco Longhena. Milano, 1854; 1 vol. 8.°

LONGPERIER (DE). — Dissertation sur quelques monnaies épiscopales de Strasbourg et de Constance, par Adrien de Longpérier. Paris, 1857; 8.° fig.

MAHMOUD-EFFENDI — Observations et recherches sur l'intensité magnétique et sur ses variations pendant une période de 25 ans, de 1829 à 1854, par M. Mahmoud (Extr. des *Bulletins de l'Acad. R. de Belgique*, Tom. XXI). Bruxelles, Hayez, 1854; 8.°

Mémoire sur l'état actuel des lignes isocliniques et isodynamiques dans la Grande-Bretagne, la Hollande, la Belgique et la France, par Mahmoud-Effendi (Extr. des *Mémoires couronnés et Mémoires des Savants étrangers de l'Acad. R. de Belgique*, Tom. XXIX, 1856). Bruxelles, Hayez; 4.°

Etat actuel des éléments du magnétisme terrestre à Paris et dans ses environs, par Mahmoud-Effendi (Extr. des *Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Tom. XLII, séance du 12 mai 1856); 4.°

MALACARNE — Maniera geometrica e rigorosa di ottener l'area di un triangolo equilatero equivalente ad un cerchio, ed i rapporti che i lati dei poligoni regolari, concentrici, isoperimetri, uno con un lato più dell'altro, hanno fra essi; opuscolo di Giambatista Malacarne. Vicenza, 1858; 8.°

MANUEL DI S. GIOVANNI — Delle antiche terre di Ripoli e di Surzana nella valle di Maira e dell'origine di Dronero: disquisizione storica del Barone Giuseppe Manuel di S. Giovanni. Saluzzo. 1857; 8.°

Dei Marchesi del Vasto e degli antichi monasteri de' Ss. Vittore e Costanzo, e di S. Antonio nel marchesato di Saluzzo; studi e notizie storico-critiche del Barone Giuseppe Manuel di S. Giovanni. Torino, Speirani e Tortone, 1858; 1 vol. 8.° fig.

Sur les équivalents chimiques du Baryum, du Strontium et du Plomb, par M. C. Marignac. Genève, 1858; 8.° MARIGNAC.

Sur l'isomorphisme des fluosilicates et des fluostannates et sur le poids atomique du Silicium, par M. C. Marignac. Genève, 1858; 8.°

Alcuni episodi della guerra nel Veneto, ossia Diario del Generale Alberto Della Marmora, dal 26 marzo al 20 ottobre 1848, con documenti ufficiali. Torino, Stamperia Reale, 1857; 1 vol. 8.° MARMORA (DELLA) (Alberto)

Synopsis Florae fossilis Senogalliensis, auctore D. A. B. Prof. Massalongo. Veronae, Merlo, 1858; 1 vol. 8.° MASSALONGO.

Maury's Wind and current Charts: Gales in the Atlantic. Washington, 1857; 4.° fig. MAURY.

Nouveau principe sur la distribution des tensions dans les systèmes élastiques, par M. L.-F. Ménabréa (Extr. des *Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France*. Tome XLVI, séance du 31 mai 1858); 4.° MENABREA

Sur le percement des Alpes entre Modane et Bardonèche, par M. L.-F. Ménabréa (Extr. *ibidem*, Tome XLVI, séance du 21 juin 1858); 4.°

Siluria. The history of the oldest fossiliferous rocks and their foundations, with a brief sketch of the distribution of gold over the earth, by Sir Roderick Impey Murchison. Third edition (including « *The Silurian System* ») with maps and many additional illustrations. London, 1859; 1 vol. 8.° fig. MURCHISON.

Sulla tubercolosi dell'utero e degli organi ad esso attinenti; osservazioni del Dott. Giacinto Namias. Venezia, 1858; 4.° NAMIAS.

Esperimento degli ipofosfiti di soda e di calce nella tisichezza polmonare; ragioni di quello, e principii da cui dev'essere indirizzata la cura di questa malattia; Memoria di Giacinto Namias. Venezia, 1858; 8.°

Tre prediche inedite del Beato Giordano da Rivalto colla nuova lezione di una quarta, corredata di opportune notizie e pubblicate per cura di Enrico Narducci. Roma, 1857; 8.° NARDUCCI.

Saggio di voci italiane derivate dall'arabo, di Enrico Narducci. Roma, 1858; 8.°

Handbuch für Reisende in Italien, von D.r Joh. Ferd. Neigebaur. Vol. I-II. Leipzig, 1840; 3 vol. 12.° NEIGEBAUR.

Die Donau-fürstenthümer. Gesammelte Skizzen geschichtlich-statistisch-politischen Inhalts, von J. F. Neigebaur. Breslau, 1854; 8.°

NICOLUCCI. Delle razze umane, saggio etnologico del Dottore Giustiniano Nicolucci. Vol. I-II. Napoli, 1857, 1858; 2 vol. 8.° fig.

NORMAN. Quelques observations de morphologie végétale faites au jardin botanique de Christiania, par J. M. Norman. Christiania, 1857; 4.° fig.

ODORICI. Dei documenti storici e letterarii di Cremona, lettera di Francesco Robolotti a Federico Odorici, corredata da alcuni disegni di monumenti cremonesi de' tempi romani e di mezzo, illustrati dallo stesso Odorici e da alcuni documenti inediti. Cremona, Feraboli, 1857; fol.

PAGE. Track survey of the river Paraguay, surveyed by Commander Th.s J. Page. New-York, 1855; 3 fogli gr.

PARAVICINI. Sulla resezione e disarticolazione sottoperiostea della mascella inferiore senza incisioni esterne e sulle operazioni sottoperiostali in genere, ecc.; osservazione clinica e riflessioni chirurgiche del Dottore Lamberto Paravicini. Milano, 1858; 8.°

PERREY. Documents sur les tremblements de terre au Pérou, dans la Colombie et dans le bassin de l'Amazone, recueillis, traduits et mis en ordre par M. Alexis Perrey (Extr. du T. VII des *Mém. de l'Acad. R. de Belgique*); 8.°

PIATTI. Traforamento del monte Cenisio. Confutazione della Risposta dell' Ing. Sommeiller alle accuse mosse contro di lui ed i suoi Socii, e osservazioni al Rapporto della Commissione della Coscia, di G. B. Piatti, principale autore e primo proponente al Governo Sardo dei meccanismi che s' impiegano all'aprimento della gran galleria di Bardonnèche. Torino, Favale e C.a, 1858; 1 vol. 8.°

PIZZOLARI. Della malattia dominante del baco da seta nell'annata 1857; Relazione del Socio corrispondente Dott. Alberto Pizzolari all' Accademia di Agric., Comm. ed Arti di Verona. Verona, 1858; 8.°

PLANTAMOUR (E.). Observations astronomiques faites à l'Observatoire de Genève dans les années 1851 et 1852, par E. Plantamour. Genève, 1858; 1 vol. 4.°

Résumé météorologique de l'année 1857 pour Genève et le Grand Saint-Bernard, par E. Plantamour. Genève, 1858; 8.°

Note sur la comète de Donati par le Professeur E. Plantamour (Tiré des *Archives des Sciences de la Biblioth. univ.*). Genève, 1858; 8.° fig.

PONCELET. Rapport sur les machines et outils employés dans les manufactures, fait à la Commission Française du Jury international de l'Exposition

universelle de Londres, par M. le Général Poncelet. Paris, Imprim. Impériale, 1857; 2 vol. 8.°

Le mene elettorali. Disamina sulle ultime elezioni degli Stati Sardi, del Conte Vincenzo Ferrero-Ponziglione. Torino, Ribotta, 1858; 1 vol. 4.° picc. — PONZIGLIONE

La tachéométrie ou l'art de lever des plans et de faire les nivellements avec beaucoup de précision et une économie de temps considérable, par I. Porro. Paris, Thunot et C.ᵉ, 1858; 1 vol. 8.° fig. — PORRO

Address delivered at the anniversary meeting of the Geological Society of London, on the 20th of February 1857, by Colonel J. E. Portlock. London, 1857; 8.° — PORTLOCK.

Urbano VIII e gli Accademici Lincei, lettera al ch. Cav. Gaetano Moroni per Salvatore Ab. Proja. Roma, Ajani, 1858; 8.° — PROJA

Monete dei Paleologi Marchesi di Monferrato, pubblicate da Domenico Promis. Torino, Stamperia Reale, 1858; 8.° fig. — PROMIS (Domenico)

Monete dei Romani Pontefici avanti il mille, Memoria di Domenico Promis. Torino, Stamperia Reale, 1858; 8.° fig.

Sur les étoiles filantes et le magnétisme terrestre, par M. Ad. Quetelet (Extrait des *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 2.ème série, Tom. III). Bruxelles, 1857; 8.° — QUETELET

L'Empire d'Allemagne et l'Italie au moyen-âge, par Eugène Rendu. Orléans, Colas-Gardin, 1859; 1 vol. 8.° — RENDU.

On the quantity of Heat developed by Water when rapidly agitated, by George Rennie; 8.° fig. — RENNIE.

Il nuovo *vade-mecum* del Medico, del Chirurgo, del Farmacista e del popolo, ossia Memoriale posologico farmaco-terapeutico in base ai medicamenti adottati dalla Farmacopea, ecc., del Chimico Giovanni Righini. Torino, Biancardi, 1858; 1 vol. 8.° — RIGHINI.

Notices biographiques et littéraires sur Champollion-le-Jeune et MM. Champollion-Figeac, par Adolphe Rochas (Extr. de la *Biographie du Dauphiné*). Paris, 1856; 8.° — ROCHAS.

Delle probabili condizioni fisico-chimico-dinamiche che possono aver accompagnato nelle epoche geologiche la solidificazione delle sostanze organiche; Memoria del Dott. Gioanni Battista Ronconi. Padova, 1858; 8.° — RONCONI

Storia della città di Ventimiglia dalle sue origini sino ai nostri tempi, scritta da Gerolamo Rossi. Torino, Cerutti, Derossi e Dusso, 1859; 1 vol. 8.° — ROSSI.

ROUGÉ (DE) — Étude sur une stèle égyptienne, appartenant à la Bibliothèque Impériale, par M. le V.te E. de Rougé. Paris, Imprimerie Impériale, 1858; 1 vol. 8.° fig.

ROUMEGUERE — Note sur une nouvelle espèce de lichen (*Usnea saxicola* ROUM.), par M. C. Roumeguère (Extr. des *Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de Toulouse*); 8.°

SABINE — On the Lunar-Diurnal magnetic variation at Taronto, by Major-General Edward Sabine; 4.° fig.

On periodical Laws discoverable in the mean effects of the larger magnetic disturbances; N.° III; by Edward Sabine; 4.° fig.

SASSERNO (M.lle) — Le dix-neuvième siècle et l'isthme de Suez, par Agathe Sophie Sassernò. Turin, 1858; 8.°

SCARPELLINI (Caterina) — Su i terremoti avvenuti in Roma nell'anno 1858 relativamente alle fasi lunari, lettera di Caterina Scarpellini al Direttore delle strade ferrate di Roma. Roma, 1859; ½ foglio 4.°

SCHEERER — Berichte der Kön. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch-physische Classe. Sitzung am 5 Juni 1858, etc.; 8.°

SCHLAGINTWEIT — Aperçu sommaire des résultats de la mission scientifique dans l'Inde et la haute Asie, confiée par S. M. le Roi de Prusse et la Compagnie des Indes à MM. Hermann, Adolphe et Robert Schlagintweit (Extr. des *Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, Tome XLV, séance du 12 octobre 1857); 4.°

SILLIMAN e DANA — The American Journal of Science and Arts, conducted by B. Silliman, B. Silliman Jr., and James D. Dana. Second series, vol. XXIV-XXV. N.os 70-75. New Haven, 1857-1858; 8.° fig.

SISMONDA (Angelo) — Lettres sur la constitution géologique de quelques parties de la Savoie adressées par M. le Professeur Ange Sismonda à M. Élie de Beaumont, avec des Notes de ce savant Géologue (Extr. des *Comptes-rendus de l'Acad. des Sciences de Paris*, séances des 26 octobre et 7 décembre 1857). Turin, Imprimerie Royale, 1857; 8.°

SISMONDA (Eugenio) — Notizia storica dei lavori fatti dalla Classe di Scienze fisiche e matematiche della Reale Accademia delle Scienze negli anni 1856-57, scritta dall'Accademico Professore Eugenio Sismonda. Torino, Stamperia Reale, 1858; 4.° fig.

SORIO — Il trattato della sfera di ser Brunetto Latini ridotto alla sua vera lezione e illustrato con note critiche e sistema di cronologia, tratto dal Tesoro di Brunetto Latini, per cura di Bartolomeo Sorio. Milano, 1858; 8.°

Notizie storico-critiche intorno all'antico episcopato di Sorres, ricavate da un autografo manoscritto del secolo XV, pel Canonico Giovanni Spano. Cagliari, Timon, 1858; 8.° — SPANO.

Bullettino archeologico Sardo, ossia raccolta dei monumenti antichi in ogni genere di tutta l'isola di Sardegna, diretto dal Can. Cav. Giovanni Spano. Anno II, novembre e dicembre; anno III, novembre e dicembre; anno IV, gennaio-dicembre; anno V, gennaio e febbraio. Cagliari, Timon, 1856-59; 8.° fig.

Carte géologique de la Néerlande; feuille n.° 14. Harlem, 1858; 1 feuille 4.° obl. — STARING.

Description des fossiles de la Brèche osseuse de Monreale de Bonaria près de Cagliari, par César Studiati. Turin, Impr. Royale, 1857; 8.° — STUDIATI.

Sui differenziali a indice qualunque; nota del Prof. Placido Tardy. Roma, 1858; 8.° — TARDY.

Della fruttificazione dell'*Hoya carnosa* R. Br., discorso del Dott. Attilio Tassi (Estr. del giornale i *Giardini*, fasc. X, aprile 1856); 8.° — TASSI.

Una visita all'esposizione dei fiori in Firenze (Estr. dal giornale i *Giardini*, fasc. X, aprile 1856); 8.°

Del modo di compilare i cataloghi di semi nei giardini botanici; discorso del Dott. Attilio Tassi. Lucca, 1856; 8.°

Dello svolgimento di calore ne' fiori della *Magnolia grandiflora* Lin.; del Dott. Attilio Tassi; 8.°

Movimento statistico della popolazione di Torino nei mesi di aprile-dicembre 1858, gennaio-febbraio 1859, compilato dal Dottore Fedele Torchio; 4.° — TORCHIO.

Città di Torino. Movimento statistico della popolazione nell'anno 1858; del Dott. Torchio Fedele; 4.°

Per la solenne cerimonia nel porsi la prima pietra alla fondazione del R. Orto Botanico in Catania il 31 luglio 1858, natalizio di S. M. la Regina delle Due Sicilie; discorso e descrizione di Francesco Tornabene. Catania, 1858; 4.° — TORNABENE.

Nuove ricerche relative alla sostituzione lineare per la riduzione delle funzioni ellittiche di prima specie, di Barnaba Tortolini. Roma, 1858; 8.° — TORTOLINI.

Ricerche analitiche sulle curve coniche circoscritte ad un triangolo, di Barnaba Tortolini. Roma, 1858; 8.°

Sulla risoluzione algebrica delle equazioni del terzo e quarto grado; studii di Barnaba Tortolini. Roma, 1858; 4.°

TRAVELLA — Il regno vegetale elementarmente esposto, per Stefano Travella. Milano, Vallardi, 1859; 1 vol. 8.°

TOSELLI — Nuovo apparato per togliere l'intermittenza alla luce elettrica, di G. B. Toselli. Mantova, Agazzi, 1858; 8.°

TRINCHERA — Lettere inedite e rare di Carlo Botta con appendice; Pubblicazione del *Paese*, giornale della città e divisione di Vercelli. Vercelli, Guglielmoni, 1858; 1 vol. 8.°

VATTEMARE — Note sur le système d'échange international, scientifique, littéraire et artistique. Paris; 8.°

VIDAL — Notice sur les prisons et le nouveau régime pénitentiaire, l'administration, la législation pénale, les jeunes détenus dans le Royaume de Sardaigne, par Léon Vidal. Paris, Chaix et C.e, 1857; 1 vol. 8.°

VIGLIANI — Del progresso nell'amministrazione della giustizia, discorso detto dal Comm. P. O. Vigliani, Avv. Generale di S. M., nella solenne apertura dell'anno giudiziario il dì 5 novembre 1858, nanti all'Ecc.ma Corte di Appello di Genova. Genova, Pagano; 8.°

VIRLET D'AOUST — Sur des œufs d'insectes servant à l'alimentation de l'homme et donnant lieu à la formation d'Oolithes dans des calcaires lacustres, au Mexique, par M. Virlet d'Aoust (Extr. des *Comptes-rendus des séances de l'Académie des Sciences de l'Institut I. de France*, Tome XLV, séance du 23 novembre 1857); 4.°

VOLPICELLI — Formole generali pel manometro ad aria compressa e per lo stereometro; Nota del Prof. P. Volpicelli. Roma, 1857, 8.°

Il Prof. Volpicelli annunzia la morte dell'illustre Geometra, Barone A. L. Cauchy, all'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei nella sessione del 7 giugno 1858 (Estr. dagli *Atti dell'Accademia de' Nuovi Lincei*, sessione VII del 7 giugno 1857); 4.°

Fisica. – Terza comunicazione sulla polarità elettrostatica; Nota del Prof. P. Volpicelli (Estr. dagli *Atti dell'Accad. de' Nuovi Lincei*, sess. III, 7 febbr. 1858); 4.°

Appendice alla terza comunicazione sulla polarità elettrostatica, del Prof. P. Volpicelli; 4.°

Recherches récentes sur l'induction électrostatique, Note de M. A. de la Rive; 8.°

Sur quelques observations électrométriques et électroscopiques; lettre de M. P. Volpicelli à M. C. Despretz (Extr. des *Comptes-rendus des séances de l'Acad. des Sciences de l'Institut de France.* Tome XLVI, séance du 15 mars 1858); 8.°

Comunicazione del Prof. P. Volpicelli all'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei nella sessione del 2 maggio 1858 sul 3.° Volume del Trattato di elettricità teorica ed applicata del Prof. A. de la Rive; 4.°

Inversio vesicae urinariae og luxationes femorum congenitae hos samme individ, iagttagne af Lektor Voss. Christiania, 1857; 4.° — Voss.

Apollon Sminthien, par J. de Witte. Paris, 1858; 8.° fig. — Witte (de).

Peter der Zweite, Graf von Savoyen, Markgraf in Italen, sein Haus und sein Lande; von L. Wurstemberger; vol. III-IV. Bern, 1858, 2 vol. 8.° — Wurstemberger.

Osservazioni di nuovi sforzi fatti dal Belli a difesa dei due esperimenti addotti dal Matteucci e dal Petrina, contro la simultanea esistenza di due opposte correnti elettriche sul medesimo filo conduttore; Nota 2.ª del Prof. Zantedeschi. Vienna, 1858; 8.° — Zantedeschi.

Manuale storico degli ordinamenti economici vigenti in Toscana, del Cav. Antonio Zobi; opera premiata dalla R. Accademia de'Georgofili nel 1847, con un'Appendice fino al 1856. Italia, 1858; 12.° — Zobi.

Memoria sulla diffrazione della luce, di Giuseppe Zurria. Catania; 1857, 8.° — Zurria.

Programma certaminis poetici ab Academia Regia Doctrinarum ex legato Hoeufftiano propositi a° 1858. Amstelodami, 1858; 1/4 di fogl. 4.° — R. Accad. delle Sc. *di Amsterdam*

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen; Deel XXVI. Batavia, 1854-1857; 1 vol. 4.° fig. — Società delle Arti e Sc. *di Batavia.*

Tijdschrift voor Indische, Taal-, Land- en Volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen; onder redaktie van P. Bleeker, J. Munnich en E. Notscher. Nieuwe Serie, Deel III, Aflev. 1-6. Batavia, 1856-57; 8.° fig.

Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch Indië, uitgegeven door de Natuurkundige Vereniging in Nederlandsch Indië; Deel XIII, Derde Serie, Deel III, Aflev. V-VI. Batavia, 1857; 8.° fig. — Governo Neerlandese *(Batavia).*

Acta Societatis Scientiarum Indo-Neerlandicae; Vol. I-II. Batavia, 1856-1857; 2 vol. 4.° fig.

Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin: aus dem Jahr. 1856-1857. Berlin, 1857-1858; 2 vol. 4.° fig. — R. Accad. delle Sc. *di Berlino.*

Monatsbericht der Königlichen Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin; Januar-December 1857: Januar-Juin 1858. Berlin, 1857-1858; 8.°

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1855; dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin; XI Jahrgang. Berlin, 1858, 2 vol. 8.° — Società di Fisica *di Berlino.*

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern; n. 360-407. Bern, 1856-1857; 2 vol. 8.° — Società di Storia naturale *di Berna.*

Eröffnungsrede der 43 sten Versammlung Schweizerischer Natusforscher in Bern durch den Präsidenten Prof. Dr. B. Studer, den 2 August 1858; 8.°

Acc. delle Scienze dell'Istituto *di Bologna.*

Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Tomi VII, VIII. Bologna, 1856-58; 2 vol. 4.° fig.

Rendiconto delle sessioni dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Anni accademici 1855-1856, 1856-1857, 1857-58. Bologna, 1856-58; 8.°

Società' Medico-Chirurgica *di Bologna.*

Bullettino delle Scienze mediche della Società Medico-Chirurgica di Bologna; serie IV; Gennaio-dicembre 1858; Gennaio-marzo 1859. Bologna, 1858-59; 8.°

Società Medico-Chirurgica di Bologna. Programma di concorso al premio Sgarzi di scudi cento romani per l'anno 1861. Bologna, 1859; $^1/_4$ di foglio 4.°

Municipio *di Bologna.*

Compendio storico della scuola anatomica di Bologna, dal rinascimento delle Scienze e delle Lettere a tutto il secolo XVIII, con un paragone fra la sua antichità e quella delle scuole di Salerno e di Padova, scritto da Michele Medici. Bologna, 1857; 1 vol. 4.°

Accad. Americana d'Arti e Scienze (*Boston*).

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences; vol. III, n.^{os} 32-52; vol. IV, n.^{os} 1-11. Boston and Cambridge, 1857; 8.°

Accad. de'Curiosi della Natura *di Breslavia.*

Novorum Actorum Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Naturae Curiosorum; vol. XXVI, pars I. Vratislaviae, 1857; 1 vol. 4.° fig.

R. Accad. di Sc., Lett. e Belle-Arti del Belgio (*Brusselle*).

Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Collection in-8.°, Tom. VII. Bruxelles, 1858; 1 vol. 8.°

Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; 26.^{ème} année, 2.^{ème} série, Tom. I-III. 1857. Bruxelles, 1857; 3 vol. 8.°

Annuaire de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; 1858; 24.^{ème} année. Bruxelles, 1858; 18.°

Der Naturen Bloeme van Jacob van Maerlant, met inleiding, varianten van Hss., aenteekeningen en Glossarium, etc. voor de eerste mael uitgegeven door J. H. Bormans. Eerste Deel. Brussel, 1857; 1 vol. 8.°

Rymbybel van Jacob van Maerlant, met voorrede, varianten van Hss., aenteekeningen en Glossarium, etc. voor de eerste mael uitgegeven door J. David, P.^{r} Eerste Deel. Brussel, 1858; 1 vol. 8.°

R. Osservatorio *di Brusselle.*

Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles, publiées aux frais de

l'État, par le Directeur A. Quetelet. Tome XII. Bruxelles, Hayez, 1857; 1 vol. 4.°

Annuaire de l'Observatoire Royal de Bruxelles par A. Quetelet, Directeur. 1858. Bruxelles, 1857; 18.°

Almanaque náutico para el año 1859 y para el año 1860, calculado de orden de S. M. en el Observatorio de marina de la ciudad de S. Fernando. Cadiz, 1857-58; 2 vol. 4.° piec. — Osservatorio di Marina di S. Fernando (*Cadice*)

Proceedings of the American Association for the Advancement of Science; tenth Meeting, held at Albany (1856), and eleventh Meeting held at Montreal (1857). Cambridge, 1857-1858; 2 vol. 8.° — Assoc. Americana per l'avanzamento delle Scienze (*Cambridge*).

Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania. Serie seconda, Tom. 1-7, 9-13. Catania, 1844-1857; 12 vol. 4.° fig. — Accad. Gioenia delle Scienze *di Catania.*

Mémoires de la Société Impériale des Sciences naturelles de Cherbourg; vol. IV. Cherbourg, 1856; 1 vol. 8.° fig. — Società Imperiale delle Scienze nat. *di Cherbourg.*

Index scholarum in Universitate Regia Fredericiana octogesimo nono eius semestri, anno 1857 ab augusto mense incunte, habendarum. Christiania, 1857; 4.° — R. Università *di Cristiania.*

Norges Skole-System; 8.°

Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Dijon; 2.ème Série, Tome VI.e; année 1857. Dijon, 1858; 1 vol. 8.° — Acc. Imp. delle Sc., Arti e B.-Lettere *di Digione*

A descriptive catalogue of the antiquities of stone, earthen, and vegetable materials in the Museum of the Royal Irish Academy, by W. R. Wilde. Dublin, Gill, 1857; 1 vol. 8.° — Reale Accademia Irlandese *di Dublino.*

Journal of the Geological Society of Dublin. Vol. I, part 3.ª; vol. II, parts 1.ª–3.ª; vol. III, parts 1.ª–4.ª; vol. IV, parts 1.ª–2.ª; vol. V, parts 1.ª–3.ª; vol. VI, parts 1.ª–2.ª Dublin, 1837–1854; 8.° fig. — Società Geologica *di Dublino.*

The Atlantis: a register of literature and sciences, conducted by Members of the Catholic University of Ireland; January, 1858. Dublin, 1858; 1 vol. 8.° — Univers. Cattolica d'Irlanda (*Dublino*).

Transactions of the Royal Society of Edinburgh; vol. XXI, part 4, for the session 1856-57. Edinburgh, 1857; 1 vol. 4.° fig. — R. Società *di Edimburgo.*

Proceedings of the Royal Society of Edinburgh; session 1856-57: vol. III, n.° 47. London, 1857; 8.°

Proceedings of the Academy of natural Sciences of Philadelphia; 1857, n.os 8-16; 1858, n.os 1-9. Philadelphia, 1857-1858; 8.° — Accad. delle Sc. naturali *di Filadelfia*

Journal of the Academy of natural Sciences of Philadelphia. New Series, vol. III, part IV. Philadelphia, 1858; 4.°

Soc. Filos. Americ. di Filadelfia.

Proceedings of the American philosophical Society; vol. VI, n.os 57-58; 1857. Philadelphia, 1857; 8.°

Notice of some remarks by the late M.r Hugh Miller, Author of *The Testimony of the Rocks; The Old Red Sandstone* etc. Philadelphia, 1857; 8.°

R. Accademia de' Georgofili di Firenze

Continuazione degli Atti della Reale Accademia Economico-Agraria dei Georgofili di Firenze. Nuova Serie, vol. IV, disp. 2.ª-5.ª; vol. V, disp. 1.ª-4.ª; vol. VI, disp. 1.ª Firenze, 1857-59; 8.°

Rendiconti delle adunanze della Reale Accademia Economico-Agraria dei Georgofili di Firenze; 1858, gennaio-settembre; 1859, gennaio-febbraio. Firenze, 1858-59; 8.°

I. R. Museo di Fis. e St. nat. di Firenze.

Annuario dell' I. e R. Museo di Fisica e Storia naturale per gli anni 1857 e 1858. Firenze, Le Monnier, 1856 e 1857; 2 vol. 12.°

Istituto tecnico Toscano (Firenze).

Rapporto generale della pubblica esposizione dei prodotti naturali e industriali della Toscana, fatta in Firenze nell' I. e R. Istituto Tecnico Toscano nel 1854. Firenze, Barbèra, Bianchi e Comp.; 1 vol. 8.°

Istituto Senckenbergiano di Francfort.

Abhandlungen, herausgegeben von der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft; Band II, Lief. 2. Frankfurt A. M. 1858; 4.° fig.

Società di Fisica e di Storia natur. di Ginevra.

Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève; Tome XIV. Genève, 1858; 1 vol. 4.° fig.

Istituto nazionale Ginevrino.

Mémoires de l'Institut National Genevois; Tomes IV, V; années 1856-57. Genève, 1857-58; 2 vol. 4.° fig.

Soc. delle Sc. nat. di Hanau

Naturhistorische Abhandlungen aus dem Gebiete der Wetterau. Eine Festgabe der Wetterauer Gesellschaft für die gesammte Naturkunde zu Hanau bei ihrer 50 jährigen Jubelfeier am 11 August 1858. Hanau, 1858; 1 vol. 8.°

Jahresbericht der Wetterauer Gesellschaft für die gesammte naturkunde zu Hanau über die Gesellschaftsjahre von August 1855 bis dahin 1858. Hanau, 1858, 2 vol. 8.°

Società Olandese delle Scienze di Harlem

Extrait du programme de la Société Hollandaise des Sciences à Harlem pour l'année 1858; ½ fogl. 4.°

Soc. di St. nat. e medicina di Heidelberg

Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg. N. IV-VI. Heidelberg, 1858; 8.°

Soc. delle Scienze di Finlandia Helsingfors

Acta Societatis Scientiarum Fennicae; Tomus I, fasc. 1-3; II, 1-4; III, 1-2; V, 1-2. Helsingforsiae, 1842-58; 11 vol. 4.° fig.

Oefversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar; IV. 1856-1857. Helsingfors, 1857; 4.°

Notiser ur Sällskapets pro Fauna et Flora Fennica Förhandlingar; Häft. 1-3. Helsingfors, 1848-1857; 3 vol. 4.° fig.

Bidrag till Finlands Naturkännedom, Etnografi och Statistik, utgifna af Finska Vetenskaps-Societeten; Häft. 1, 2, 4; 3 vol. 8.°

Palaeontologie Suedrusslands; I. *Ursus spelaeus*; II. *Felis*, *Hyaena*, *Canis*, etc. von D.r Alexander von Nordmann. Helsingfors, 1858; 2 fasc. 4.° con atlante in fol.

Schriften der Universität zu Kiel, aus dem Jahr. 1856-1857; Band. III, IV. Kiel, 1857-1858; 4.° — UNIVERSITÀ *di Kiel.*

Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-Phys. Classe, 1857, Heft. II, III; 1858, Heft I. Philolog.-Histor. Classe, 1856, Heft. III, IV; 1857, Heft. I, II; 1858, Heft I. Leipzig, 1857-58; 8.° — R. SOCIETÀ DELLE SC. *di Lipsia.*

Elektrische Untersuchungen; dritte Abhandlung von W. G. Hankel. Leipzig, 1858; 8.° gr.

Theorie der Sonnenfinsternisse und Verwandten Erscheinungen, von P. A. Hansen. Leipzig, 1858; 8.° gr. fig.

Historia e Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Serie 2.ª, Tomo I, parte 2.ª; Tomo II, parte 1.ª e 2.ª; Tomo III, parte 1.ª e 2.ª Lisboa, 1844, 1850, 1851, 1856; 5 vol. 4.° fig. — R. ACCAD. DELLE SC. *di Lisbona.*

Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Classe de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes. Nova serie, Tomo I, parte 1.ª e 2.ª Lisboa, 1854 e 1855; 2 vol. 4.°

Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Classe de Sciencias moraes, politicas e bellas lettras. Nova serie, Tomo I, parte 1.ª e 2.ª Lisboa, 1855; 2 vol. 4.°

Annaes das Sciencias e Lettras, publicados debaixo dos auspicios da Academia Real das Sciencias. Sciencias mathematicas, physicas, historico-naturaes e medicas. Tomo I, primeiro anno, 1857, Março-Junho. Lisboa, 1857; 8.°

Actas das sessões da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Tomo I, n.i 1-8; Tomo II, n.i 1-6; Tomo III, n.i 1-3. Lisboa, 1849-1851; 8.°

Annaes da marhina Portugueza; por Ignacio da Costa Quintella; Tomi I-II. Lisboa, 1839-1840; 2 vol. 8.°

Viagens extensas e dilatadas do celebre Arabe Abu-Abdallah, mais conhecido pelo nome de Ben-Batuta, traduzidas por Jose de Santo Antonio Moura; Tomi I-II. Lisboa, 1840 e 1855; 2 vol. 8.°

Relaçao da derrota naval, façanhas, e successos dos cruzados que partirão do escalda para a Terra Santa no anno de 1189, escrita em latim por hum des mesmos cruzados, traduzida e annotada por João Baptista de Silva Lopes. Lisboa, 1844; 1 vol. 8.°

Collecção de opusculos reimpressos relativos á historia das navegações, viagens e conquistas dos Portuguezes, pela Academia Real das Sciencias. Tomo I, n.ⁱ 1-2. Lisboa, 1844 e 1855; 2 vol. 8.°

Memorias para a historia ecclesiastica do bispado de Algarve, por João Baptista da Silva Lopes. Lisboa, 1848; 1 vol. 8.°

Portugaliae monumenta historica a saeculo octavo post Christum usque ad quintumdecimum, iussu Academiae Scientiarum Olisiponensis edita. Scriptores, vol. I, fasc. 1. – Leges et Consuetudines, vol. I, fasc. 1. Olisipone, 1856; 2 vol. fol.

R. Society de Londra

Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for the years 1856-57; vol. 146, parts II, III; vol. 147, parts I-III. London, 1856-57; 4.° fig.

Proceedings of the Royal Society of London. Vol. VIII, n.ᵒˢ 23-26; vol. IX, n.ᵒˢ 27-31. London, 1857; 8.°

The Royal Society, 30th November, 1856-1857; 4.°

Six discourses delivered before the Royal Society at their anniversary meetings, on the Award of the Royal and Copley Medals; preceded by an address to the Society, on the progress and prospects of science; by sir Humphry Davy. London, 1827; 1 vol. 4.°

Report on the adjudication of the Copley, Rumford, and Royal Medals: and appointment of the Bakerian, Croonian, and Fairchild lectures, compiled from the original Documents in the Archives of the Royal Society; by James Hudson. London, 1834; 1 vol. 4.°

Società Linneana di Londra

The Transactions of the Linnean Society of London; vol. XXII, part. 2. London, 1857; 4.° fig.

Journal of the Proceedings of the Linnean Society of London. Zoology, vol. I, n.ᵒˢ 4-6; Botany, vol. I, n.ᵒˢ 4-6. London, 1857; 8.°

List of the Linnean Society of London, 1857; 8.°

Address of Thomas Bell, the President, together with obituary notices of deceased members, by John J. Bennet, the Secretary; read at the anniversary meeting of the Linnean Society on Monday, may 25, 1857. London, 1857; 8.°

Soc. Geologica di Londra

The Quarterly journal of the Geological Society. Vol. XIII, n.ᵒˢ 52-54; vol. XIV, n.ᵒˢ 55-56. London, 1857-1858; 8.° fig.

Abstracts of the Proceedings of the Geological Society of London; n.^{os} 1-3. London, 1856-57; 8.°

Transactions of the Zoological Society of London; Vol. IV, part 4. London, 1857; 1 vol. 4.° fig. — Società Zoologica di Londra.

Proceedings of the Zoological Society of London, n.^{os} 247-338. London, 1852-1857; 8.°

The Quarterly Journal of the Chemical Society of London; vol. XI, n.° 41. London, 1858; 8.° — Società Chimica di Londra

Memoirs of the Astronomical Society of London. Vol. I-XXVI. London, 1822-1858; 26 vol. 4.° — Soc. Astronomica di Londra.

Monthly Notices of the Astronomical Society of London, containing abstracts of papers and reports of the proceedings of the Society. London, 1831-1857; 17 vol. 8.°

Report of the twenty-sixth meeting of the British Association for the Advancement of Science, held at Cheltenham in august 1856. London, 1857; 1 vol. 8.° fig. — Assoc. Britannica per l'avanzamento delle Scienze (*Londra*).

Notices of the meetings of the Members of the Royal Institution of Great Britain; part VII; November, 1856; July, 1857. London, 1857; 8.° — Istituzione Reali della Gr. Bretagna (*Londra*).

Tables de la Lune, construites d'après le principe Newtonien de la gravitation universelle; par P. A. Hansen, Directeur de l'Observatoire Ducal de Gotha. Londres, Eyre et Spottiswoode, 1857; 1 vol. 4.° — L'Ammiragliato Britannico (*Londra*).

Notice to mariners (n.° 24). British north America. Variation of the compass, 1858. London, 25 march 1858; ½ foglio.

Account of the observations and calculations of the principal triangulation: and of the figure, dimensions and mean specific gravity of the Earth as derived therefrom; published by order of the Master-general and Board of Ordnance; drawn up by Captain Alexander Ross Clarke, under the direction of L.^{t} Colonel H. James. London, 1858; 1 vol. 4.° con atlante. — Segreteria di Stato della Guerra (*Londra*).

Essai sur la féodalité; Introduction au droit féodal du pays de Vaud, par Édouard Secretan (*Mémoires et Documents publiés par la Société d'histoire de la Suisse Romande*; Tom. XV, livr. 2.^{e}; Tom. XVI, livr. 2.^{e}). Lausanne, Bridel, 1859; 2 vol. 8.° — Società di Storia della Svizzera Romanda (*Losanna*)

Transactions of the Michigan State Agricultural Society, with reports of County Agricultural Societies for 1856; vol. VIII. Lansing, 1857: 1 vol. 8.° — Società Agraria di Michigan

I. R. Istituto Lombardo di Sc., Lett. ed Arti (Milano)

Memorie dell'I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti. Vol. VII, fasc. 1-8. Milano, Bernardoni, 1858-59; 4.°

Atti dell'I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti. Vol I, fasc. 1-14. Milano, Bernardoni, 1858-59; 4.° fig.

Sul caglio vitellino; Memorie di Davide Nava e del Prof. Gio. Francesco Selmi, che ottennero il premio d'incoraggiamento dall'I. R. Istituto Lombardo pel concorso di fondazione Cagnola del 1857; 8.°

Atti della fondazione scientifica Cagnola nel 1858. Volume II, parte 2.ª Milano, Bernardoni, 1858; 8.°

R. Acc. delle Sc. di Baviera (Monaco)

Abhandlungen der Mathemat.-Physikalischen Classe der Königlich. Bayerischen Akademie der Wissenschaften (vol. VIII, part 1.ª). München, 1857; 4.° fig.

Abhandlungen der Philosoph.-Philologischen Classe der Königlich. Bayerischen Akademie der Wissenschaften (vol. VIII, part 2.ª). München, 1858; 4.°

R. Accad. delle Sc. di Napoli.

Memorie della Reale Accademia delle Scienze dal 1852 in avanti, ripartite nelle tre Classi: di matematiche, scienze naturali e scienze morali. Vol. II, che contiene quelle dal 1855 al 1857. Napoli, Vitale, 1857; 1 vol. 4.° fig.

Rendiconto della Reale Accademia delle Scienze. Nuova serie, dal marzo 1856 a tutto il 1857.

Manifesto del concorso a' premii Sementini pel corrente anno 1858-59, pubblicato dalla R. Accademia delle Scienze di Napoli; 4.°

Nuovo reagente per distinguere l'acido tartrico dall'acido citrico; Memoria che ha riportato l'intero premio di duc. 150 fondato dal fu Cav. Luigi Sementini per l'anno 1857; 4.°

Ricerche intorno la preparazione dell'ossido verde di cromo; Memoria che ha riportato l'intero premio di duc. 150 fondato dal fu Cav. Luigi Sementini, per l'anno 1858; 4.°

Relazione pe' premii della fondazione Cav. L. Sementini per gli anni 1857-1858; 4.°

Società di Sc. nat. di Neuchatel

Bulletin de la Société des Sciences naturelles de Neuchatel. Tome IV, 2.e-3.e cahiers. Neuchatel, 1857-58; 8.°

Osservatorio astronomico d'Oxford

Astronomical and meteorological observations made at the Radcliffe Observatory, Oxford, in the Year 1856, under the superintendence of Manuel J. Johnson. Vol. XVII. Oxford, 1858; 1 vol. 8.°

I. R. Accademia di Sc., Lett. ed Arti di Padova

Rivista periodica dei lavori dell'I. R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova; vol. IV, V. Padova, Sicca, 1856-57; 8.°

Il Raccoglitore; pubblicazione annuale della Società d'Incoraggiamento della Provincia di Padova; anno VII. Padova, Sicca, 1858; 1 vol. 8.° — Soc. d'Incorag.to di Padova.

Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de l'Institut Imp. de France; par MM. les Secrétaires perpétuels; Tomes XLVI; XLVII; XLVIII, n.os 1-13. Paris, 1858-1859; 4.° — Istituto Imp. di Francia (*Parigi*).

Mémoires de l'Institut Impérial de France, Académie des Inscriptions et Belles-Lettres. Tome XXIII, 2.e partie. Paris, 1858; 1 vol. 4.°

Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Impériale et autres Bibliothèques, publiés par l'Institut Impérial de France, faisant suite aux notices et extraits lus au Comité établi dans l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres. Tome XVI, 1.e partie; Tome XVII, 1.e partie; Tome XVIII, 1.e partie; Tome XIX, 2.e partie. Paris, 1858; 4 vol. 4.°

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres de l'Institut Impérial de France. Première Série. Sujets divers d'érudition. Tome V, 2.e partie. Paris, 1858; 4.°

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France. Tome XV; Sciences mathématiques et physiques. Paris, 1858, 4.° fig.

Institut Impérial de France; Académie des Beaux-Arts. Rapport sur l'ouvrage de M. le Comte de Laborde, intitulé: *De l'union des Arts et de l'Industrie*, adressé à LL. EE. les Ministres d'État et de la Maison de l'Empereur. Paris, 1858; 4.°

Société Philomatique de Paris. Extraits des procès-verbaux des séances pendant l'année 1857-1858. Paris, 1857-58; 8.° — Soc. Filomatica di Parigi.

Bulletin de la Société de Géographie, 4.e série, Tomes XIV-XVI. Paris, 1857; 3 vol. 8.° avec cartes. — Soc. di Geografia di Parigi.

Bulletin de la Société Géologique de France. Deuxième Série. Tome XIV, feuilles 24-57; Tome XV, feuilles 1-42; Tome XVI, feuilles 1-14. Paris, 1857-1859; 8.° — Soc. Geologica di Francia (*Parigi*

Inscriptions Romaines de l'Algérie, recueillies et publiées sous les auspices de S. Exc. M. Hippolyte Fortoul, Ministre de l'Instruction publique et des Cultes, par M. Léon Renier; Livr. 11-12. Paris, Imprimerie Impériale, 1858; 4.° — Ministro dell'Istr. pubblica di Francia (*Parigi*).

Annales des mines, ou recueil de Mémoires sur l'exploitation des mines et sur les sciences et les arts qui s'y rapportent, rédigées par les Ingénieurs des mines, etc. 5.e Série, Tomes XII; XIII; XIV, livr. 1. Paris, 1857-1858; 8.° fig. — Amministrazioni Generale delle Miniere di Francia (*Parigi*).

COMMISSIONE TECNICA INTERNAZ. PEL MIGLIORAMENTO DELLE BOCCHE DEL DANUBIO (*Parigi*).

Rapport de la Commission technique internationale, convoquée à Paris pour l'examen des questions relatives à l'amélioration des bouches du Danube. Paris, Imprimerie Impériale, 1858; 1 vol. 4.° avec une carte.

ACCAD. IMPERIALE DELLE SCIENZE (*Pietroborgo*).

Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de S.t-Pétersbourg. VI Série, première partie. *Sciences mathématiques et physiques*; Tom. II, livr. 5.e-6.e; Tom. IV, livr. 5.e-6.e; Tom. V, livr. 1.e-2.e S.t-Pétersbourg, 1840 et 1848; 4.° fig.

Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de S.t-Pétersbourg. VI Série, seconde partie. *Sciences naturelles*; Tom. III, livr. 5.e-6.e; Tom. IV, livr. 1.e-5.e; Tom. VI, livr. 1.e-3.e, 5.e-6.e S.t-Petersbourg, 1840-1849; 4.° fig.

Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de S.t-Pétersbourg. VI Série. *Sciences politiques, histoire, philologie*; Tom. IV, livr. 6.e; Tom. V, livr. 1.e-4.e; Tom. VII, livr. 4.e-6.e S.t-Pétersbourg, 1840, 1841, 1847, 1848; 4.° fig.

Mémoires présentés à l'Académie Impériale des Sciences de S.t-Pétersbourg par divers Savants; Tom. IV, livr. 3.e-4.e; Tom. VI, livr. 2.e-3.e S.t-Pétersbourg, 1841, 1848, 1849; 4.° fig.

Compte-rendu de l'Académie Impériale des Sciences de S.t-Pétersbourg, précédé de l'état de son personnel; années 1849-1857. S.t-Pétersbourg, 1850-1858; 8.°

OSSERVATORIO FISICO CENTRALE DI RUSSIA (*Pietroborgo*).

Annales de l'Observatoire physique central de Russie, publiées par ordre de S. M. Impériale, sous les auspices de S. Exc. M.r de Brock; par A. T. Kupffer; année 1854, n.os 1-2; année 1855, n.os 1-2. S.t-Pétersbourg, 1856-57; 4 vol. 4.°

Compte-rendu annuel adressé à S. Exc. M. de Brock, Ministre des Finances, par le Directeur de l'Observatoire physique central, A.-T. Kupffer. Année 1856. Supplément aux Annales, pour l'année 1855. S.t-Pétersbourg, 1857; 4.°

MINISTERO DELLE FINANZE DI RUSSIA (*Pietroborgo*).

Ueber die Placodermen des devonischen Systems, von D.r Christian Heinrich Pander. S.t-Pétersbourg, 1857; 1 vol. 4.° fig.

Monographie der fossilen Fische des silurischen Systems der Russisch-Baltischen Gouvernements, von D.r Christian Heinrich Pander. S.t-Pétersbourg, 1856; 1 vol. 4.° fig.

ACCAD. PONTIFICIA DE' NUOVI LINCEI (*Roma*).

Atti dell'Accademia Pontificia de'Nuovi Lincei, compilati dal Segretario. Anno XI, sessioni 1.a-7.a: anno XII, sessioni 1.a, 2.a Roma, 1858; 4.° fig.

Atti dell' Imperiale Regia Accademia di Lettere e Scienze degli Agiati di Rovereto, negli anni 106 e 107 dalla sua fondazione. Rovereto, Marchesani, 1856-1857; 8.° — I. R. Accademia di Lett. e Sc. degli Agiati *di Rovereto.*

The Transactions of the Academy of Science of S.t-Louis; fasc. 1-2. S.t-Louis (Missouri); 1858; 8.° — Accad. delle Sc. *di S. Luigi.*

Konglica Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar; ny följd (Tom. I, disp. 2). Stockholm, 1858; 4.° fig. — Accad. R. delle Sc. *di Stoccolma.*

Oefversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar; 14.de Aergängen, 1857. Stockholm, 1858; 1 vol. 8.°

Konglica Svenska fregatten Eugenies resa omkring jorden under befäl af C. A. Virgin, Aeren 1851-1853, etc. (Dispense 1-5). Stockholm, 1857-1858; 4.° fig.

Giornale delle scienze mediche della R. Accademia Medico-Chirurgica di Torino. Vol. XXXI; XXXII; XXXIII; XXXIV, n.i 1-5. Torino, 1858; 8.° — Reale Accademia Medico-Chirurgica *di Torino.*

Annali della R. Accademia d'Agricoltura di Torino; Volume X. Torino, Steffenone, Camandona e C.a, 1858; 1 vol. 8.° — Accad. R d'Agric. *di Torino.*

Descrizione delle macchine e procedimenti per cui vennero accordati attestati di privativa in conformità della Legge 12 marzo 1855, pubblicata d'ordine del sig. Ministro delle Finanze. Primo e secondo semestre 1857, puntate 1.a-2.a; primo semestre 1858, puntata 1.a Torino, Marzorati, 1858; Testo in-4.°, atlante in-4.° obl. — Istituto Tecnico (*Torino*).

Ramayana, Poema sanscrito di Valmici. Traduzione italiana con note, dal testo della scuola Gaudana, per Gaspare Gorresio. Vol. IV, V, della traduzione, nono e decimo (ultimo) della serie dell'opera. Parigi, 1856-58; 2 vol. 8.° gr. — Ministero degli Aff. Interni (*Torino*).

Compte-rendu des eaux thermales sulfureuses d'Aix en Savoie pendant la saison de 1857, suivi de considérations pratiques sur leur action curative, par Louis Bertier. Chambéry, Puthod fils, 1858; 8.°

Renseignements statistiques sur les eaux d'Aix en Savoie. Rapport au Ministère de l'Intérieur sur l'établissement thermal d'Aix; par l'Intendant Dupraz. Chambéry, Puthod fils, 1859; 8.°

Notizie statistiche della pubblica istruzione superiore e secondaria del Regno per l'anno scolastico 1856-57, pubblicate per cura del Ministero dell' Istruzione pubblica. Torino, Stamperia Reale, 1858; 4.° — Ministero dell' Istr. pubblica (*Torino*).

Annuario dell' Istruzione pubblica per l'anno scolastico 1858-59. Torino, Stamperia Reale; 1 vol. 8.° picc.

MINISTERO DEI LAVORI PUBBLICI (*Torino*).

Repertorio delle Miniere. Leggi, Decreti, Regolamenti, Circolari, Atti diversi concernenti le sostanze minerali dall'anno 1845 al fine 1857. Vol. V, VI. Torino, Ceresole e Panizza, 1857-58; 2 vol. 8.°

GRAN MAGISTERO DELL'ORD. MAURIZ (*Torino*)

Tavole statistiche concernenti il movimento e l'amministrazione degli Ospedali dell'Ordine dei Santi Maurizio e Lazzaro pendente l'anno 1857. Torino, Marzorati, 1858; fol.

SINDACO DELLA CITTÀ *di Torino*

Città di Torino. Dati di statistica comunale per l'anno 1859; 4°

I. R. ISTITUTO VENETO (*Venezia*).

Memorie dell'I. R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Vol. VI, parte 2.ª; vol. VII, parti 1.ª, 2.ª Venezia, 1857; 4.° fig.

ACCADEMIA D'AGRIC., COMM. ED ARTI *di Verona*.

Estratto delle deliberazioni dell'Accademia di Agricoltura, Commercio ed Arti di Verona per l'istituzione di una Associazione Agraria Veronese: rapporto della Commissione accademica che ne compilò lo statuto. Verona-Milano, 1858; 8.°

Programma di concorso al premio proposto dall'Accademia d'Agricoltura. Commercio ed Arti di Verona. Verona, 1858; 4.°

ACC. IMP. DELLE SC. *di Vienna*

Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Classe. Band VIII. Wien, 1857; 1 vol. 4.° fig.

Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Band XIII. Wien, 1857; 1 vol. 4.° fig.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Philosophisch-historische Classe; Jahrgang 1857. Band XXIII, n. 1-5: XXIV, n. 1, 2; XXV, n. 1-5. Wien, 1857; 8.°

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Jahrg. 1857-1858. Band XXIII, n. 1-2; XXIV, n. 1-4; XXV, n. 1-2; XXVI; XXVII, n. 1; XXVIII, n. 1-5. Wien, 1857-1858; 8.°

Notizenblatt. Beilage zum Archiv für Kunde österreichischer Geschichts-Quellen; herausgegeben von der historischen Commission der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Band VII. Jahrgang 1857. Wien, 1857; 1 vol. 8.°

Fontes rerum Austriacarum. Oesterreichische Geschichts-Quellen; herausgegeben von der historischen Commission der K. Akademie der Wissenschaften in Wien. *Diplomataria et Acta*, Band. XIV, XV. Wien, 1857; 2 vol. 8.°

Archiv für Kunde österreichischer Geschichts-Quellen; herausgegeben von der zur Pflege vaterländischer Geschichte aufgestellten Commission der

Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Band XVIII. Wien, 1857; 1 vol. 8.°

Monumenta Habsburgica. Sammlung von Actenstücken und Briefen zur Geschichte des Hauses Habsburg in dem Zeitraume von 1473 bis 1576; herausgegeben von der histor. Commission der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Erste Abtheilung: Das Zeitalter Maximilian's I. Band III. Wien, 1858; 1 vol. 8.°

Almanach der K. Akademie der Wissenschaften. Vol. VIII, 1858. Wien. 1858; 8.°

Die Principien der heutigen Physik; bei der Feier der Uebernahme des Ehemaligen Universitäts-Gebaudes von der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, am 29 october 1857, vorgetragen von dem wirkl. Mitgliede derselben D.r Andreas Ritter v. Ettingshausen. Wien; 8.° gr.

Festrede bei der Feierlichen Uebernahme des Ehemaligen Universitätsgebäudes durch die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften; gehalten am 29 october 1857, von Vice-Präsidenten derselben D.r Theodor Georg von Karajan. Wien, 8 gr.

Jahrbuch der Kaiserlich-Königlichen Geologischen Reichsanstalt. Band VIII, n. 2-4; IX, n. 1-2. Wien, 1857-58; 5 vol. 4.° fig. — I. R. Istituto Geologico *di Vienna.*

Mittheilungen der Kaiserlich-Königlichen Geographischen Gesellschaft; redigirt von Franz Foetterle. I. Jahrg., Heft 2; II. Jahrg. Heft. 1-3. Wien, 1857-1858; 8.° gr. fig. — I. R. Soc. Geograf. *di Vienna*

Reports of Explorations and Surveys to ascertain the most practicable and economical route for a railroad from the Mississippi river to the Pacific Ocean; made under the direction of the Secretary of War in 1853-6; vol. II-VIII. Washington, 1855-57; 7 vol. 4.° fig. — Governo Americano degli Stati Uniti (*Washington*).

Statistical Report on the sickness and mortality in the Army of the United States, compiled from the records of the Surgeon general's and Adjutant General's offices; embracing a period of twenty years, from January 1819 to January 1839; prepared under the direction of Thomas Lawson. Washington, 1840; 1 vol. 8.°

Statistical report on the sickness and mortality in the Army of the United States, compiled from the records of the Surgeon general's office; embracing a period of sixteen years, from January 1839 to January 1855; prepared under the direction of Thomas Lawson, by Richard H. Coolidge. Washington, 1856; 1 vol. 4.°

Meteorological Register for the years 1826-1830, from observations made

by the Surgeons of the Army and others at the military posts of the United States; prepared under the direction of Thomas Lawson. Philadelphia, 1840; 8.°

Meteorological Register for twelve years, from 1831 to 1842, inclusive: compiled from observations made by the officers of the medical department of the Army at the military posts of the United States. Washington, 1851; 8.°

Army Meteorological Register for twelve years, from 1843 to 1854, inclusive; compiled from observations made by the officers of the medical department of the Army, at the military posts of the United States; prepared under the direction of Thomas Lawson. Washington, 1855; 1 vol. 4.°

Report of the Superintendent of the Coast Survey, showing the progress of the Survey during the year 1856. Washington, 1856; 1 vol. 4.°

Report of the Commissioner of Patents, for the years 1855-1856. Arts and Manufactures. Vol. I-V. Washington, 1856-57; 5 vol. 8.° fig.

Report of the Commissioner of Patents, for the years 1855-1856. Agriculture. Washington, 1856-1857; 2 vol. 8.°

IST. SMITHSONIANO *di Washington*

Annual report of the board of regents of the Smithsonian Institution, showing the operations, expenditures, and condition of the Institution, for the year 1856, and the proceedings of the board up to January 28, 1857. Washington, 1857; 1 vol. 8.°

Catalogue of the described Diptera of North America, prepared for the Smithsonian Institution by R. Osten Sacken. Washington, 1858; 8.°

Eleventh annual report of the Board of Agriculture of the State of Ohio to the Governor, for the year 1856. Columbus, 1857; 1 vol. 8.°

SOCIETA' ELVETICA DELLE SCIENZE NAT. (*Zurigo*)

Nouveaux Mémoires de la Société helvétique des Sciences naturelles: vol. XV, XVI. Zurich, 1857-1858; 2 vol. 4.° fig.

Verhandlungen der schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft bei ihrer Versamml. zu Basel (1856) und zu Trogen (1857); 2 vol. 8.°

SCIENZE

FISICHE E MATEMATICHE

NOTIZIA STORICA

dei lavori fatti dalla Classe di Scienze Fisiche e Matematiche della Reale Accademia delle Scienze nell'anno 1858

scritta dal Professore

EUGENIO SISMONDA

SEGRETARIO PERPETUO DI ESSA CLASSE

Letta nell'adunanza del giorno 6 febbraio 1859

5 gennaio.

Nel dare, giusta il consueto, comunicazione del carteggio, il Segretario Aggiunto legge una lettera del sig. Dottore Maurizio Naumann, Professore di Medicina nella Regia Università di Bonn (Prussia Renana), nella quale esso sig. Naumann, mentre offre in dono all'Accademia una sua Opera contenente studii clinici intorno particolarmente alla pneumonia ed alla tisi polmonare, accenna ad alcune sue considerazioni tendenti a dimostrare che la nutrizione dei differenti tessuti dell'organismo animale si compie esclusivamente per l'influenza materiale o sostanziale della polpa nervosa, che trovasi disciolta (alle estremità periferiche delle fibrille nervose) nell'umidità interstiziale, di cui tutti i tessuti sono bagnati.

« Le *plasma*, dice il Dott. Naumann, transudé des vaisseaux capillaires se trouve dans ce fluide aussi bien représenté que la matière, qui a cessé de faire partie intégrante des différents tissus, et laquelle y figure sous la forme de la fibrine (qui n'est aucunement destinée à servir la nutrition). La pulpe nerveuse dissoute, en se combinant à la matière albumineuse du *plasma*, donne à cette dernière les qualités nécessaires pour devenir partie intégrante des tissus, jusqu'au terme où la substance nerveuse, à laquelle elle doit son organisation, perd ses qualités organisatrices, faute de sa séparation des fibrilles nerveuses.

Les conséquences principales de cette théorie sont les suivantes: la matière nerveuse ne se prépare que dans les différents centres nerveux

(dans les cellules de ce système). Toutes les fibrilles nerveuses ne sont que les voies, par lesquelles la substance nerveuse croît et se propage lentement, en partant des différents centres vers la périphérie. Arrivée à la dernière extrémité de ces fibrilles, la matière nerveuse se dissout dans le fluide interstitiel ou intercellulaire. Selon la richesse plus ou moins grande des fibrilles nerveuses, dont les différents tissus sont pourvus, ceux-ci acquièrent des qualités histologiques plus ou moins élevées.

J'ai essayé, dans ce Volume, par la description de la pneumonie et de la phthisie pulmonaire (d'après les observations puisées dans la Clinique médicale, dont j'ai l'honneur d'être le chef), de quelle valeur cette théorie deviendra, tant pour la pathologie, que pour la thérapeutique.»

Il Prof. De Filippi, condeputato col Prof. Sismonda (Eugenio), fa quindi relazione sul merito di una Memoria rassegnata all'Accademia dai signori Prof. Emilio Cornalia, di Milano, Membro effettivo dell'I. e R. Istituto Lombardo, e Dott. Paolo Panceri, Assistente alla cattedra di Storia naturale dell'Università di Pavia, Memoria avente per titolo: *Osservazioni zoologico-anatomiche sopra un nuovo genere di Crostacei Isopodi sedentarii proprio delle Lagune Venete e del Golfo di Genova.*

Questo lavoro incomincia, dice la Giunta Accademica, per un sunto storico della famiglia dei *Bopiridi*, alla quale spetta il nuovo genere di cui si tratta; viene in seguito la storia particolare della *Gebia venetiana* sulle cui branchie vive parassito il nuovo Crostaceo, detto perciò *Gyge branchialis;* poscia la trattazione di questa specie che è il principale soggetto del lavoro, cioè la descrizione della femmina considerata nei più minuti particolari dell'interna struttura, e quindi del maschio, che dalla femmina differisce grandemente per forma, organizzazione e dimensioni. L'ultimo capitolo è destinato alla storia evolutiva della *Gyge branchialis*. Questa Memoria, accompagnata da due bellissime tavole, è ricca di osservazioni nuove, accuratissime, intraprese ed esposte con mirabile ordine, e costituisce una Monografia compiuta ed originale di uno de' tipi più interessanti e sconosciuti della grande classe de' Crostacei.

Dopo ciò il Segretario Aggiunto legge una Memoria del Socio nazionale non residente, il Cav. Giuseppe De Notaris, Memoria col titolo: *Appunti per un nuovo censimento delle Epatiche italiane.*

(È stampata in questo Volume a pag. 457).

Da ultimo il Presidente Barone Plana fa la seguente comunicazione:

« Da più anni (quattro) il Sole non presentava veruna macchia sul suo disco: ma da tre giorni ne ho veduto *tre*, che sono in totale più vaste dell'Europa. Le ho vedute quasi sull'estremo bordo orientale del Sole, che è per noi il luogo della loro prima apparizione. Da una misura presa, la massima è di circa 4 minuti superiore al centro del Sole. Ne seguirò il progressivo corso, il quale offrirà una nuova prova della rotazione del globo solare in giorni 25 ed alcune ore. Può avvenire che cessino le cause della loro apparizione prima che sia compiuta la metà di questa rotazione. Intanto è spettacolo imponente questo di contemplare *squarciata* la fotosfera del Sole, ed una piccola porzione dell'opaco suo globo: la somma irregolarità dei contorni di queste tre macchie avvalora la spiegazione che si dà del loro nascere e del modo con cui il fenomeno si palesa agli abitanti della Terra. »

24 gennaio.

A nome del Pittore Cav. Camillo Pucci il Segretario Aggiunto presenta alla Classe un ritratto di Galileo Galilei, leggendo ad un tempo una lettera dello stesso Cav. Pucci, nella quale esso offre in dono all'Accademia il nominato ritratto, e lo dice uno di quelli fatti dal Pittore fiammingo Subtermann.

La Classe gradisce questo bellissimo dipinto sia per un sentimento di riverenza verso il grande Filosofo, sia perchè tra i varii ritratti di Galileo quello del Subtermann è stimato il migliore, e vota ringraziamenti verso il Cav. Pucci, che ne ha generosamente fatto spontaneo dono all'Accademia.

Il Cav. Sobrero, condeputato col Cav. Cantu' e col Cav. Sella, fa quindi relazione sul merito di una Memoria manoscritta rassegnata all'Accademia dall'Ingegnere sig. Celestino Rossi, Maggiore in ritiro del Real Corpo del Genio militare, Memoria intitolata: *Fabrication du fer par la chaleur perdue et les élémens combustibles des fours à Pudler à la houille; four à réchauffer, à la suite de deux fours à Pudler, et chaudière sur four.*

7 febbraio.

Quest'adunanza è riempita dalla lettura di una Memoria manoscritta presentata all'Accademia dall'Avv. Bartolomeo Gastaldi, Segretario Capo d'Ufficio all'Instituto tecnico, Memoria intitolata *Cenni sui vertebrati fossili del Piemonte*, ed intorno alla quale, da apposita Commissione Accademica, già era stato fatto favorevole rapporto.

(È stampata nel Vol. XIX, pag. 19).

21 febbraio.

L'Accademico Cav. Sella legge la prima parte di un suo lavoro col titolo: *Studi sulla Mineralogia Sarda.*

Quindi il Presidente, Barone Plana, fa la seguente comunicazione:

« Domani, 22, alle ore 8 pomeridiane la Luna sarà perigea, e sabato prossimo (27) accadrà l'eclisse *parziale* del suo disco totalmente illuminato, in guisa che la sola *terza* parte sarà immersa nel cono d'ombra progettato dal Sole dietro il globo della Terra, al momento che divide il principio dalla fine del fenomeno. Nè può essere altrimenti, essendo in quell'istante di 42′ la latitudine boreale del centro della Luna, mentre è norma sicura, che fra 30′ e 64′ l'eclisse non può essere che parziale. Il principio accadrà la sera alle ore 9 e 40 minuti, il mezzo a 10 ore e 42 minuti, ed il fine a 11 ore e 44 minuti di tempo medio. Per un orologio regolato sul tempo vero converrà levare 13 minuti da questi istanti. Dessi sono calcolati astrazione fatta della penombra; l'effetto della quale è di anticipare il principio e ritardare il fine per una gradazione d'ombra prima crescente e poi decrescente. L'istessa ombra geometrica vuol essere calcolata accrescendo di circa una cinquantesima parte il diametro del corpo opaco della Luna, per tener conto dell'influenza che ha l'atmosfera della Terra in questi fenomeni.

Per essere l'eclisse parziale, non è da credere che questa influenza possa in questo caso palesarsi con quel color rossastro che d'ordinario si vede negli eclissi totali, ed anzi con una vivacità maggiore, se la Luna è nel suo apogeo. I casi di compiuta oscurità negli eclissi totali sono rari, ed Hevelius narra qual fosse la sua sorpresa nell'eclisse del 25 aprile 1642 quando la Luna cessò affatto di essere a lui visibile.

Ogni ulteriore spiegazione del fenomeno sarebbe fuori di proposito; questo cenno, diretto semplicemente a tenere svegliata la curiosità dei dilettanti d'Astronomia, basta al suo scopo. »

7 marzo.

Il Colonnello Cav. Menabrea fa lettura di un suo lavoro distinto col titolo di *Note sur l'effet du choc de l'eau dans les conduites.*

(Sarà stampata in uno dei prossimi Volumi).

In seguito il Presidente Barone Plana legge: *Mémoire sur la célèbre expérience de* Newton *contre la possibilité de l'achromatisme par la réfraction de la lumière à travers deux substances différentes.*

(È stampata nel Vol. XIX, pag. 1).

21 marzo.

Lo stesso Barone Plana comunica ancora una Nota contenente l'*Indicazione delle principali circostanze dell'eclisse di Sole del dì* 15 *marzo* 1858, la quale è del tenore seguente:

« Innanzi tutto convien premettere, che quest'eclisse, visibile da Torino, sarà *parziale*, e che oscurerà soltanto i *due terzi* della parte *boreale* del disco solare.

Il principio avverrà a

$$0^h.\,20'$$ di tempo medio;

cioè 11′ dopo l'istante di mezzodì vero;

la massima fase ad

$$1^h.\,42';$$

ed il fine a

$$2^h.\,54'.$$

Chi volesse osservarne il principio, non ad occhio nudo, ma con un canocchiale ordinario che non rovescia gli oggetti, munito di vetro nero, dovrà aver presente alla sua mente, che la prima intaccatura del disco solare si manifesta dalla parte *occidentale* del suo lembo ad una distanza di circa 120 gradi, numerati dal vertice *boreale* del diametro verticale del Sole, cioè fissar l'occhio sul lembo al disotto del diametro orizzontale di circa 30 gradi.

È questo un rilevante avvertimento per coloro che mirassero a non lasciar sfuggire, per distrazione, un cotanto caratteristico istante del fenomeno. A questa primissima fase succederà, per gradi crescenti, l'oscurazione della parte boreale del Sole per arrivare al suo massimo termine ad $1^h.42'$, quando è minima l'apparente distanza dei due centri del Sole e della Luna, a segno di non oltrepassare la *decima* parte del diametro del Sole. Appena dopo incomincia lo scoprimento della parte oscurata, e per gradi crescenti giunge a $3^h.4'$ al compiuto distacco dei due dischi sulla parte *orientale* del lembo del Sole, ad una distanza di circa 24 gradi dal vertice del diametro verticale del Sole, poc'anzi già definito. Il Sole riprende da quel momento il suo compiuto splendore, e la Luna (che non si vede affatto) si solleva sul piano dell'orbita della Terra per giungere al perigeo quattro giorni dopo, cioè il dì 19 alle ore 5 pomeridiane.

Chi fosse pienamente informato della recente costituzione fisica del Sole, e del triplice atmosfera che circonda il suo globo opaco, potrà, sebbene sia un eclisse parziale, e poco favorevole per decidere la nota questione: « Si les nuages de la troisième enveloppe solaire ne deviennent « visibles qu'au moment des éclipses totales? » potrà, ripeto, tentare l'osservazione senza vetri neri, ma bensì con un liquido che si ottiene mediante la filtrazione dell'inchiostro diluito nell'acqua a traverso la carta. Forse nascerà da consimili esperimenti qualche maggior lume, che, giusta le previsioni di Arago, farà sperare di avanzare per più di un secolo la soluzione di questo problema della fisica Astronomia.

Il fin qui detto appartiene al fenomeno veduto da Torino. Ma, considerato sulla totale superficie della Terra, offre una durata di $5^h.7'$, incominciando alcuni minuti prima delle ore *dieci* del mattino nell'America meridionale sulle sponde del fiume delle Amazzoni, per aver fine nella parte centrale della Russia, a poca distanza dal parallelo di Mosca, là dove è intersecato da un meridiano più orientale di circa *dieci* gradi di quello che lambe la parte orientale del mar Caspio.

Per buona sorte l'ombra fugace, gettata sulla superficie della Terra dall'interposto globo lunare, attraverserà pure una regione della coltissima Europa, quella delle Isole Britanniche, e vi presenterà il doppio fenomeno di un eclisse *centrale* ed *anulare*. In *Oxford*, *Buckingham* e *Cambridge* si avrà lo spettacolo dell'*anello illuminato*, che contermina la parte oscurata del Sole, e finisce sul di lui lembo istesso, per *undici secondi* di tempo.

Non ostante la brevità di questo fenomeno, se le circostanze atmosferiche non ne vietano, nè perturbano l'osservazione, saranno raccolti alcuni preziosi numeri, coi quali « *ad majora sternitur* ».

È questa una di quelle rarissime occasioni in cui l'eclisse di Sole può essere totale in un luogo ed annulare in un altro, stante la prossima eguaglianza dei due diametri apparenti [32′. 13″ quello del Sole, e 31′. 49″ quello della Luna]. In guisa che la Luna non si trova alla medesima distanza da tutti i punti della Terra; e le differenze di queste distanze sono in un rapporto *sensibile* colle assolute.

Gli eclissi totali, siccome quello da noi veduto l'anno 1842 (8 luglio), sono assai rari, non solo in un dato luogo, ma anche sul globo intiero della Terra. Infatti, nel rimanente di questo secolo, non ve ne saranno più di sei, i quali accadranno negli anni: 1860, 18 Luglio; 1861, 31 Dicembre; 1870, 22 Dicembre; 1887, 19 Agosto; 1896, 9 Agosto; 1900, 28 Maggio; e niuno di questi sarà visibile nè in Italia, nè in Francia.

L'eclisse di queste *Idi di Marzo* rammenta quello, che lo spirito di adulazione di alcuni antichi scrittori ha registrato essere avvenuto appena dopo la morte di Giulio Cesare. Aurelio Vittore, che viveva nel quarto secolo dell'Era, lasciò scritto: « *Caii Julii Caesaris occisi cadavere* « *pro rostris posito, Sol orbem suum celasse dicitur.* » Ma il fatto (così narrato) non è vero, siccome lo dimostra un calcolo sicuro. Forse, ad arte, quello scrittore ha voluto trar partito della circostanza di un eclisse annulare di Sole avvenuto l'anno 43 innanzi l'Era, oppure di quello avvenuto sei anni dopo la morte di Cesare, il dì 14 di Gennaio l'anno 38 innanzi l'Era.

Giova sperare che queste Idi di Marzo, sebbene precedute da un nefando attentato, non saranno susseguite da veruno di siffatti orrendi delitti, quali

« ....*fugiente per ortus*
« *Sole Thyesteae noctem duxere Micenae* ».

Chiude la tornata la lettura di una Memoria del Prof. Emilio Cornalia e del Dott. Paolo Panceri, Memoria già stata favorevolmente giudicata da apposita Giunta Accademica, ed avente per titolo: *Osservazioni zoologico-anatomiche sopra un nuovo genere di Crostacei Isopodi sedentarii, proprio delle Lagune Venete e del Golfo di Genova.*

(È stampata nel Vol. XIX, pag. 85).

11 aprile.

Il Segretario Aggiunto comunica una lettera del sig. Avvocato Bartolomeo Gastaldi, colla data Torino 10 aprile 1858, nella quale esso Avvocato Gastaldi informa l'Accademia di un dono fatto al R. Istituto tecnico dal sig. Marchese A. Pallavicini, proprietario della miniera di lignite di Cadibona, di varii fossili rinvenuti nella miniera medesima, quali sono un grosso tronco di pianta monocotiledonea, una bella impronta di Felce rappresentante la *Lastraea Fischeri* Heer (1), un'altra magnifica impronta vegetale alta $1^m,60$, e larga $0^m,70$, riferibile probabilmente, giusta il giudizio del Prof. Heer, di Zurigo, che ne vide una fotografia, al Palmizio denominato da Unger *Phoenicites salicifolia* (2), e l'estremità mascellare dell'*Anthracotherium magnum* Cuv. in cui scorgesi la serie pressochè intiera dei denti incisivi, canini e premolari; descrive quindi il sovranominato pezzo di *Anthracotherium* ed un altro già da lui posseduto, e che, unitamente al primo, fa conoscere l'intiera serie dei denti, di cui l'*Anthracotherium magnum* era provveduto sulla mascella. E dimostrata colla descrizione l'importanza degli accennati avanzi di *Anthracotherium*, l'Avvocato Gastaldi chiude la sua lettera pregando l'Accademia a permettergli di farli disegnare e di aggiungnere così una tavola di più alle dieci, che già corredano la sua Memoria col titolo: *Cenni sui Vertebrati fossili del Piemonte*, Memoria stata approvata dalla Classe per la stampa nei Volumi dell'Accademia.

Il Cav. Sella, condeputato col Cav. Sismonda (Angelo) e col Cav. Piria, fa relazione sul merito di una Memoria manoscritta, rassegnata all'Accademia per la stampa ne' suoi Volumi, dall'Ingegnere sig. Giorgio Montefiore-Levi *Sopra una nuova lega cristallizzata di Nichelio e Ferro.*

Premesso un cenno intorno alla teorica delle operazioni che si eseguiscono nelle fucine per la lavorazione dei metalli, ed intorno alle difficoltà di tali operazioni, per la grande influenza che hanno sulle proprietà

(1) Più tardi, nell'appendice alla sua *Flora tertiaria Helvetiae*, il Prof. Heer ha fatto passare questa specie nel genere *Aspidium*, e l'ha quindi denominata *Aspidium Fischeri*.

(2) Studi fatti posteriormente sull'originale hanno dimostrato che questo Palmizio è diverso dalla *Phoenicites salicifolia* di Unger, e che rappresenta una specie nuova, specie che dall'autore di questa Notizia venne denominata *Phoenicites Pallavicinii*, in ricordanza del nome del benemerito Marchese A. Pallavicini, proprietario della miniera di lignite di Cadibona, in cui essa fu scoperta.

utili di essi metalli le più leggiere differenze nel loro stato fisico, e le minime mescolanze di corpi estranei, la Giunta fa osservare che i metodi metallurgici attualmente seguiti, fatte poche eccezioni, sono ancor quelli descritti da Biringuccio e da Agricola. Le scorie, essa dice, lasciate dai Fenici e dagli Etruschi dimostrano che se i metallurgisti di quel tempo non ottenevano gli svariati prodotti che oggidì si ottengono, raggiungevano però, nel loro lavoro, un grado di perfezione non guari inferiore a quello, a cui si perviene nelle migliori fucine dell'età nostra. E, cosa paradossale, gli incontestabili progressi fatti dalla metallurgia da un secolo in qua, son dovuti più che alla chimica alla meccanica, poichè egli è in grazia dell'invenzione di poderosi magli, di robusti laminatoi, di forti soffierie, e di facili mezzi di trasportare su un sol punto minerali provenienti da diversissime sorgenti, che l'odierna metallurgia prese un sì grande sviluppo. Non tace però la Giunta, che da qualche tempo i Chimici esperti in cose metallurgiche hanno rivolto la loro attenzione ai prodotti, massime se cristallizzati, che ottengonsi nelle fucine, e ciò nell'intendimento non solo di giovare alla metallurgia, ma eziandio di meglio conoscere le proprietà dei corpi, studiando anche quelle combinazioni che si producono nei forni, vale a dire in condizioni diverse da quelle dei laboratorii di chimica. Fin dal 1809 Koch, poi nel 1820 Hausmann, e in questi ultimi anni Mitscherlich, Rammelsberg, Miller e molti altri presero a studiare le scorie cristallizzate, e mercè siffatti studi già è nota una lunga serie di combinazioni cristallizzate, che si producono nei forni.

Questa serie, dice la Giunta, viene ora aumentata di una bellissima lega di Nichelio e Ferro, scoperta dall'Ingegnere sig. Giorgio Montefiore-Levi nella metallina ricavata dalla trattazione delle Pirrotine nichelifere della miniera esistente nella montagna detta il *Becco d'Ovaga* nei Comuni di Locarno e Parone presso Varallo.

Già fu descritta una lega di Nichelio e Rame della formola Cu^6Ni, cristallizzata in ottaedri, ma la lega del Nichelio col Ferro è un fatto nuovo. Quindi la Commissione Accademica considerando:

Che è sempre assai interessante per la chimica l'acquisto di una nuova combinazione cristallizzata;

Che una nuova lega malleabile può avere importanti applicazioni nell'industria;

Che la lega di Nichelio e Ferro scoperta dal sig. Montefiore-Levi

può dare qualche lume sulle proprietà del Nichelio, chiarire il trattamento delle Pirrotine, e favorire il miglioramento della metallurgia del Nichelio;

Che finalmente l'Accademia dee, con ogni incoraggiamento in suo potere, animare i valenti Ingegneri che dirigono le nostre fucine e miniere a raccogliere accuratamente ed a comunicarle tutte quelle osservazioni, che possono tornar vantaggiose alla scienza ed all'industria, conchiude proponendo la lettura alla Classe della Memoria del sig. Montefiore-Levi, e la stampa della medesima in uno dei Volumi dell'Accademia.

Dopo ciò l'Accademico Cav. Raffaele Piria legge: *Analisi della Datolite di Baveno.*

(Sarà stampata in uno dei prossimi Volumi).

Il Cav. Sella, tolta occasione dalla citata lettura fatta dal Socio Piria, comunica una lettera scrittagli dal Barone sig. Guglielmo Haidinger, Presidente dell'Istituto geologico di Vienna, nella quale contiensi la storia di due pezzi di Datolite di Baveno, esistenti nell'I. R. Museo mineralogico di Vienna, e che il Dott. Kenngott descrisse qual minerale nuovo.

Pel naturale rapporto che scorge tra le cose dette dallo Haidinger e lo scritto sulla Datolite letto dal Cav. Piria, la Classe invita questo a stampare l'accennata lettera in seguito al proprio lavoro.

Finalmente leggesi la Memoria dell'Ingegnere sig. Giorgio Montefiore-Levi *Sopra una nuova lega cristallizzata di Nichelio e Ferro*, intorno alla quale, in principio dell'adunanza, era stato fatto favorevole rapporto.

(È stampata nel Vol. XIX, pag. 119).

2 maggio.

Il Cav. Cavalli espone verbalmente alla Classe alcuni suoi pensieri intorno ai principii che debbono regolare *il passo nei cannoni ad elica.*

Egli accenna anzi tutto i vantaggi dei proietti di forma allungata su quelli sferici; tocca quindi delle cause perturbatrici del moto dei proietti, e della grande differenza che passa tra il tiro considerato nelle teorie balistiche e'l tiro pratico; soggiugne che questa differenza diminuisce diminuendo il vento, ma che ad ogni modo il miglior mezzo per neutralizzarla sta nell'imprimere al proietto, insieme colla velocità iniziale di

translazione, anche quella di rotazione attorno al suo asse, contenuto nella traiettoria o prossimo alla medesima; fa osservare che per imprimere questo doppio movimento iniziale al proietto conviene che l'impulsione data dall'esplosione della carica di polvere si decomponga, ed una parte di essa determini la rotazione; fa osservare che la resistenza del metallo del cannone e del proietto dee essere tale da non lasciarsi alterare dalla impulsione del tiro; biasima l'impiego, nei proietti e nei cannoni, di metalli cedevoli, e loda i proietti in ferraccio ed i cannoni in acciaio; stabilisce che l'inclinazione dell'elica determina la decomposizione della impulsione del tiro, per cui una parte proporzionale alla tangente dell'inclinazione dell'elica stessa va impiegata a produrre il movimento di rotazione, e che quindi, per scemare il meno possibile la velocità iniziale, conviene restrignere la velocità di rotazione alla parte appena sufficiente per neutralizzare le cause perturbatrici; egli tratta quindi specialmente del passo a darsi all'elica, ed in proposito condanna la norma recentemente proposta, che debbano cioè i passi delle eliche essere in ragione quadrata dei calibri, e posto che il momento d'inerzia d'un corpo cilindrico che gira intorno al suo asse è proporzionale alla quarta potenza del suo diametro, egli stabilisce che la forza viva di rotazione dei proietti intorno al loro asse, capace di neutralizzare le cause di perturbazione del moto loro, può essere egualmente proporzionale alla quarta potenza dei loro diametri, oppure dei calibri. Da questa base, conchiude il Cav. Cavalli, si tira una formola semplice, che lega tutti i dati del problema, cioè il passo dell'elica, la velocità iniziale, le dimensioni del proietto, il suo momento d'inerzia attorno al proprio asse di rotazione e la sua densità.

Finita questa comunicazione, il Cav. Menabrea espone in proposito alcune sue considerazioni, e, senza combattere la formola del Cavaliere Cavalli, fa però osservare che essa non può essere accettata che come empirica, finchè non è appoggiata alla teorica o comprovata dall'esperienza.

Il Comm. Giulio mostrasi dell'istessa opinione del Cav. Menabrea, e soggiugne inoltre che, stante il grande divario che passa tra un cannone ed una carabina, la formola resta compresa entro limiti sì grandi da essere bensì sempre applicabile, ma priva perciò di precisione matematica.

Lo stesso Cav. Cavalli incomincia poscia la lettura di una sua *Memoria sul delineamento equilibrato degli archi in muratura e in armatura.*

Da ultimo il Presidente Barone Plana legge la seguente

Note sur la théorie de la lumière polarisée.

.....Nubem pellente mathesi.

Une onde réfléchie à la surface de séparation de deux fluides élastiques superposés, qui a été excitée dans le premier des deux fluides, pour lequel on suppose la vitesse de propagation plus grande que celle qui a eu lieu dans le fluide inférieur, présente les propriétés caractéristiques suivantes: 1.° L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence; 2.° La vitesse de propagation est égale à celle de l'onde directe; 3.° La vitesse propre des molécules vibrantes a deux composantes, une dans la direction même du rayon réfléchi, et une autre dans la direction perpendiculaire au même rayon. Ces deux composantes sont l'une et l'autre fraction de l'angle d'incidence En général, la première est beaucoup plus grande que la seconde; celle-ci étant décroissante comme le carré de la distance tandis que la première décroît en raison inverse de la simple distance. Mais, si l'on substitue dans la composante dirigée suivant le rayon réfléchi, au lieu du rapport des vitesses de propagation celui des sinus des angles d'incidence et de réflexion, il arrivera que la tangente de l'angle de la polarisation la rend tout-à-fait nulle. Ainsi à cette incidence la seule composante normale au rayon est celle qui reste, la première en général plus grande, étant réduite à zéro pour cette incidence particulière.

La théorie ondulatrice des fluides élastiques explique de cette manière en quoi consiste l'acte de la polarisation, et vérifie l'hypothèse de Fresnel, que, dans un rayon polarisé, les vibrations sont *transversales*. D'après cela, le phénomène de la *non interférence* entre deux rayons polarisés à angle droit, serait expliqué par les principes de la mécanique rationnelle, et serait expliqué en considérant l'*Ether* comme masse élastique vibrante et non comme une propriété inhérente aux molécules isolées de l'Ether. Je persiste à croire que la théorie de la lumière doit être attachée à celle des fluides élastiques, et que les propriétés du mouvement vibratoire d'un point soumis à une force accélératrice dont l'énergie est en raison directe de la distance à son point d'équilibre, peuvent suggérer des découvertes fort importantes, mais demeurent insuffisantes pour pénétrer les propriétés intimes de la substance éthérée, qui remplit l'univers, dont le système solaire n'est qu'un cas particulier ».

16 maggio.

In quest'adunanza il Cav. Cavalli ripiglia e termina la lettura della sua *Memoria sul delineamento equilibrato degli archi in muratura, e in armatura.*

Questa lettura dà luogo ad una seria discussione tra l'Autore ed i Socii Cav. Menabrea e Comm. Giulio; la Classe però, considerando che agli Autori è lasciata tutta la risponsabilità dei loro lavori, approva la stampa della Memoria del Socio Cavalli nei Volumi Accademici.

(È stampata nel Tomo XIX, pag. 143).

6 giugno.

Il Segretario Aggiunto dà comunicazione di una lettera, in data Brusselle 12 maggio 1858, indiritta al Presidente dell'Accademia dal sig. Carlo Faider, ex-Ministro della Giustizia a Brusselle, il quale come Presidente di un Comitato formatosi per promuovere un Congresso all'oggetto di discutere intorno a quelle provvidenze che possono guarentire agli Autori la proprietà letteraria ed artistica, Congresso da tenersi in Brusselle sul finire del mese di settembre di quest'anno 1858, invita l'Accademia a volervi intervenire per deputazione di alcuno de' suoi Membri.

Ne legge quindi un'altra del sig. Ministro dell'Interno, in data 17 maggio 1858, colla quale esso sig. Ministro trasmette all'Accademia una copia del Programma per detto Congresso inviatogli dalla Legazione Sarda presso il Governo Belga, ed invita l'Accademia a far poi conoscere ad esso Ministro dell'Interno le deliberazioni che avrà preso in proposito.

Dopo ciò il Colonnello Cavalli legge un suo scritto col titolo: *Nota sulla esistenza del limite di stabilità in vece del limite di elasticità.*

(Sarà stampata in uno dei prossimi Volumi).

Quindi il Socio Cav. De Filippi, per modo di semplice comunicazione, legge una *Notizia biografica su Giovanni* Müller, morto in Berlino addì 28 aprile 1858.

La Classe, che si onorava di possederlo tra i suoi Membri corrispondenti, ode con piacere ricordata la luminosa carriera scientifica di un sì distinto Fisiologo.

Da ultimo il Cav. Berruti, condeputato col Cav. Botto, fa relazione sul merito di un *Apparecchio ideato dal sig. Cav.* Faa di Bruno, *destinato ad insegnare od agevolare ai ciechi la scrittura*, e sul quale apparecchio il sig Ministro dell'Interno, aderendo al desiderio dell'Autore, chiese il parere dell'Accademia.

Premesso un cenno storico sulle invenzioni di questa natura, e fatti considerare i vantaggi che dai medesimi traggono quelli sgraziati, che perdettero la vista, la Giunta fa particolarmente conoscere in che consista l'apparecchio ideato dal Cav. Faa di Bruno, ed in che differisca da quelli stati da altri inventati; quindi ne loda la semplicità di costruzione, la facilità di valersene e'l tenue prezzo, e lo dichiara, sotto tutti questi aspetti, preferibile agli apparecchi al medesimo fine proposti dal Barochini, dal Foucault, dal Coutaux e da altri; i quali apparecchi presentano tutti una costruzione complicata, vogliono tutti un lungo esercizio ed una speciale istruzione per poter essere adoperati, e vendonsi tutti ad un prezzo piuttosto elevato.

E tolta occasione dalla circostanza, la Giunta chiude la sua relazione lamentando che il nostro paese manchi tuttavia di un Istituto in cui i ciechi possano venir ricoverati ed educati nelle lettere e nelle arti, mentre non havvi quasi alcuna città d'Europa e d'America, in cui non esistano siffatti Istituti, dai quali escirono talvolta ingegni non mediocri tanto nelle arti, quanto nelle lettere.

21 novembre.

Il Segretario Aggiunto legge due lettere del sig. Marchese Anatolio di Caligny, di Versailles, nella prima delle quali, in data Versailles 10 ottobre 1858, egli parla di supposti esperimenti fatti eseguire dal Governo Sardo sopra una macchina idraulica di sua invenzione, e fa osservare che gli Ingegneri piemontesi non hanno ben compreso il modo d'agire del suo meccanismo, e ne lasciarono andar perduta una parte dell'effetto; nella seconda lettera poi, in data pure Versailles 10 novembre 1858, egli descrive alcuni fenomeni idraulici da lui recentemente osservati, e ritornando sui supposti esperimenti fatti eseguire dal Governo Sardo intorno alla sua macchina, allorchè da apposita Commissione tecnica fece esaminare i varii mezzi stati proposti pel perforamento delle Alpi, rinnova le querele che il suo sistema non sia stato ben giudicato, e prega l'Accademia a

voler registrare ne' suoi Archivi queste due lettere, le quali agli accennati esperimenti appunto si riferiscono.

Finita la comunicazione di queste due lettere, il Cav. Menabrea ed il Comm. Giulio fanno osservare alla Classe, che gli esperimenti cui accenna il sig. Marchese di Caligny sono affatto supposti, e che la Commissione, di cui esso parla, non fece alcun esame del suo sistema, e non portò sul medesimo alcun giudizio, avendo limitato i suoi studi a quei meccanismi, i quali erano stati dai signori Ingegneri Grandis, Grattoni e Sommeiller realmente proposti ed eseguiti al determinato scopo del perforamento delle Alpi, ricordando solo in tale occasione quanto già avevano tentato i signori Mauss e Colladon.

Soggiugne inoltre il Cav. Menabrea di avere, pochi giorni sono, rispondendo ad una lettera del sig. di Caligny, fatto sentire al medesimo che la sua macchina non fu punto oggetto di alcuno studio o sperimento per parte della Commissione Sarda, e di averlo informato delle cose, di cui questa si è allora occupata.

Frattanto perchè non vadano perdute le osservazioni aventi tratto alla scienza fatte dal Marchese di Caligny nelle sue lettere, la Classe delibera che sieno a suo tempo ricordate nella Notizia Storica, senza intendere con ciò di prendere parte alcuna alla questione di priorità d'invenzione, che egli pretende appartenergli.

In soddisfazione di tale deliberazione della Classe produconsi i seguenti brani tolti non solo dalle due lettere sovra accennate, ma anche da alcune altre posteriormente indirizzate al Segretario dell'Accademia dallo stesso sig. di Caligny.

Versailles, ce 10 Novembre 1858

« J'ai l'honneur de vous adresser, en vous priant de vouloir bien l'offrir à l'Académie Royale des Sciences de Turin, un de mes Mémoires imprimés qui, à ce qu'il paraît, ne vous sont pas tous parvenus. L'appareil décrit pag. 19 a, depuis la publication de ce Mémoire, été employé avec avantage pour faire des épuisements temporaires dans diverses localités, où il s'agissait d'élever l'eau à deux et trois mètres.

Quant aux phénomènes décrits, paragraphe IV, et surtout pag. 9, j'ai eu occasion de les observer d'une manière plus intéressante dans diverses circonstances. Je remarquerai d'abord le phénomène inverse.

Un jet d'eau alimentait en 1853 et 1854 le réservoir d'amont, servant

de prise d'eau à une machine hydraulique, sur laquelle je faisais des expériences. Ce jet présentait des mouvements alternatifs très-réguliers, mais dont les oscillations étaient si fortes, qu'il était impossible de connaître le niveau moyen de l'eau dans le réservoir où elle tombait en y versant sept cents litres par minute. Pour faire cesser cette intermittence, il a suffi de poser transversalement une planche au-dessus du jet. Ainsi la percussion de ce jet, a suffi pour faire cesser le phénomène d'intermittence qui, dans d'autres circonstances, avait été causé par la percussion contre des obstacles fixes.

Quant aux mouvements de clapotage provenant de la percussion d'un courant d'eau assez sensiblement parvenu à la permanence, j'ai eu occasion de l'observer dernièrement sur une grande échelle, pendant le remplissage du nouveau bassin de Cherbourg.

J'ai décrit dans une Note, publiée par le Compte rendu de la séance de l'Académie des Sciences de Paris du 27 septembre dernier, ce qui se passait pendant la première période de ce remplissage. Pendant la seconde, l'eau arrivait en beaucoup plus grande quantité par l'autre extrémité de la même paroi du bassin. A la suite d'une circonstance particulière la terre d'un batardeau graduellement démoli était enlevée par le courant qui pénétrait dans le bassin déjà rempli jusqu'à une certaine hauteur. J'étais placé précisément en face de l'espèce de cascade qui en résultait. Sans entrer dans les détails du phénomène, me bornant à ce qui a des rapports avec le Mémoire imprimé ci-joint, je dirai seulement ici qu'à partir de l'époque où le niveau dans le bassin a atteint celui de la nappe d'eau affluente, le liquide s'est mis à osciller contre la partie opposée à celle par laquelle arrivait cette nappe d'eau.

Je n'avais malheureusement aucun moyen de prendre des mesures précises, ne m'attendant pas d'ailleurs à voir le phénomène se présenter avec tant d'intensité. L'eau arrivait contre la paroi dont il s'agit, en formant des vagues d'une hauteur qui pouvait être d'environ un décimètre et qui empêchaient les corps flottants de venir la frapper. Les premières vagues réagissaient sur les suivantes, et le clapotage réagissait en définitive jusqu'à une distance notable dans le bassin.

J'avais prié un Ingénieur de la marine de faire quelques observations sur les phénomènes du mouvement de l'eau pendant ce remplissage. Elles n'étaient pas encore mises en ordre, quand j'ai quitté Cherbourg. Si je les reçois et qu'elles puissent intéresser votre savante Compagnie, je

m'empresserai de vous les adresser. Mais il m'a semblé qu'en attendant, il était utile de signaler cette espèce de clapotage résultant de la percussion de l'eau dans des circonstances qui, se présentant très-rarement, n'ont peut-être jamais été observées ».

Versailles, ce 24 Novembre 1858.

. . . . . .

« Je regrette de ne pas avoir expliqué à M.r Ménabréa la principale raison pour laquelle il serait utile qu'il m'envoyât un petit croquis de la disposition des soupapes. J'ai bien prescrit d'employer ma soupape de Cornwall, mais je crois qu'on n'a pas bien disposé celle dont parle le rapport imprimé, que M.r Ménabréa m'a indiqué.

Or, dans le cas où elle serait disposée comme je crois le comprendre, on pourrait, même sans rien changer à la machine, telle qu'elle est exécutée à Gênes, diminuer les résistances passives provenant d'un coude brusque, en employant le système de surfaces courbes concentriques, que j'ai présenté à l'Académie des Sciences de Paris le 20 août 1855, comme on peut le voir dans la description publiée par le Compte rendu. Je l'avais déjà présenté à la Société Philomatique le 28 juin 1841. L'emploi de ces surfaces courbes concentriques serait très-important pour le Gouvernement Sarde, s'il conservait la forme de l'appareil de mon invention tel qu'il l'a déjà construit, parcequ'il en résulterait qu'un même appareil pourrait débiter beaucoup plus d'eau, ce qui permettrait au moins *de diminuer le nombre des machines à construire.*

Ce point est plus important peut-être que celui qui avait été signalé dans ma lettre du 10 octobre, et montre combien il pourrait être utile qu'on ne me refusât point un croquis complet de l'appareil, en faisant d'ailleurs ce croquis aussi grossièrement qu'on le voudra. Mais, si cela causait un retard, je ne demanderai qu'un croquis du tuyau et des soupapes.

Quant à la manière de supprimer la petite machine à colonne d'eau extérieure, elle repose sur ce que, si un déclic est laché, au moyen d'un flotteur, par exemple, quand la colonne d'eau de trois mètres environ de haut doit sortir, celle-ci agissant sur un piston, soulève un contrepoids solide ou liquide dans un tuyau recourbé. Or un autre déclic, laché de la même manière quand la colonne d'eau, dont il s'agit, achève de descendre, permet au piston de remonter en vertu de ce contrepoids.

Quant à la manière d'utiliser l'oscillation descendante, au moyen de

laquelle j'ai prescrit de vider la seconde branche du siphon renversé, il suffit de disposer, au-dessus du piston, assez bas au-dessous du niveau du bief d'aval, une troisième branche de siphon renversé, à laquelle sera adaptée la soupape de sortie, si l'on veut conserver deux soupapes, quoiqu'on puisse n'en faire qu'une d'une espèce particulière, et même faire fonctionner deux pistons liquides au moyen d'une seule pièce mobile. Mais je me tiens en ce moment dans l'hypothèse où, satisfait du résultat obtenu, l'on voudrait seulement tirer tout le parti possible de la construction existante.

Je suis d'ailleurs persuadé qu'il sera en définitive plus simple de revenir, en la modifiant un peu, sur une idée que j'ai présentée à la Société Philomatique de Paris en 1844. On lit dans les extraits des procès-verbaux de cette Société, dont j'ai fait hommage à l'Académie des Sciences de Turin, année 1844, séances du 15 et 22 juin, pag. 52:

« Le 2 novembre 1850, j'ai communiqué à la Société Philomatique de Paris une Note publiée dans les extraits de ses procès-verbaux, même année, p. 70 à 73, dans laquelle je décris le principe nouveau de succion, objet de la note lithographiée, dont vous avez bien voulu, Monsieur, distribuer un certain nombre d'exemplaires, en 1856, aux Membres de l'Académie des Sciences de Turin, et qui est reproduite dans le Musée Belge, même année. C'est pour ce travail que j'ai reçu la médaille de première classe à l'exposition universelle de 1855. Il me permet de modifier toute la branche nouvelle de l'hydraulique, objet de mes recherches, sur laquelle j'ai publié beaucoup de Mémoires et un résumé avec figures, dont vous avez bien voulu m'accuser réception, et qui est du mois de mai 1850. Il a été imprimé, en 1850, dans le *Technologiste*.

En principe, plusieurs des dispositions décrites dans ce résumé sont des machines soufflantes, puisqu'elles ne peuvent même fonctionner sans souffler de l'air. Mais le phénomène, dont il s'agit, permettant de supprimer jusqu'à la percussion de l'eau sur la soupape de Cornwall, et ayant été essayé avec succès sur des tuyaux de plus de soixante centimètres de diamètre, sans aucun coup de bélier, et sans endommager ces gros tuyaux, faits seulement en zinc, d'environ deux millimètres d'épaisseur, j'ai été frappé de la grandeur des dimensions que l'on pourrait donner aux appareils à construire pour le percement des Alpes, *avec une seule pièce mobile*, sauf les soupapes à air.

Dans la Note du 2 novembre 1850, p. 73, on lit: « il n'est pas

» nécessaire que le tuyau vertical soit en entier mobile. On peut ne rendre » mobile qu'une soupape de Cornwall. Alors cet appareil peut être employé » à comprimer de l'air au moyen d'un piston liquide, soit pour une » machine soufflante, soit etc. . . . . ».

Sans entrer aujourd'hui dans aucune discussion de priorité, je rappellerai encore le Mémoire que j'ai présenté à l'Institut de France le 9 décembre 1844, et dont un extrait est imprimé dans les Comptes rendus T. XIX, p. 1267 à 1269. Le phénomène de succion, dont je viens de parler, n'était pas encore trouvé, de sorte que ce Mémoire a aujourd'hui un peu vieilli, mais il renferme les deux applications les plus essentielles, le piston liquide oscillant avec retour vers la prise d'eau, et le piston liquide oscillant sans retour sensible vers la prise d'eau. Il n'est pas même indispensable pour ce dernier système de disposer une soupape *alimentaire en amont de la soupape de décharge quand la colonne liquide est assez longue en amont pour faire alternativement fonction de soupape par son inertie.* La Note, dont il s'agit, suppose connue celle que j'ai publiée dans les extraits des procès-verbaux de la Société Philomatique de Paris, année 1840, p. 26 à 28, où se trouve la description d'un appareil que j'avais exécuté en 1834, et que j'avais présentée à l'Institut de France le 10 juillet 1837, dans un Mémoire couronné le 30 décembre 1849.

Je n'avais alors que peu de place dans les Comptes rendus de l'Institut de France. Ma Note de 1844 s'adressait à des personnes qui savaient que, lorsque je ne disais pas le contraire, mes appareils hydrauliques se vidaient par oscillation. Ainsi que le remarque le rapport favorable fait à l'Institut le 20 août 1848, pour ma colonne oscillante à double effet, quand les tubes verticaux de mes appareils se vident par oscillation, c'est en général *sans perdre d'autre force vive que celle qu'exigent les frottements, c'est-à-dire en ne faisant descendre que très-peu le centre de gravité de la colonne fluide qui doit sortir.*

Maintenant, comme il n'y a même plus de percussion d'eau sur la soupape de Cornwall, M.r le Général Poncelet, Membre de l'Académie des Sciences de Paris, m'a conseillé de donner à ces appareils le nom d'*Antibélier hydraulique*, en m'autorisant à dire à cette Académie qu'il m'avait donné ce conseil. C'est ce que j'ai fait en sa présence le 15 mars dernier ».

Versailles, ce 21 Décembre 1858

. . . . . .

« Dans ma lettre du 24 novembre, je n'ai peut-être pas assez expliqué que, dans le cas où l'on conserverait la disposition existante à Gênes, on pourrait utiliser, *sans ajouter aucune pièce mobile*, la colonne d'eau de trois mètres de haut environ, perdue dans l'état actuel des expériences faites à Gênes sans me consulter. Il suffirait d'ajouter au siphon renversé une troisième branche, comme je l'ai expliqué dans ma lettre du 24 novembre. Or, comme la colonne d'eau de trois mètres de haut aurait alors son centre de gravité à peu près au niveau de l'eau du bief d'aval, la demi-hauteur, soit un mètre et demi (et même un peu moins à cause des résistances passives), dont l'eau descendrait dans la seconde branche au-dessous du niveau du bief d'aval, ne serait pas assez forte pour faire beaucoup redescendre l'eau en comprimant la colonne d'air retenue à son sommet par la soupape d'introduction de l'air. Ainsi, *quand même* il y aurait un léger retard dans le jeu de la soupape *d'évacuation de l'eau*, il ne serait pas même nécessaire de disposer une troisième soupape pour profiter, au retour, de la colonne d'environ 24 mètres de haut, de ce que sa hauteur de pression serait augmentée d'environ un mètre et demi.

Si ce point n'est pas très-important, comme il ne complique en rien l'appareil, il est inutile de ne pas en profiter. Pourquoi faire une faute? Mon résumé avec figures, surtout chapitres I et II, explique les diverses combinaisons principales des colonnes liquides oscillantes qu'on peut transformer en machine à compression d'air. Je vous prie de vouloir bien attirer l'attention de l'Académie sur la combinaison dont je viens de parler, et faire remarquer que j'ai vraiment retourné la question de trop de manières pour qu'on puisse sérieusement me rien contester, si l'on veut y faire un peu d'attention ».

Versailles, ce 26 Décembre 1858.

. . . . . .

« Le lendemain du jour où j'ai eu l'honneur de vous écrire pour vous prier de voir si les Volumes égarés de la Société Philomatique ne seraient pas restés dans la Bibliothèque de Sa Majesté le Roi de Sardaigne, M.r Piatti, de Milan, a présenté à la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale à Paris sa brochure intitulée: *Confutazione della*

Risposta dell' Ing. Sommeiller *alle accuse mosse contro di lui ed i suoi socii ecc.*

Quant à M.r Piatti, il attache de l'importance à avoir dit de séparer la surface liquide, de l'air comprimé, par un diaphragme. Voici la copie de ce que j'ai dit à ce sujet dans mon Mémoire manuscrit *conservé et enregistré à l'Institut de France, le 9 décembre* 1844: « On ne peut » se dissimuler que l'air sera un peu mouillé par la colonne liquide, mais » on remédiera en grande partie à cet inconvénient au moyen d'un disque » flotteur alternativement soulevé par la colonne liquide et qui, à cause » de sa petite masse, pourra évidemment être disposé de manière à ne » pas offrir d'inconvénients sérieux ».

Lo stesso Segretario Aggiunto comunica ancora una lettera del Chimico sig. Carlo Calloud, in data Chambéry 30 ottobre p. p., nella quale esso sig. Calloud ragguaglia l'Accademia intorno a studi da lui fatti sul *valerianato di Chinina*, e dai quali risulterebbe che alla lunga serie di sali organici fosforescenti per percussione o per confricazione va eziandio aggiunto il *valerianato di Chinina.*

La parte scientifica di questa lettera del sig. Calloud è così concepita:

« Il y a environ un mois que j'ai observé que le *valérianate de Quinine* devenait *lumineux au plus léger frottement*, en le broyant dans un vase de verre. Ce phénomène de phosphorescence apparaît d'une manière intense dans une complète obscurité et par un temps sec. On observe aussi ce fait en broyant le *valérianate de Quinine* dans un vase métallique avec un pilon de verre ou de tout autre corps isolant. En tout cas, par un temps sec et dans une pièce dont l'atmosphère est privée d'humidité, le phénomène lumineux est plus vif et plus beau.

Je suis persuadé que ce fait de lumière par le frottement du valérianate de Quinine sur des corps isolants est dû à une action électrique. Je n'ai pu encore apprécier la polarisation de l'électricité dans cette intéressante observation sur laquelle j'appelle, monsieur le Président, l'attention et les lumières de la savante Compagnie, que vous présidez. Je continuerai, de mon côté, mes expériences, dont j'ai déjà entretenu MM. Chamousset, Vallet, S.t-Martin etc., Professeurs distingués des écoles supérieures de Chambéry, qui veulent bien me prêter le concours de leur habileté éprouvée, et de leurs lumières.

Une foule d'autres sels organiques produisent de la lumière par le

choc ou le frottement; les expériences que j'ai tentées sur les autres sels de Quinine, ainsi que sur d'autres corps organiques, me confirment que c'est le valérianate de Quinine qui produit, en tout cas, les effets de phosphorescence avec le plus d'intensité.

En 1821, mon oncle, d'honorée mémoire, M.r Calloud Fabien, d'Annecy, avait découvert le fait de la phosphorescence du sulfure de Quinine, en chauffant ce sel. Le valérianate n'a pas la même propriété; il ne devient lumineux que par le frottement. »

Dopo ciò il Prof. De Filippi, Deputato col Prof. Sismonda (Eugenio), fa relazione sul merito di una Memoria manoscritta rassegnata all'Accademia, per la stampa ne' suoi Volumi, dal Prof. sig. Luigi Bellardi, Memoria intitolata: *Saggio di Ditterologia messicana.*

Questa Memoria forma la prima parte di un più esteso lavoro, che il Prof. Bellardi si propone di scrivere sui Ditteri del Messico, ordine d'insetti stato fin qui poco studiato e quasi trascurato dai Naturalisti. Le specie illustrate nella Memoria in discorso ascendono a 96, tra le quali 63 sono dall'Autore considerate come nuove.

La Giunta commenda l'ordine mantenuto dall'Autore nella esposizione dei caratteri delle singole specie e'l modo col quale vennero messi in evidenza i più importanti fra essi.

12 dicembre.

Il Presidente Barone Plana legge: *Mémoire sur les formules propres à déterminer la parallaxe annuelle des étoiles simples ou optiquement doubles*, ed a questa lettura lo stesso infatigabile Autore, il quale siccome scriveva, non ha guari, un suo ammiratore ed amico, quantunque abbia veduto la prima luce del giorno il dì 8 novembre 1781, conserva tuttora tale vigoria e di mente e di corpo, da potere, ad imitazione di Archimede e di Newton, passare le intiere giornate sepolto nel suo gabinetto, senza quasi accorgersi del giorno che fugge, lo stesso, dico, infatigabile Autore, di questa sua mirabile operosità porge in quest'adunanza una novella prova, comunicando ancora alla Classe un altro suo scritto col titolo: *Note sur le procès de* Galilée.

(Sono ambidue questi lavori stampati nel presente Volume, il primo a pag. 503 della parte Fisico-matematica, l'altro a pag. 173 della parte Morale, Storica e Filologica).

Osservazioni meteorologiche.

Per nulla omettere di quanto si riferisce ai lavori accademici, io aggiugnerò, a guisa di appendice, un *Sunto grafico* delle osservazioni meteorologiche state fatte alla specola dell'Accademia (1) durante il periodo di tempo, che questa *Notizia Storica* abbraccia, cioè durante il passato anno 1858. Esso venne compilato dal sig. Leone Albertazzi, Assistente alla scuola di geometria del R. Instituto tecnico, sulle Tavole mensili delle osservazioni meteorologiche fatte dal sig. Giuseppe Cantu' alla specola dell'Accademia tre volte al giorno, vale a dire alle ore nove di mattina, a mezzodì ed alle ore tre pomeridiane.

La somma diligenza posta dal sig. Albertazzi perchè questo lavoro riescisse uno specchio fedele delle Tavole numeriche, vuole ch'io gli renda qui le meritate lodi.

Questo sunto comprende solamente le osservazioni *barometriche*, *termometriche*, *igrometriche*, *ietometriche e atmidometriche*. A compimento della serie delle osservazioni meteorologiche che fannosi alla specola dell'Accademia, rimanevano ad introdursi anche le *anemoscopiche*, ma non avendo trovato tra i varii metodi finora proposti, per graficamente esporre i risultamenti di tale genere d'osservazioni, alcuna forma che a mio avviso ponga sott'occhio in modo esatto e chiaro e semplice ad un tempo quanto più importa di conoscere intorno all'economia dei venti, che è la *direzione*, la *velocità* e la *frequenza*, ho preferito di non presentare per essi alcuna curva, finchè non siasi ideato un qualche sistema che all'esattezza riunisca una maggiore semplicità e chiarezza; però al fine di non lasciare incompiuta affatto questa lacuna, sulle Tavole mensili delle osservazioni meteorologiche ho compilato un quadro numerico, da cui si può almeno scorgere in quale proporzione soffiarono i varii venti.

Intanto senza pretendere di entrare in ragionamenti teorici o di accennare a leggi, e nel solo intendimento di riassumere alcuni principali fatti resi evidenti dall'andamento delle curve, io stimo qui opportuno di chiamare l'attenzione della Classe sui dati seguenti:

---

(1) Questa specola, siccome già si è riferito nella Notizia Storica dei lavori del 1853, da osservazioni barometriche appositamente fatte a Torino e a Genova nel 1851, risultò essere elevata $284^{m},50$ al disopra del livello del mare.

Barometro.

Massima elevazione della colonna di mercurio verso la metà del mese di gennaio.

Minima elevazione in sul principio di marzo.

Fatte poche eccezioni, abbassamento della colonna dal mattino verso sera, sicchè l'osservazione fatta alle ore tre pomeridiane segna sempre una depressione maggiore che alle ore nove di mattino ed a mezzogiorno.

Abbassamento in sul principio e rialzo verso la metà di cadun mese, ad eccezione di gennaio, febbraio e novembre, nei quali mesi l'abbassamento notasi di preferenza verso la metà del mese.

Barometro e Igrometro.

Accordo tra barometro e igrometro, sicchè gli alzamenti e gli abbassamenti di quello corrispondono alla maggiore o minore umidità segnata da questo; solamente le variazioni del barometro non coincidono affatto con quelle dell'igrometro, ma le precedono quasi sempre di alcun poco.

Termometro.

Differenze o sbalzi di temperatura maggiori in estate che in inverno.

Igrometro e Atmidometro.

Umidità maggiore in inverno che in estate.

Evaporazione (pei pochi mesi almeno, cui le osservazioni si estendono) in senso inverso, cioè maggiore nella state che nell'inverno.

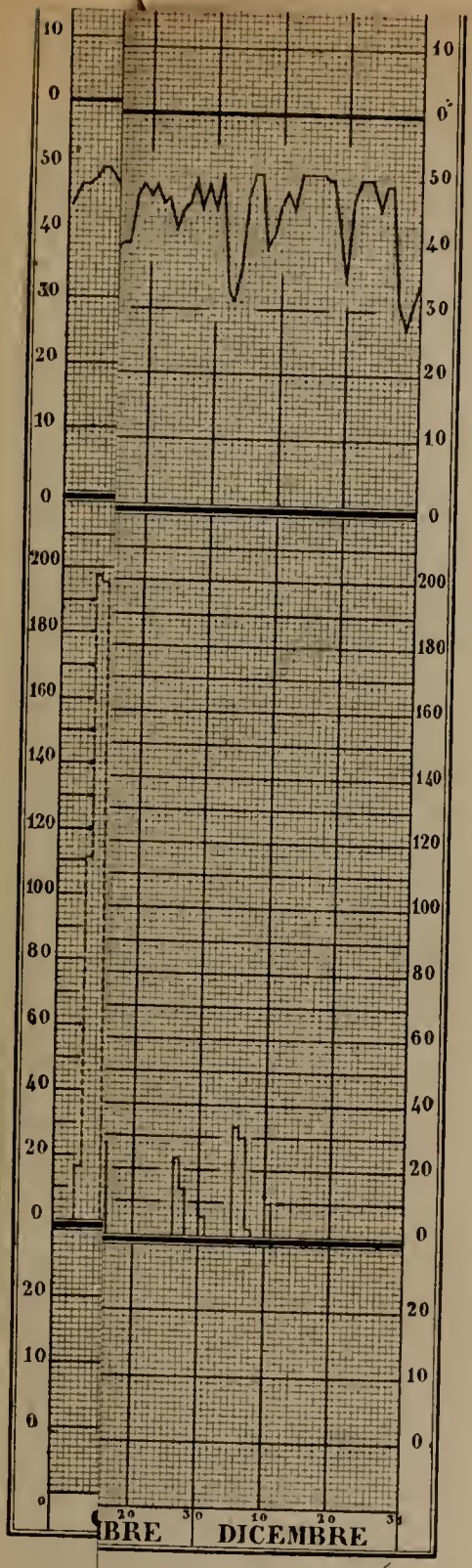
Costante decrescimento d'umidità da mattino a sera; alle ore tre pomeridiane atmosfera più secca che non a mezzodì ed alle ore nove mattutine.

Considerate poi un po' minutamente, queste curve *igrometriche e atmidometriche* non compaiono gran fatto d'accordo e mostransi anzi talvolta in opposizione, indicando, per esempio, maggiore evaporazione quando l'umidità è maggiore, ed inversamente minor evaporazione in giorni di maggior siccità.

Anemoscopio.

Non dalle curve, che non vennero, come già si è detto, tracciate, ma dalle osservazioni registrate nelle Tavole, si raccoglie che i venti soffiarono nella seguente proporzione:

ENE	$\frac{154}{1095}$	(più frequentemente nei mesi di luglio e di agosto).
OSO	$\frac{145}{1095}$	(più frequentemente nei mesi di gennaio, febbraio e dicembre).
O	$\frac{144}{1095}$	(più frequentemente in gennaio, febbraio e dicembre; in giugno punto).
E	$\frac{111}{1095}$	(più frequentemente in febbraio ed aprile).
ESE	$\frac{103}{1095}$	(più frequentemente in giugno e luglio).
NE	$\frac{86}{1095}$	(più frequentemente in maggio ed agosto)
ONO	$\frac{74}{1095}$	(più frequentemente in marzo, giugno, luglio, settembre, novembre e dicembre).
SO	$\frac{45}{1095}$	(più frequentemente in maggio ed agosto; punto in febbraio ed aprile).
SSO	$\frac{41}{1095}$	(più frequentemente in luglio ed agosto; punto in gennaio).
SE	$\frac{32}{1095}$	(più frequentemente in maggio e giugno; non in gennaio e febbraio).
NNO	$\frac{30}{1095}$	(più frequentemente in aprile ed agosto).
NO	$\frac{26}{1095}$	(più frequentemente in dicembre; punto in luglio).
SSE	$\frac{25}{1095}$	(più frequentemente in maggio e settembre; punto in gennaio e febbraio).
S	$\frac{18}{1095}$	(più frequentemente in maggio e giugno; punto in febbraio, marzo e luglio).
N	$\frac{15}{1095}$	(più frequentemente in novembre ed aprile; non in febbraio).


10
0
50
40
30
20
10
0
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
20
10
0
20
30
10
20
30
BRE
DICEMBRE

Accad. R.ª delle Sc. di Torino Class. di Sc. Fis. e Mat. Serie 2.ª Tomo XVIII.

SUNTO GRAFICO

DELLE OSSERVAZIONI METEOROLOGICHE FATTE NELL'ANNO 1858 ALLA SPECOLA DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

elevata Metri 284.50 sopra il livello del mare



Barometro di Fortin

Diametro 7.mm 28
Capillarità 0, 6 0
Differenza media dal Barometro dell'Osservatorio di Parigi + 0, 22

A *Osservazione alle ore 9 antimeridiane*
B *Id.m a mezzodì*
C *Id.m alle ore 3 pomeridiane*

Termometro di Fastre

D *Temperatura massima e minima*

Igrometro di Saussure

E *Osservazione alle ore 9 antimeridiane*
F *Id.m a mezzodì*
G *Id.m alle ore 3 pomeridiane*

Ietometro

H *Neve* } *espressa in millimetri*
——— *Acqua* } *di grandezza metà del vero*

Anidometro

I. *Evaporazione espressa in millimetri al vero*

Nei mesi freddi non si tenne conto dell'evaporazione

MÉMOIRE

SUR

L'ÉQUATION SÉCULAIRE

DU

MOYEN MOUVEMENT DE LA LUNE

PAR

JEAN PLANA

Lu dans la Séance du premier juin 1856.

Je me propose de démontrer dans ce Mémoire, que l'expression analytique du coefficient de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune que j'ai donnée à la page 485 du premier Volume de ma *Théorie du mouvement de la Lune*, doit être complétée par l'addition des termes suivans; savoir

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{1485}{128}m^4+\frac{4779}{64}m^5+\frac{178949}{512}m^6+\frac{81323}{64}m^7 \\ -e^2\left(\frac{2655}{64}m^3+\frac{199215}{512}m^4\right) \\ -\gamma^2\left(\frac{99}{128}m^3-\frac{3501}{512}m^4\right)+\frac{45}{64}m^2b^4 \end{array}\right\}\cdot\int dv\,(\varepsilon'^4-E'^4)$$

$$-\frac{103059}{2048}m^4\int dv\,(\varepsilon'^4-E'^4)\ :$$

de sorte que l'on aura

$$[k] \ldots\ldots\ldots \qquad \int \zeta\, dv =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{2}m^2 - \frac{351}{64}m^4 + \frac{81}{16}m^5 - \frac{268915}{256}m^6 + \frac{212575}{128}m^7 \\ + e^2\left(\frac{1461}{128}m^2 + \frac{85095}{512}m^3 + \frac{20809089}{1024}m^4\right) \\ + \gamma^2\left(\frac{525}{128}m^2 + \frac{687}{512}m^3 - \frac{48183}{1024}m^4\right) \\ + b^4\left(\frac{75}{32} - \frac{675}{32}m + \frac{98775}{512}m^2 + \frac{75}{8}e^2 - \frac{225}{64}\gamma^2\right) \\ - m^2\left(\frac{2709}{256}e^2\gamma^2 + \frac{2229}{256}\gamma^4 + \frac{8367}{128}e^4 + \frac{9}{4}m^2E'^2\right) \end{array}\right\} \int dv\,(\varepsilon'^2 - E'^2)$$

$$+ \left\{\frac{15}{8}m^2 + \frac{2203365}{2048}m^4 + \frac{25455}{1024}m^2e^2 + \frac{11919}{1024}m^2\gamma^2 + \frac{75}{16}b^4\right\} \int dv\,(\varepsilon'^4 - E'^4).$$

Ici, je fais abstraction des termes du 7.ième ordre multipliés par m^5e^2, $m^5\gamma^2$, m^3e^4, $m^3\gamma^4$, $m^3e^2\gamma^2$, $m^3E'^4$, m^3b^4, parceque leur totalité n'a pas été comprise dans les développements exécutés.

En réduisant ces quantités en nombres, et posant

$$\int \zeta\, dv = C\int dv\,(\varepsilon'^2 - E'^2) + C'\int dv\,(\varepsilon'^4 - E'^4)\ ,$$

l'on aura

$$C = 0,00839285\,(2) + 0,000221442\,(4)$$
$$+ 0,000215641\,(5) - 0,00000540228\,(6)$$
$$+ 0,00002176041\,(7) = 0,00884629\,1\ ;$$

$$C' = 0,01049106\,3\,(2) + 0,0346580\,1\,(4) = 0,0451490\,7\ ,$$

au lieu du résultat donné à la page 605 du même Volume.

Nous avons

$$\text{Log.}\,C = 7,9467613\ ; \qquad \text{Log.}\,C' = 8,6546481\ ;$$

$$\text{Log.}\,1264'',127 = 3,1017907\ ; \qquad \text{Log.}\,0'',6995 = 9,8447877\ ,$$

donc, en prenant

$$\frac{1+\mu_1^{IV}}{1047,871} \text{ pour la masse de } \textit{Jupiter};$$

$$\frac{1+\mu_1'}{401839} \text{ pour la masse de } \textit{Vénus};$$

$$\frac{1+\mu_1'''}{2680337} \text{ pour la masse de } \textit{Mars};$$

les équations posées dans les pages 596 et 597 donneront

$$C\int(\varepsilon'^2-E'^2)\,n\,dt=$$

$$-\left(\frac{t}{100}\right)^2\left\{\begin{matrix}11'',18182+0'',017086+0'',10611+0'',17497\\+1'',7028.\mu_1'-2'',1237.\mu_1'''+9'',488.\mu_1^{IV}\end{matrix}\right\}$$

$$-\left(\frac{t}{100}\right)^3 0'',018669\ ;$$

$$C'\int(\varepsilon'^4-E'^4)\,n\,dt=-\left(\frac{t}{100}\right)^2 C'.0'',6995=-\left(\frac{t}{100}\right)^2 0'',031582\ :$$

d'où l'on tire

$$(k')\ \ldots\ldots\ldots\ldots\qquad \int\zeta\,dv=$$

$$-\left(\frac{t}{100}\right)^2\left\{11'',51157+1'',7028.\mu_1'-2'',1237.\mu_1'''+9'',488.\mu_1^{IV}\right\}$$

$$-\left(\frac{t}{100}\right)^3 0'',018669\ (*).$$

En calculant les anciennes éclipses de Lune ou de Soleil, à l'aide de la formule (k'), on obtient un accord fort satisfaisant entre la théorie et l'observation. L'éclipse de Lune observée à Babylone le 19 mars de l'année 720 avant notre ère est représentée avec une différence moindre de deux minutes ($1'.6''$). L'éclipse de Soleil observée par Théon à Alexandrie le 16 juin de l'année 364 avant notre ère est représentée avec une différence d'une *minute* et 25 *secondes*. Les deux éclipses de Soleil

(*) Voyez la Note à la fin de ce Mémoire, où j'ai donné l'équation séculaire pour un *temps indéfini en termes périodiques*.

observées près du *Caire* le 12 décembre de l'année 977 et le 8 juin de l'année 978, après notre ère, sont représentées avec une différence moindre de $4'$ ($3'.40''$).

Ces éclipses étant arrivées fort près des apsides de la Lune, il serait facile de diminuer cette différence en faisant varier l'anomalie de la Lune d'environ $40'$. Mais nous n'insistons pas sur les comparaisons de ce genre, parceque la théorie a maintenant une telle certitude qu'il devient inutile d'établir des comparaisons avec des observations qui ne sont pas à l'abri de toute objection sur le degré de leur exactitude.

Sur le coefficient $11'',51157$ que je trouve ici après des calculs théoriques dont l'exécution est très-difficile, je dois faire une remarque propre à justifier une telle difficulté; autrement on pourrait objecter que le coefficient $11'',135$, publié par LAPLACE le 19 novembre de l'année 1787, en est fort approchant quoique trouvé d'après un calcul sans comparaison plus simple. Mais en examinant de près la question on verra, que LAPLACE n'a jamais calculé le *second* terme de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune, ni en 1787, ni en 1802, époque de la publication du 3.ième Volume de la Mécanique Céleste. Il avait borné la recherche au premier terme $\frac{3}{2}m^2\int dv\,(\varepsilon'^2 - E'^2)$ de cette équation. Sans une altération qu'il faisait subir par son calcul au second facteur, il aurait trouvé un coefficient *inférieur* à $10'',3$, comme à la page 273 du 3.ième Volume de la Mécanique Céleste. Le contraste entre les quantités positives et les quantités négatives au de-là du premier terme est la cause radicale qui augmente la difficulté de ce développement.

LAGRANGE en 1792 a aussi borné l'approximation au seul premier terme (Voyez la page 296 du Volume de l'Académie de Berlin pour les années 1792-93).

Il y a un autre résultat sur lequel je dois fixer d'avance l'attention du Lecteur de ce Mémoire. En considérant, séparément, la partie de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune, qui, par une combinaison particulière, naît, en vertu des intégrations, des termes périodiques multipliés par le coefficient différentiel $\frac{d\varepsilon'}{dv}$ de la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite de la Terre, on obtiendrait une quantité, qui, par sa forme, paraît devoir être une partie intégrante de cette même équation. Mais, en examinant de plus près l'origine de cette partie,

j'ai reconnu, que son addition avec la partie primitive est inadmissible. On verra, que les termes du 4.ième et du 5.ième ordre dérivés de cette source sont;

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{855}{16}m^4-\frac{195}{16}m^2e^2-\frac{39}{64}m^2\gamma^2-\frac{75}{32}b^4 \\ -\frac{36963}{64}m^5-\frac{22593}{128}m^3e^2+\frac{2937}{512}m^3\gamma^2+\frac{675}{64}mb^4 \end{array}\right\}\int dv\,(\varepsilon'^2-E'^2)\,;$$

et en calculant les suivans, on réduirait le coefficient de l'équation séculaire à un tel degré de petitesse qu'il serait incompatible avec les observations, soit anciennes, soit modernes. Toutefois, indépendamment de cette considération indirecte, on peut démontrer, que la suppression complète de cette partie est exigée par la méthode même des approximations successives sur laquelle est fondée toute la théorie qui fournit les coefficiens des inégalités lunaires.

L'équation séculaire de l'anomalie, et l'équation séculaire de l'argument de la latitude de la Lune sont étroitement liées avec celle du moyen mouvement déterminée par l'équation (*k*). J'ai rapporté les deux premières en finissant le 4.ème §, afin de présenter réunies dans ce Mémoire l'expression analytique des trois équations séculaires qui affectent le mouvement du centre de gravité du globe de la Lune et celui des élémens de son orbite.

La distinction entre le centre de gravité et le centre de figure de la Lune devient maintenant nécessaire : car l'on a motif de croire le premier plus éloigné du centre de la Terre d'environ les 35 millièmes du rayon du globe de la Lune (Voyez la page 31 du Tome XXIV que vient de publier la Société Astronomique de Londres).

En réfléchissant sur l'analyse qui nous a donné ce résultat capital, relativement aux équations séculaires, on sentira qu'il serait impossible de l'obtenir sans avoir les coefficiens de toutes les inégalités lunaires sous une forme *littérale* et *explicite*.

La loi des variations de l'équation séculaire, sous forme finie, que j'ai placée dans une Note qui termine ce Mémoire, complète cette théorie d'une manière nouvelle.

Je vais exposer l'analyse qui m'a fourni les résultats que je viens d'énoncer.

§ 1.

Considérations sur les formules exposées dans les pages 60 et 61 du 1.er Volume de ma Théorie du Mouvement de la Lune.

Il y a dans la dernière ligne de la page 61 du 1.er Volume de ma Théorie de la Lune un résultat exact, mais précédé d'une singulière faute typographique, dont j'ai reconnu l'existence (peu de jours avant la moitié du mois d'avril de cette année) en relisant la Note que j'avais présentée à l'Académie des Sciences de Turin le 17 décembre 1854. Voici la correction qui doit être faite dans cette page, et les nouveaux éclaircissemens, que cette circonstance exige de ma part, pour établir la véritable forme des termes dépendans des coefficiens différentiels des élémens de l'orbite du Soleil, et discuter leur influence sur l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune.

La valeur de x qui termine la page 61 est équivalente à la somme de ces trois termes ; savoir

$$[1]\ldots\quad x = -\frac{B}{k}\varepsilon'^{m}\cos.(kv+\beta-n\tau') - \frac{Bn}{k^2}\cdot\frac{d\tau'}{dv}\varepsilon'^{m}\cos.(kv+\beta-n\tau')$$
$$+\frac{Bm}{k^2}\varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(kv+\beta-n\tau') :$$

et c'est effectivement ainsi que je l'avais obtenue par le calcul exposé. D'ailleurs, la phrase « *l'on peut réunir ces trois termes en un seul* » indique, assez clairement, que les *trois* termes existaient dans le manuscrit: mais, dans l'avant-dernière expression de x, le troisième terme a été omis, et cette faute typographique m'est complètement échappée. De là il est arrivé, que, en composant la Note du 17 décembre 1854, je n'ai pas fait attention à l'omission du terme

$$+\frac{Bm}{k^2}\varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(kv+\beta-n\tau')$$

qui devait faire partie de la valeur de x qui précède immédiatement la

dernière. En conséquence de cette omission je voyais seulement le terme multiplié par $\varepsilon'^m \frac{d\tau'}{dv}$, et je croyais à la destruction de celui multiplié par $m\varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}$. C'est à cette circonstance qu'il faut attribuer ma manière de voir alors la non existence des termes périodiques multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$ dans les expressions de δu et δnt. Maintenant que j'ai rétabli, en refaisant le calcul de la page 61, le véritable trinome à la place du monome égal à la valeur de x, je reconnais que l'intégration introduirait des termes séculaires dans l'intégrale des produits de la forme

$$x . B' . \varepsilon'^m . \sin.(kv+\beta-n\tau') . dv \ :$$

car il y aurait le terme

$$\int \frac{BB'm}{k^2} . \varepsilon'^{2m-1} \frac{d\varepsilon'}{dv} . \sin.^2(kv+\beta-n\tau')dv$$

$$= \int \frac{BB'm}{2k^2} . \varepsilon'^{2m-1} d\varepsilon' = \frac{BB'}{4k^2} . \varepsilon'^{2m} \ ,$$

si effectivement on devait exécuter des intégrations de ce genre pour développer les fonctions qui donnent les termes successivement ajoutés aux équations différentielles. Cela prouve que l'existence des termes de la forme

$$G\varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv} . \sin.(kv+\beta-n\tau')$$

dans l'expression de δu est incontestable. Mais cela ne prouve pas en même temps qu'on doive traiter cette partie de δu comme si elle constituait une approximation subséquente d'un ordre déterminé. Leur forme est semblable à celle du terme $Q\sin.(iv+\beta)$, dont Laplace a signalé l'existence à la page 214 du 3.ième Volume de la Mécanique Céleste.

Le facteur $\frac{d\varepsilon'}{dv}$ est très-petit ; mais on ne saurait lui attribuer un ordre de petitesse déterminé, comme on le fait à l'égard de ε', ε'^2, ε'^3, etc. Ces termes multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$ sont le résultat d'un développement opéré sur les coefficiens et sur les argumens des fonctions périodiques. D'après

cela on doit employer ces fonctions avec des circonspections analogues à celles que l'on observe pour éviter le développement de l'arc dans l'intégration des équations différentielles du mouvement des planètes. Nous ferons remarquer, dès ce moment, que, en intégrant l'équation

$$\frac{d.\delta nt}{dv} = \Sigma . H\varepsilon'^{g} \sin.(kv+\beta-g'\tau') \ ,$$

on aura des termes périodiques dans l'expression de δnt, multipliés par $g\varepsilon'^{g-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}$, lesquels en produisent dans la partie $\int \delta R'dv$ de l'intégrale $\int R_1 dv$; car, en ayant égard aux termes tels que

$$\frac{3}{2}q\int \frac{\delta[(\alpha' u')^3 \sin.(2v-2v')]}{u_1^4}dv \ ,$$

on les voit naître dans la valeur de $\delta R'$ posée à la page 273 de mon 1.er Volume.

Pour avoir les termes de même espèce, mais d'origine différente, contenus dans le coefficient que j'ai désigné par Π à la page 263 du 1.er Volume, il faut avoir, séparément, ceux multipliés par ε'^2, qui se trouvent dans l'expression de l'intégrale $m^2\int R'dv$; c'est-à-dire dans le coefficient de cos. ov qui fait partie du second membre de l'équation

$$\frac{d.\delta nt}{dv} = -2\delta u + m^2\int R'dv + \text{etc.}$$

Et à cet effet voici comment on doit exécuter le calcul de ces termes, en reprenant les premières formules posées dans la page 60.

Considérons un terme de la forme

$$x = B\int \varepsilon'^{g} \sin.(kv+\beta-g'\tau').dv \ ,$$

l'on a d'abord;

$$x = B\int dv.\sin.(kv+\beta).\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau' - B\int dv.\cos.(kv+\beta).\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau' \ .$$

Or, en posant

$$\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau' = \Sigma.M\cos.(pn't+q) = \Sigma.M\cos.(pm.nt+q) \ ,$$

il faudra remplacer nt par $v+\delta v$, et regarder δv comme le représentant de la totalité des termes *périodiques* qui entrent dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune en fonction de la longitude vraie, désignée par v. Alors l'on a

$$\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'=\Sigma.M\cos.(pmv+q+pm\delta v)\ .$$

Donc, en développant suivant les puissances de δv, et retenant seulement la première, nous aurons

$$\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'=\Sigma.M\cos.(pmv+q)+\delta v.\frac{d.\Sigma.M\cos.(pmv+q)}{dv}\ .$$

Pour plus de simplicité j'écris

$$\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'=[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau']+\delta v.\frac{d.[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau']}{dv}\ ;$$

où la fonction, renfermée entre les paranthèses carrées, est censée représenter la totalité des termes *absolument séculaires*, ayant les argumens $pm.v+q$, affectés des coefficiens pm, formés du produit de $m=\frac{1}{13}$ par les très-petits coefficiens p dépendans des masses des planètes, qui sont les seuls dont j'entendais parler dans les pages 60 et 61. D'après cette notation, la valeur précédente de x deviendra

$$[2]\ldots\quad x=\ B\int dv\sin.(kv+\beta)\left\{[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau']+\delta v.\frac{d.[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau']}{dv}\right\}$$
$$-B\int dv\cos.(kv+\beta)\left\{[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau']+\delta v.\frac{d.[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau']}{dv}\right\}.$$

Cela posé, si l'on considère le terme périodique de δv, dépendant du *même* argument $kv+\beta-g'\tau'$, l'on aura une expression de cette forme ;

$$[3]\ \ldots\ \delta v=A\sin.(kv+\beta).[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau']-A\cos.(kv+\beta).[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau']\ .$$

Donc, en substituant cette valeur dans celle de x et retenant seulement les termes séculaires multipliés par AB, l'on aura

$$x=\ \frac{AB}{2}\int dv[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'].\frac{d.[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau']}{dv}$$
$$+\frac{AB}{2}\int dv[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau'].\frac{d.[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau']}{dv}\ ;$$

c'est-à-dire en exécutant l'intégration

$$[4] \ldots\ldots \qquad x = \frac{AB}{4}\left\{\left[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'\right]^2 + \left[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau'\right]^2\right\} .$$

Cette formule, lorsque $g' = g$, et lorsque $g' = 0$, donne

$$[5] \ldots\ldots \qquad x = \frac{AB}{4}.\varepsilon'^{2g} .$$

Mais si au lieu de l'équation [3] l'on avait

$$[6] \ldots\ldots \qquad \delta v = A\sin.(kv+\beta) ,$$

l'équation [2] donnerait le seul terme

$$[7] \ldots\ldots \quad x = \frac{AB}{2}\int dv\,\frac{d.\left[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'\right]}{dv} = \frac{AB}{2}.\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau' .$$

Il y a un troisième cas; c'est celui où, au lieu de l'équation [3], l'on aurait

$$\delta v = A\varepsilon'^{\lambda}\sin.(kv+\beta-g'\tau') ;$$

c'est-à-dire

$$\delta v = A\varepsilon'^{\lambda-g}\left\{\sin.(kv+\beta)\left[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'\right] - \cos.(kv+\beta)\left[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'\right]\right\} ;$$

alors la valeur de x est

$$x = \frac{AB}{2}\int dv.\varepsilon'^{\lambda-g}\left[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'\right]\frac{d.\left[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'\right]}{dv} + \frac{AB}{2}\int dv.\varepsilon'^{\lambda-g}\left[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau'\right]\frac{d.\left[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau'\right]}{dv} .$$

En intégrant par parties, il viendra

$$x = \frac{AB}{4}\varepsilon'^{\lambda-g}\left\{\left[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'\right]^2 + \left[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau'\right]^2\right\} - \frac{AB}{4}(\lambda-g)\int dv.\varepsilon'^{\lambda-g-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}\varepsilon'^{2g} ;$$

d'où l'on tire

$$(a) \ldots\ldots \quad x = \frac{AB}{4}.\varepsilon'^{\lambda+g} - \frac{AB}{4}.\frac{(\lambda-g)}{\lambda+g}.\varepsilon'^{\lambda+g} = \frac{AB}{4}.\frac{2g}{(\lambda+g)}.\varepsilon'^{\lambda+g} :$$

on voit par là que ce produit est *nul*, lorsque $g = 0$.

Les formules [5], [7] et (*a*) donnent les termes séculaires nés de l'intégrale $-2m^2\int R'dv$ sans la considération des termes périodiques multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, que l'on aurait en intégrant l'expression de $\frac{d.\partial v}{dv}.dv$. Leur existence tient à l'élimination de la longitude moyenne $n't=m.nt$ du Soleil en fonction de la longitude v de la Lune.

§ II.

Calcul des termes constans du 4.ième ordre appartenans au coefficient de ε'^2 dans le développement des deux intégrales

$$-2m^2\int R'dv\ , \qquad -2m^2\int \partial R'.dv\ .$$

En prenant dans la page 336 du 1.er Volume les trois termes

$$[8]\ldots\quad R'=-\frac{15}{4}\varepsilon'^2\sin.2Ev$$
$$-\frac{3}{4}\varepsilon'\sin.(2Ev+c'mv)+\frac{21}{4}\varepsilon'\sin.(2Ev-c'mv)\ ;$$

et dans les pages 490, 491 les trois termes

$$[9]\ldots\quad \partial v=-\frac{11}{8}m^2\sin.2Ev$$
$$+\frac{11}{16}m^2\varepsilon'\sin.(2Ev+c'mv)-\frac{77}{16}m^2\varepsilon'\sin.(2Ev-c'mv)\ ,$$

on calculera le premier par la formule [7] en y faisant $g'=0$, $g=2$; ce qui donnera

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{11}{8}m^2\varepsilon'^2=\frac{165}{64}m^2\varepsilon'^2\ .$$

Et pour les deux autres on fera usage de la formule [5] en y faisant $g=1$; ce qui donnera pour leur somme

$$x = \left(-\frac{3}{4.4}\cdot\frac{11}{16} - \frac{21}{4.4}\cdot\frac{77}{16}\right) m^2\varepsilon'^2 \ ;$$

$$x = \left(-\frac{33}{256} - \frac{1617}{256}\right) m^2\varepsilon'^2 .$$

L'on a donc

$$[10]\ldots \quad -2m^2\int R'dv = \left(-\frac{165}{32} + \frac{33}{128} + \frac{1617}{128} = \frac{495}{64}\right) m^3\varepsilon'^2 .$$

Les trois termes de l'équation [8] donneront, conformément au troisième terme de la formule [1],

$$[11]\ldots \quad -2\int R'dv = \frac{15}{4}\cdot\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin. 2Ev + \frac{3}{8}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev + c'mv)$$

$$-\frac{21}{8}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev - c'mv) .$$

Donc, en considérant seulement les quatre argumens $c'mv$, $2Ev$, $2E+c'mv$, $2Ev-c'mv$, l'équation (B), posée dans la page 72 du second Volume de mon ouvrage, sera réduite à celle-ci;

$$[12]\ldots\ldots \quad -\frac{d^2.\delta u}{dv^2} - \left(1 - \frac{3}{2}m^2\right)\delta u =$$

$$+\frac{3}{2}m^2\varepsilon'\cos c'mv - \frac{15}{2}m^2\varepsilon'^2\cos. 2Ev$$

$$-\frac{3}{2}m^2\varepsilon'\cos.(2Ev + c'mv) + \frac{21}{2}m^2\varepsilon'\cos.(2Ev - c'mv)$$

$$+\frac{357}{16}m^3\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin. c'mv + \frac{15}{4}m^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin. 2Ev$$

$$+\frac{3}{8}m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev + c'mv) - \frac{21}{8}m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev - c'mv) \ ;$$

où le terme $+\frac{357}{16}m^3\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin. c'mv$ est donné par l'intégrale

$$-2m^2\int\delta R'dv \ ,$$

d'après la valeur de $\delta R'$ trouvée à la page 81 du même Volume, et le troisième terme de la formule désignée par [1] dans ce Mémoire.

Pour intégrer cette équation, en ayant égard à la variation séculaire des termes multipliés par des *cosinus*, remarquons, que, en faisant $i^2 = 1 - \frac{3}{2}m^2$, un terme quelconque de la forme

$$B\varepsilon'^g \cos.(kv + \beta - g'\tau')$$

introduit dans la valeur de δu la fonction

$$\frac{B\cos.iv}{i}\int \varepsilon'^g \cos.(kv+\beta-g'\tau')\sin.iv.dv$$

$$-\frac{B\sin.iv}{i}\int \varepsilon'^g \cos.(kv+\beta-g'\tau')\cos.iv.dv\ .$$

Or, en exécutant cette intégration d'après la formule [1], on trouvera que le terme correspondant de δu se réduit à

$$[13]\ \ldots\quad \delta u = -\frac{2Bk.\varepsilon'^g}{(k^2-i^2)^2}\left\{\begin{array}{l} g\,\dfrac{d\varepsilon'}{\varepsilon'.dv}\sin.(kv+\beta-g'\tau') \\ -g'\,\dfrac{d\tau'}{dv}\cos.(kv+\beta-g'\tau') \end{array}\right\}.$$

En appliquant cette formule au second membre de l'équation [12], et faisant $E = 1$, $i = 1$ (ce qui suffit pour l'approximation actuelle), on trouvera que les termes multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, sont

$$\delta u = -\left(3+\frac{357}{16}\right)m^3\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.c'mv + m^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{20}{3}+\frac{5}{4}\right)\sin.2Ev$$

$$+m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{8}\right)\sin.(2Ev+c'mv)$$

$$-m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{14}{3}+\frac{7}{8}\right)\sin.(2Ev-c'mv)\ ,$$

de sorte que l'on a;

$$[14]\ \ldots\quad \delta u = -\frac{405}{16}m^3\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.c'mv + \frac{95}{12}m^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.2Ev$$

$$+\frac{19}{24}m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev+c'mv)$$

$$-\frac{133}{24}m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-c'mv)\ .$$

D'après les résultats que j'ai donnés dans les pages 273, 331 et 336 du 1.er Volume, l'intégrale $-2m^2\int R_1 dv$ contiendra un terme multiplié par δu, et un autre multiplié par $m\delta nt$, lesquels, en considérant seulement les trois argumens $2Ev$, $2Ev+c'mv$, $2Ev-c'mv$, donneront

$$[15]\ \ldots\ldots\ldots\quad -2m^2\int\delta R'.dv =$$

$$12m^2\int dv.\delta u\left\{\begin{array}{l}\left(1-\frac{5}{2}\varepsilon'^2\right)\sin.2Ev\\ -\frac{1}{2}\varepsilon'\sin.(2Ev+c'mv)+\frac{7}{2}\varepsilon'\sin.(2Ev-c'mv)\end{array}\right\}$$

$$-\ 2m^3\int dv.\delta nt\left\{\begin{array}{l}\left(-3+\frac{15}{2}\varepsilon'^2\right)\cos.2Ev\\ +\frac{3}{4}\varepsilon'\cos.(2Ev+c'mv)-\frac{63}{4}\varepsilon'\cos.(2Ev-c'mv)\end{array}\right\}.$$

Mais ces fonctions doivent être ajoutées au second membre de l'équation [12], lorsque il est question d'une approximation *subséquente*, et on doit y faire $\delta u=0$, $\delta nt=0$, à l'égard de l'approximation *actuelle*, puisque les termes qu'elles pouvaient fournir sont déjà compris dans le second membre de l'équation [12]. C'est de quoi je donnerai une démonstration générale vers la fin de ce Mémoire. Néanmoins, j'ai voulu calculer les termes séculaires, qui dérivent des termes périodiques multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, afin de mettre en évidence l'énorme altération qui en résulterait dans le coefficient de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune, si on voulait les ajouter à ceux obtenus en supposant

$\frac{d\varepsilon'}{dv}=0$. Tel est le motif du développement des termes séculaires obtenus, de cette manière, par l'intégrale $-2m^2\int\delta R'.dv$ que je vais exposer, quoique, en dernière analyse, ils doivent être supprimés.

Cela posé on aura, d'après l'équation [14], pour la partie séculaire (bornée aux termes multipliés par m^4):

$$[16]\ldots\quad -2m^2\int\delta R'.dv=m^4\int\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{95}{2}-\frac{19}{8}-\frac{931}{8}\right)dv=-\frac{285}{8}m^4\varepsilon'^2.$$

Mais il y a trois autres termes du *même* ordre qui doivent être calculés de la manière suivante.

Le second membre de l'équation [12] contient aussi les trois termes

$$+\frac{75}{4}m^2e\varepsilon'^2.\cos.(2Ev-cv)$$

$$+\frac{15}{4}m^2e\varepsilon'.\cos.(2Ev+c'mv-cv)-\frac{105}{4}m^2e\varepsilon'.\cos.(2Ev-c'mv-cv)\ ,$$

lesquels étant intégrés d'après la formule [13] donnent

$$\delta u=-\frac{75.m^2e(1-2m)}{\left[(1-2m)^2-1\right]^2}\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-cv)$$

$$-\frac{15}{2}\cdot\frac{m^2e(1-m)}{\left[(1-m)^2-1\right]^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev+c'mv-cv)$$

$$+\frac{105}{2}\cdot\frac{m^2e(1-3m)}{\left[(1-3m)^2-1\right]^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-c'mv-cv)\ ;$$

donc, en retenant seulement le premier terme du coefficient, il est clair que l'on a

$$[17]\ldots\ldots\quad \delta u=-\frac{75}{16}e\frac{\varepsilon'd\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-cv)$$

$$-\frac{15}{8}e\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev+c'mv-cv)$$

$$+\frac{35}{24}e\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-c'mv-cv)\ .$$

Cela posé, si l'on ajoute au second membre de l'équation [15] les termes

$$12m^2\int dv.\delta u\left\{\begin{array}{l}-2.e\sin.(2Ev-cv)\\+1.e\varepsilon'\sin.(2Ev+c'mv-cv)\\-7.e\varepsilon'\sin.(2Ev-c'mv-cv)\end{array}\right\},$$

l'on aura

$$[18]\ \ldots\ldots\ldots\qquad -2m^2\int\delta R'.dv=$$

$$12.m^2e^2\int\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}dv\left(+\frac{75}{16}-\frac{15}{16}-\frac{245}{48}\right)=-\frac{65}{8}m^2e^2.\varepsilon'^2.$$

L'équation (A) donnée à la page 35 du second Volume contient les termes suivans;

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2}-\left(1+\frac{3}{2}m^2\right)\delta s=$$

$$\sin.(2Ev-gv)\gamma\left(-\frac{3}{2}m^2+\frac{15}{4}m^2\varepsilon'^2\right)$$

$$+\frac{3}{4}m^2\varepsilon'\gamma\sin.(2Ev+c'mv-gv)-\frac{21}{4}m^2\varepsilon'\gamma\sin.(2Ev-c'mv-gv).$$

Donc en intégrant conformément à la formule [13], et retenant seulement le premier terme, l'on aura;

$$[19]\ \ldots\ldots\qquad \delta s=+\frac{15}{16}\gamma\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.(2Ev-gv)$$

$$+\frac{3}{8}\gamma\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.(2Ev+c'mv-gv)$$

$$-\frac{7}{24}\gamma\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.(2Ev-c'mv-gv).$$

Il suit de là, que la fonction

$$-q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T=\frac{3}{2}.2\gamma\sin.gv.\delta s+\text{etc.}$$

qui entre dans le second membre de l'équation (II)″ donnée à la page 276 du 1.er Volume de ma Théorie de la Lune, introduit dans le second membre de l'équation [12] les trois termes;

$$+\frac{45}{32}\gamma^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.2Ev$$

$$+\frac{9}{16}\gamma^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev+c'mv)-\frac{7}{16}\gamma^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-c'mv)\ ,$$

lesquels, par l'intégration, donnent;

[20] ..... $$\delta u=+\frac{15}{32}\gamma^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.2Ev$$

$$+\frac{3}{16}\gamma^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev+c'mv)$$

$$-\frac{7}{48}\gamma^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-c'mv)\ .$$

Donc, d'après l'équation [15], l'on aura;

[21] ..... $$-2m^2\int\delta R'dv=$$

$$12m^2\gamma^2\int dv\left(\frac{15}{64}-\frac{3}{64}-\frac{49}{192}\right)\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}=-\frac{13}{32}m^2\gamma^2\varepsilon'^2\ .$$

Le terme affecté de l'argument $Ev+c'mv$ donné à la page 73 du second Volume introduit dans l'équation [12] le terme

$$+\frac{15}{8}m^2b^2.\varepsilon'\cos.(Ev+c'mv)\ ,$$

lequel étant intégré d'après la formule [13] donne

$$\delta u=-\frac{15}{4}\cdot\frac{m^2b^2(1-m+c'm)}{\left[(1-m+c'm)^2-1+\frac{3}{2}m^2\right]^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(Ev+c'mv)\ ;$$

et comme on peut faire $c'=1$, il est clair que l'on a;

[22] ..... $$\delta u=-\frac{5}{3}\cdot\frac{b^2}{m^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(Ev+c'mv)\ .$$

D'après la valeur de $\delta R'$ donnée à la page 273 du 1.er Volume, et le développement donné à la page 343 du même Volume, nous avons le terme

$$-2m^2\int dv.\delta R' = +\frac{15}{4}m^2b^2\int dv.\delta u.\varepsilon'\sin.(Ev+c'mv)\ ;$$

duquel on tire

$$[23]\ \ldots\quad -2m^2\int dv.\delta R' = -\frac{25}{8}b^4\int dv.\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv} = -\frac{25}{16}b^4\varepsilon'^2\ .$$

Maintenant, si l'on désigne par $\int' \zeta dv$ la partie de $\int \zeta dv$, née du développement de l'intégrale $-\frac{3}{2}.2m^2\int R'dv$, et par $\int'' \zeta dv$ la partie de $\int \zeta dv$, née du développement de l'intégrale $-\frac{3}{2}.2m^2\int \delta R'dv$, par la considération des termes périodiques de δu multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, l'on aura, *séparément;* en vertu de l'équation [10];

$$[24]\ \ldots\ldots\quad \int' \zeta dv = +\frac{1485}{128}m^4\int dv(\varepsilon'^2 - E'^2)\ ,$$

et, d'après les équations [16], [18], [21] et [23],

$$[25]\ \ldots\ldots\ldots\quad \int'' \zeta dv =$$

$$\left(-\frac{855}{16}m^4 - \frac{195}{16}m^2e^2 - \frac{39}{64}m^2\gamma^2 - \frac{75}{32}b^4\right)\int dv(\varepsilon'^2 - E'^2)\ .$$

On verra plus loin la cause intrinsèque de la séparation que nous venons de faire *.

Pour obtenir les termes périodiques multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, qui affectent des *sinus* dans l'expression de $\frac{d.\delta ut}{dv}$, nous remplacerons l'équation [11] par celle-ci;

---

* En ajoutant les deux termes multipliés par m^4 que l'on voit dans ces deux dernières équations avec le terme $-\frac{2187}{128}m^4$, que j'ai donné à la page 485 du premier Volume de ma Théorie de la Lune, l'on obtient le terme $-\frac{3771}{64}m^4$, publié par M. ADAMS dans le Volume des Transactions Philosophiques pour l'année 1853 (page 405).

$$[26] \ldots\ldots\ldots \qquad +m^2\int R_1\,dv =$$

$$-m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{357}{32}m+\frac{3}{8}\cdot\frac{\gamma^2}{m}+\frac{75}{8}\cdot\frac{e^2}{m}\right)\sin.\,c'mv+\frac{15}{8}\varepsilon'\sin.\,2Ev\\ +\frac{3}{16}\sin.\,(2Ev+c'mv)-\frac{21}{16}\sin.\,(2Ev-c'mv)\end{array}\right\}:$$

et nous prendrons pour la valeur de $-2\,\delta u$ les termes suivans, fournis par les équations [14], [17] et [22]; savoir

$$[27] \ldots\ldots\ldots \qquad -2.\delta u =$$

$$+m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{405}{8}m+\frac{3}{2}\cdot\frac{\gamma^2}{m}+\frac{75}{4}\cdot\frac{e^2}{m}\right)\sin.\,c'mv-\frac{95}{6}\varepsilon'\sin.\,2Ev\\ -\frac{19}{12}\sin.\,(2Ev+c'mv)+\frac{133}{12}\sin.\,(2Ev-c'mv)\end{array}\right.$$

$$+\frac{d\varepsilon'}{dv}.e\left\{\begin{array}{l}\frac{15}{4}\sin.\,(2Ev+c'mv-cv)-\frac{35}{12}\sin.\,(2Ev-c'mv-cv)\\ +\frac{75}{8}\varepsilon'\sin.\,(2Ev-cv)+\frac{10}{3}\cdot\frac{b^2}{em^2}\sin.\,(Ev+c'mv)\end{array}\right\}.$$

Cela posé, l'équation

$$\frac{d.\delta nt}{dv}=-2\,\delta u+m^2\int R_1\,dv\ ,$$

en prenant les termes affectés des *cosinus* dans les pages 823-834 du second Volume de ma Théorie de la Lune, donnera;

$$[28] \ldots\ldots\ldots \qquad d.\frac{\delta nt}{dv}=$$

$$m^2\varepsilon'\left\{\begin{array}{l}\left(3-\frac{735}{16}m^2+\frac{27}{8}e^2-\frac{27}{8}\gamma^2+\frac{27}{8}\varepsilon'^2\right)\cos.\,c'mv\\ +\frac{55}{8}\varepsilon'\cos.\,2Ev+\frac{11}{8}\cos.\,(2Ev+c'mv)\\ -\frac{77}{8}\cos.\,(2Ev-c'mv)\end{array}\right\}$$

(*) Voyez la page 81 du second Volume de ma Théorie du mouvement de la Lune.

$$+m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1263}{32}m+\frac{9}{8}\cdot\frac{\gamma^2}{m}+\frac{75}{8}\cdot\frac{e^2}{m}\right)\sin.c'mv\\ -\frac{425}{24}\varepsilon'\sin.2Ev-\frac{85}{48}\sin.(2Ev+c'mv)\\ +\frac{595}{48}\sin.(2Ev-c'mv)\end{array}\right\}$$

$$+\frac{d\varepsilon'}{dv}\cdot e\left\{\begin{array}{l}\frac{75}{8}\varepsilon'\sin.(2Ev-cv)+\frac{10}{3}\cdot\frac{b^2}{em^2}\sin.(Ev+c'mv)\\ +\frac{15}{4}\sin.(2Ev+c'mv-cv)-\frac{35}{12}\sin.(2Ev-c'mv-cv)\end{array}\right\}.$$

En intégrant ces termes conformément à la formule [1], et conservant seulement ceux multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, l'on aura

$$\delta nt=$$

$$\left\{\begin{array}{l}3-\left(\frac{735}{16}+\frac{1263}{32}\right)m^2+\left(\frac{27}{8}-\frac{75}{8}\right)e^2\\ -\left(\frac{27}{8}+\frac{9}{8}\right)\gamma^2+\frac{81}{8}\varepsilon'^2\end{array}\right\}\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.c'mv$$

$$+\left(\frac{55}{16}+\frac{425}{48}\right)m^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.2Ev-\frac{75}{8}e.\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.(2Ev-cv)$$

$$+m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\left(\frac{11}{32}+\frac{85}{96}\right)\cos.(2Ev+c'mv)-\left(\frac{77}{32}+\frac{595}{96}\right)\cos.(2Ev-c'mv)\right\}$$

$$-\frac{d\varepsilon'}{dv}\cdot e\left\{\frac{15}{4}\cos.(2Ev+c'mv-cv)-\frac{35}{12}\cos.(2Ev-c'mv-cv)\right\}$$

$$-\frac{10}{3}\cdot\frac{b^2}{m^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.(Ev+c'mv)\ ;$$

[29] . . . . . $\delta nt=$

$$\left(3-\frac{2733}{32}m^2-6.e^2-\frac{9}{2}\gamma^2+\frac{81}{8}\varepsilon'^2\right)\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.c'mv$$

$$+\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\frac{295}{24}m^2\cos.2Ev-\frac{75}{8}e.\cos.(2Ev-cv)\right\}$$

$$+m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\frac{59}{48}\cos.(2Ev+c'mv)-\frac{413}{48}\cos.(2Ev-c'mv)\right\}$$

$$-\frac{d\varepsilon'}{dv}.e\left\{\frac{15}{4}\cos.(2Ev+c'mv-cv)-\frac{35}{12}\cos.(2Ev-c'mv-cv)\right\}$$

$$-\frac{10}{3}\cdot\frac{b^2}{m^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.(Ev+c'mv)\ .$$

Ces termes périodiques multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$ sont insensibles. On voit par les équations [14], [17], [19] et [22] qu'il y en a de semblables dans les expressions de δu et δs.

L'inégalité lunaire ayant pour argument $Ev+c'mv$ constitue une espèce de seconde équation du centre, analogue à celle rencontrée par Euler (en 1747) dans ses premières recherches sur les inégalités planétaires. Il est remarquable (abstraction faite de l'excessive petitesse), que le *cosinus* de ce même argument ait, dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune en fonction de sa longitude vraie, un coefficient formé du produit de la quantité séculaire

$$\frac{d\varepsilon'}{dv}\quad\text{par}\quad\frac{b^2}{m^2}=\frac{179}{400}\ .$$

En renversant l'équation qui donne la longitude moyenne de la Lune en fonction de sa longitude vraie, les coefficiens de l'équation [29] affectés des argumens $2Ev$, $2Ev+c'mv$, $2Ev-c'mv$, outre le changement de signe, subissent une modification facile à calculer de la manière suivante. Soit

$$F(v)=3\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.c'mv$$

$$+m^2\left\{-\frac{11}{8}\sin.2Ev+\frac{11}{16}\varepsilon'\sin.(2Ev+c'mv)-\frac{77}{16}\varepsilon'\sin.(2Ev-c'mv)\right\}\ .$$

En faisant le carré de cette fonction de v, et retenant seulement les argumens $2Ev$, $2Ev+c'mv$, $2Ev-c'mv$, l'on aura;

$$\left[F(v)\right]^2=\quad m^2.\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{33}{16}-\frac{231}{16}\right)\sin.2Ev$$

$$-\frac{33}{8}m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\sin.(2Ev+c'mv)+\sin.(2Ev-c'mv)\right\}\ .$$

Donc, en différentiant par rapport à v, l'on aura

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d.\{F(v)\}^2}{dv} =$$

$$-\frac{99}{8}m^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.2Ev-\frac{33}{8}m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\{\cos.(2Ev+c'mv)+\cos.(2Ev-c'mv)\}.$$

Il suit de là, et de la formule donnée dans la page 502 du 1.^{er} Volume, que l'on a

$$\begin{aligned} v = nt &+ \int \zeta n dt - \left(\frac{295}{24}+\frac{99}{8}=\frac{74}{3}\right)m^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{ndt}\cos.(2Ent) \\ &- \left(\frac{59}{48}+\frac{33}{8}=\frac{257}{48}\right)m^2\frac{d\varepsilon'}{ndt}\cos.(2Ent+c'm.nt) \\ &+ \left(\frac{413}{48}-\frac{33}{8}=\frac{215}{48}\right)m^2\frac{d\varepsilon'}{ndt}\cos.(2Ent-c'm.nt) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

§ III.

Calcul des termes constans du 5.^{ième} ordre appartenans au coefficient de ε'^2 dans le développement des deux intégrales

$$-2m^2\int R'dv\ , \qquad -2m^2\int\delta R'dv\ .$$

En imitant la marche du calcul précédent, il faut d'abord chercher la partie produite par les formules [5] et [7]. Pour cela, on prendra

[30] ..... $R' =$

$$\begin{aligned} &-\frac{15}{4}\varepsilon'^2.\sin.2Ev+\frac{15}{2}e.\varepsilon'^2\sin.(2Ev-cv) \\ &+\varepsilon'\left\{-\frac{3}{4}\sin.(2Ev+c'mv)+\frac{21}{4}\sin.(2Ev-c'mv)\right\} \\ &+e\varepsilon'\left\{\frac{3}{2}\sin.(2Ev+c'mv-cv)-\frac{21}{2}\sin.(2Ev-c'mv-cv)\right\}; \end{aligned}$$

$$[31] \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \delta v =$$

$$\left(-\frac{11}{8}m^2-\frac{59}{12}m^3+\frac{45}{16}me^2+\frac{3}{16}m\gamma^2\right)\sin.\,2Ev$$

$$-\frac{15}{4}me.\sin.(2Ev-cv)$$

$$+\left(\frac{11}{16}m+\frac{59}{48}m^2-\frac{45}{16}e^2-\frac{3}{16}\gamma^2\right)m\varepsilon'.\sin.(2Ev+c'mv)$$

$$+\left(-\frac{77}{16}m-\frac{413}{16}m^2+\frac{105}{16}e^2+\frac{7}{16}\gamma^2\right)m\varepsilon'.\sin.(2Ev-c'mv)$$

$$+me\varepsilon'\left\{\frac{15}{4}\sin.(2Ev+c'mv-cv)-\frac{35}{4}\sin.(2Ev-c'mv-cv)\right\}.$$

Cela posé l'on aura

$$-2m^2\int R'dv=$$

$$m^3.\varepsilon'^2.\frac{15}{4}\left(-\frac{59}{12}m^2+\frac{45}{16}e^2+\frac{3}{16}\gamma^2\right)+m^3e^2.\varepsilon'^2.\frac{15}{2}.\frac{15}{4}$$

$$+m^3.\varepsilon'^2.\frac{3}{8}\left(\frac{59}{48}m^2-\frac{15}{16}e^2-\frac{3}{16}\gamma^2\right)-m^3\varepsilon'^2.\frac{21}{8}\left(-\frac{413}{16}m^2+\frac{105}{16}e^2+\frac{7}{16}\gamma^2\right)$$

$$-m^3.e^2\varepsilon'^2\left(\frac{3}{4}.\frac{15}{4}+\frac{21}{4}.\frac{35}{4}\right);$$

d'où l'on tire

$$[32]\ldots\quad -2m^2\int R'dv=\left(\frac{1593}{32}m^2-\frac{885}{32}e^2-\frac{33}{64}\gamma^2\right)m^3\varepsilon'^2.$$

Maintenant, si nous considérons d'abord les termes produits par δnt, on aura, au lieu de l'équation [15];

$$[33] \ldots\ldots\ldots \qquad -2m^2\int \partial R'dv =$$

$$-2m^3\int dv.\partial nt\left\{\begin{array}{l} -3\cos.2Ev+6e.\cos.(2Ev-cv) \\ +\frac{3}{4}\varepsilon'\cos.(2Ev+c'mv)-\frac{63}{4}\varepsilon'\cos.(2Ev-c'mv) \\ -\frac{3}{2}e.\varepsilon'\cos.(2Ev+c'mv-cv) \\ +\frac{63}{2}e.\varepsilon'\cos.(2Ev-c'mv-cv) \end{array}\right\};$$

donc en réduisant la valeur de ∂nt qui compose le second membre de l'équation [29] à;

$$\partial nt=\frac{295}{24}m^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.2Ev-\frac{75}{8}e.\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.(2Ev-cv)$$

$$+m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\frac{59}{48}\cos.(2Ev+c'mv)-\frac{413}{48}\cos.(2Ev-c'mv)\right\}$$

$$+e\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{15}{4}\cos.(2Ev+c'mv-cv)+\frac{35}{12}\cos.(2Ev-c'mv-cv)\right\};$$

l'on aura

$$[34] \ldots \quad -2m^2\int \partial R'.dv=\left(\frac{295}{16}-\frac{59}{128}-\frac{8673}{128}=-\frac{1593}{32}\right)m^5.\varepsilon'^2$$

$$+\left(\frac{225}{8}+\frac{45}{32}+\frac{735}{32}=\frac{105}{2}\right)m^3e^2.\varepsilon'^2.$$

La même fonction renferme aussi le terme

$$-2m^2\int \partial R'dv=-2m^3\int dv.\partial nt.(12.\partial u.\cos.2Ev);$$

(Voyez les pages 273 et 331 du 1.er Volume): donc en prenant (Voyez page 16 du second Volume)

$$\partial u=m^2\varepsilon'\left\{-\frac{1}{2}\cos.(2Ev+c'mv)+\frac{7}{2}\cos.(2Ev-c'mv)\right\};$$

$$\partial nt=3\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.c'mv;$$

l'on aura

$$12.\partial u.\cos.2Ev = 18.m^2\varepsilon'.\cos.c'mv\ ;$$

et par conséquent

$$[35]\ \ldots\ldots\ -2m^2\int\partial R'dv = -27.m^5\varepsilon'^2\ .$$

En réunissant ce terme avec ceux de l'équation [34] l'on aura

$$[36]\ \ldots\ldots\ -2m^2\int\partial R'dv = \left(-\frac{2457}{32}m^2+\frac{105}{2}e^2\right)m^3\varepsilon'^2\ .$$

Avant d'aller plus loin, nous allons ajouter à la valeur de ∂s fournie par l'équation [19] les termes de l'ordre suivant. Pour cela nous avons l'équation (Voyez la page 201 du second Volume)

$$-\frac{d^2.\partial s}{dv^2}-\left(1+\frac{3}{2}m^2\right)\partial s =$$

$$\sin.(2Ev-gv).\gamma\left\{-\frac{3}{2}m^2+\frac{15}{4}m^2\varepsilon'^2+\frac{279}{32}m^3\varepsilon'^2\right\}$$

$$+\sin.(2Ev+c'mv-gv).\varepsilon'\gamma\left(\frac{3}{4}m^2+\frac{81}{32}m^3\right)$$

$$+\sin.(2Ev-c'mv-gv).\varepsilon'\gamma\left(-\frac{21}{4}m^2-\frac{27}{32}m^3\right)\ ;$$

laquelle étant intégrée à l'aide de la formule [13], donne;

$$\partial s = \cos.(2Ev-gv).\gamma\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\frac{(1-2m)\left(\frac{15}{4}+\frac{279}{32}m\right)}{4(1+m)^2}$$

$$+\cos.(2Ev+c'mv-gv).\gamma.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\frac{(1-m)\left(\frac{3}{4}+\frac{81}{32}m\right)}{2(1+m)^2}$$

$$+\cos.(2Ev-c'mv-gv).\gamma.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\frac{(1-3m)\left(-\frac{21}{4}-\frac{27}{32}m\right)}{18(1-m)^2}\ ;$$

c'est-à-dire, en négligeant les puissances de m supérieures à la première:

$$(37)\ \ldots\ \delta s = \cos.(2Ev - gv).\gamma\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{15}{16} - \frac{201}{128}m\right)$$

$$+\cos.(2Ev + c'mv - gv).\gamma.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{3}{8} + \frac{33}{64}m\right)$$

$$+\cos.(2Ev - c'mv - gv).\gamma.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(-\frac{7}{24} + \frac{103}{192}m\right).$$

Il suit de là que la fonction

$$-q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T = \frac{3}{2}.2\gamma.\sin.gv.\delta s\ ,$$

donne

$$[38]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ -q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T =$$

$$\sin.2Ev.\gamma^2\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{45}{32} - \frac{603}{256}m\right)$$

$$+\sin.(2Ev + c'mv).\gamma^2.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{9}{16} + \frac{99}{128}m\right)$$

$$+\sin.(2Ev - c'mv).\gamma^2.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(-\frac{7}{16} + \frac{103}{128}m\right).$$

En intégrant les termes de l'équation

$$-2\int R'dv =$$

$$\frac{15}{2}\int \varepsilon'^2 dv.\sin.2Ev - 15.e\int \varepsilon'^2 \sin.(2Ev - cv)dv$$

$$+\frac{3}{2}\int dv.\varepsilon'\sin.(2Ev + c'mv) - \frac{21}{2}\int dv.\varepsilon'\sin.(2Ev - c'mv)$$

$$-3e\int dv.\varepsilon'\sin.(2Ev + c'mv - cv) + 21.e\int dv.\varepsilon'\sin.(2Ev - c'mv - cv)$$

$$-\frac{3}{4}b^2\int dv.\varepsilon'\sin.(Ev + c'mv)\ ,$$

à l'aide du troisième terme de la formule [1], l'on aura

$$-2\int R'dv =$$

$$\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\left\{\frac{15}{4(1-m)^3}\sin.2Ev-\frac{30.e}{(1-2m)^3}\sin.(2Ev-cv)\right\}$$

$$+\quad\frac{d\varepsilon'}{dv}.\left\{\frac{3}{2(2-m)^2}\sin.(2Ev+c'mv)-\frac{21}{2(2-3m)^2}\sin.(2Ev-c'mv)\right\}$$

$$+e.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{3}{(1-m)^2}\sin.(2Ev+c'mv-cv)\\[2ex] +\dfrac{21}{(1-3m)^2}\sin.(2Ev-c'mv-cv)\end{array}\right\};$$

$$-\frac{3}{4}b^3.\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(Ev+c'mv)\ ;$$

d'où l'on tire

[39] ..... $$-2m^3\int R'dv =$$

$$m^3\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\left\{\frac{15}{4}(1+2m)\sin.2Ev-30.e(1+4m)\sin.(2Ev-cv)\right.$$

$$+m^3.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3}{8}(1+2m)\sin.(2Ev+c'mv)\\[2ex] -\dfrac{21}{8}\left(1+\dfrac{3}{2}m\right)\sin.(2Ev-c'mv)\end{array}\right\}$$

$$+m^3e.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\left\{\begin{array}{l}-3(1+2m)\sin.(2Ev+c'mv-cv)\\ +21(1+3m)\sin.(2Ev-c'mv-cv)\end{array}\right\}$$

$$-\frac{3}{4}b^3m^3.\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(Ev+c'mv)\ .$$

En réunissant les termes posés dans le second membre des équations [38] et [39] avec ceux que l'on empruntera aux pages 73 et 406 du second Volume, nous formerons l'équation analogue à l'équation [12] qui nous fournira la valeur de δu nécessaire pour l'objet actuel ; savoir

$$[40] \ldots\ldots\ldots\quad -\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=$$

$$\sin.\,2Ev.\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{15}{4}m^2+\frac{45}{32}\gamma^2+\frac{15}{2}m^3-\frac{603}{256}m\gamma^2\right)$$

$$+\sin.\,(2Ev-cv)e.\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}(-30m^2)$$

$$+\sin.\,(2Ev+c'mv).\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{3}{8}m^2+\frac{9}{16}\gamma^2+\frac{3}{8}m^3+\frac{99}{128}m\gamma^2\right)$$

$$+\sin.\,(2Ev-c'mv).\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(-\frac{21}{8}m^2-\frac{7}{16}\gamma^2-\frac{63}{8}m^3+\frac{103}{128}m\gamma^2\right)$$

$$+\sin.\,(2Ev+c'mv-cv)e.\frac{d\varepsilon'}{dv}(-3m^2)$$

$$+\sin.\,(2Ev-c'mv-cv)e.\frac{d\varepsilon'}{dv}(21m^2)$$

$$+\sin.\,(Ev+c'mv).\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(-\frac{3}{4}b^2m^2\right)$$

$$+\cos.\,2Ev.\varepsilon'^2m^2\left(-\frac{15}{2}-\frac{15}{4}m\right)$$

$$+\cos.\,(2Ev-cv)e.\varepsilon'^2m^2\left(\frac{75}{4}+\frac{285}{32}m\right)$$

$$+\cos.\,(2Ev+c'mv).\varepsilon'\left(-\frac{3}{2}m^2-\frac{3}{8}m^3+\frac{9}{16}m\gamma^2\right)$$

$$+\cos.\,(2Ev-c'mv).\varepsilon'\left(\frac{21}{2}m^2+\frac{63}{8}m^3-\frac{21}{16}m\gamma^2\right)$$

$$+\cos.\,(2Ev+c'mv-cv).m^2e.\varepsilon'\left(\frac{15}{4}-\frac{237}{32}m\right)$$

$$+\cos.\,(2Ev-c'mv-cv).m^2e.\varepsilon'\left(-\frac{105}{4}-\frac{3393}{32}m\right)$$

$$+\cos.\,(Ev+c'mv).\varepsilon'm^2b^2\left(\frac{15}{8}-\frac{135}{16}m\right).$$

En intégrant cette équation, conformément à la formule [13] pour les termes affectés de *cosinus*, et par le principe ordinaire pour les termes

affectés de *sinus*, l'on aura le résultat suivant ;

$$\delta u =$$

$$\sin.2Ev.\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{15}{4}m^2+\frac{45}{32}\gamma^2+\frac{15}{2}m^3-\frac{603}{256}m\gamma^2\right]\left(1+\frac{8}{3}m\right)\\+\frac{8}{9}m^2(1-m)\left(\frac{15}{2}+\frac{15}{4}m\right)\left(1+\frac{16}{3}m\right)\end{array}\right\}$$

$$+\sin.(2Ev-cv)e.\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\frac{15}{2}m-\frac{1}{4}(1-2m)\left(\frac{75}{4}+\frac{285}{32}m\right)\left(1+\frac{7}{2}m\right)\right\}$$

$$+\sin.(2Ev+c'mv)\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{8}m^2+\frac{3}{16}\gamma^2+\frac{1}{8}m^3+\frac{33}{128}m\gamma^2\right)\left(1+\frac{4}{3}m\right)\\-\frac{2}{9}(2-m)\left[-\frac{3}{2}m^2-\frac{3}{8}m^3-\frac{9}{16}m\gamma^2\right]\left(1+\frac{8}{3}m\right)\end{array}\right\}$$

$$+\sin.(2Ev-c'mv)\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{7}{8}m^2-\frac{7}{48}\gamma^2-\frac{21}{8}m^3+\frac{103}{384}m\gamma^2\right)(1+4m)\\-\frac{2}{9}(2-3m)\left[\frac{21}{2}m^2+\frac{63}{8}m^3-\frac{21}{16}m\gamma^2\right](1+8m)\end{array}\right\}$$

$$+\sin.(2Ev+c'mv-cv)e.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\frac{3}{2}m-\frac{1}{2}(1-m)\left(\frac{15}{4}-\frac{237}{32}m\right)(1+4m)\right\}$$

$$+\sin.(2Ev-c'mv-cv)e.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{7}{2}m-\frac{1}{18}(1-3m)\left(-\frac{105}{4}-\frac{3393}{32}m\right)(1+4m)\right\}$$

$$+\sin.(Ev+c'mv).\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{1}{2}b^2+\frac{4}{9}\cdot\frac{b^2}{m^2}\left(-\frac{15}{4}+\frac{135}{8}m\right)\right\};$$

qui se réduit à celui-ci, en négligeant les termes inutiles pour le degré d'approximation dont il est ici question ;

[41] . . . . . $\delta u =$

$$\sin.2Ev.\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\frac{95}{12}m^2+\frac{15}{32}\gamma^2+\left(\frac{5}{2}+\frac{10}{3}+\frac{290}{9}=\frac{685}{18}\right)m^3\\+\left(-\frac{201}{256}+\frac{5}{4}=\frac{119}{256}\right)m\gamma^2\end{array}\right\}$$

$$+\sin.(2Ev-cv).\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{75}{16}+\left(\frac{15}{2}-\frac{285}{128}-\frac{225}{32}=-\frac{225}{128}\right)m\right\}$$

$$+\sin.(2Ev+c'mv).\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\frac{19}{24}m^2+\frac{3}{16}\gamma^2+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{13}{9}=\frac{137}{72}\right)m^3\\+\left(\frac{33}{128}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{33}{128}\right)m\gamma^2\end{array}\right\}$$

$$+\sin.(2Ev-c'mv).\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}-\frac{133}{24}m^2-\frac{7}{48}\gamma^2\\+\left(-\frac{21}{8}-\frac{7}{2}-\frac{7}{2}-\frac{91}{3}=-\frac{959}{24}\right)m^3\\+\left(\frac{103}{384}-\frac{7}{12}+\frac{7}{12}=\frac{103}{384}\right)m\gamma^2\end{array}\right\}$$

$$+\sin.(2Ev+c'mv-cv)e.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{15}{8}+\left(\frac{237}{64}-\frac{45}{8}=-\frac{123}{64}\right)m\right\}$$

$$+\sin.(2Ev-c'mv-cv)e.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\frac{35}{24}-\left(\frac{377}{64}+\frac{35}{24}=\frac{1411}{192}\right)m\right\}$$

$$+\sin.(Ev+c'mv).\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{5}{3}.\frac{b^2}{m^2}+\frac{15}{2}.\frac{b^2}{m}\right\}.$$

Maintenant si l'on établit l'équation

$$[42]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\qquad -2m^2\int\delta R'.dv=$$

$$12m^2\int dv.\delta u\left\{\begin{array}{l}\sin.2Ev-(2+2m).e\sin.(2Ev-cv)\\-\frac{1}{2}\varepsilon'\sin.(2Ev+c'mv)+\frac{7}{2}\varepsilon'\sin.(2Ev-c'mv)\\+\left(1+\frac{m}{2}\right)e.\varepsilon'\sin.(2Ev+c'mv-cv)\\-\left(7+\frac{21}{2}m\right)e.\varepsilon'\sin.(2Ev-c'mv-cv)\\+\frac{5}{16}b^2\varepsilon'.\sin.(Ev+c'mv)\end{array}\right\},$$

formée d'après les développements donnés dans les pages 273, 336 et 343 du 1.er Volume on trouvera, que, avec la valeur précédente de δu, l'on a

$$-2m^2\int \delta R'\,dv =$$

$$6m^2\int dv\,.\,\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\frac{95}{12}m^2+\frac{15}{32}\gamma^2+\frac{685}{18}m^3+\frac{119}{256}m\gamma^2\right\}$$

$$+6m^2\int dv.e^2\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\frac{75}{8}+\left(\frac{225}{64}+\frac{75}{8}=\frac{825}{64}\right)m\right\}$$

$$+6m^2\int dv\,.\,\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{19}{48}m^2-\frac{3}{32}\gamma^2-\frac{137}{144}m^3-\frac{33}{256}m\gamma^2\right\}$$

$$+6m^2\int dv\,.\,\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{931}{48}m^2-\frac{49}{96}\gamma^2-\frac{6713}{48}m^3+\frac{721}{768}m\gamma^2\right\}$$

$$+6m^2\int dv.e^2\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{15}{8}-\left(\frac{123}{64}+\frac{15}{16}=\frac{183}{64}\right)m\right\}$$

$$+6m^2\int dv.e^2\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{245}{24}-\left(\frac{9877}{192}+\frac{245}{16}=\frac{12817}{192}\right)m\right\}$$

$$+6m^2\int dv\,.\,\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{25}{48}.\frac{b^4}{m^2}+\frac{75}{32}.\frac{b^4}{m}\right\}.$$

Donc, en conservant seulement les termes du 7.ième ordre, l'on aura

[43] ..... $$-2m^2\int \delta R'\,dv =$$

$$\left(\frac{685}{6}-\frac{137}{48}-\frac{6713}{16}=-\frac{1233}{4}\right)m^5.\varepsilon'^2$$

$$+\left(\frac{2475}{64}-\frac{549}{64}-\frac{12817}{64}=-\frac{10841}{64}\right)m^3e^2.\varepsilon'^2$$

$$+\left(\frac{357}{256}-\frac{99}{256}+\frac{721}{256}=\frac{979}{256}\right)m^3\gamma^2.\varepsilon'^2$$

$$+\frac{225}{32}.mb^4.\varepsilon'^2\ .$$

En sommant les termes donnés par les équations [36] et [43], nous aurons

$$[44] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad -2m^2\int \delta R'\,dv =$$

$$\left(-\frac{2457}{32}-\frac{1233}{4}=-\frac{123\,21}{32}\right)m^5.\varepsilon'^2$$

$$+\left(\frac{105}{2}-\frac{10891}{64}=-\frac{7531}{64}\right)m^3e^2.\varepsilon'^2+\frac{979}{256}m^3\gamma^2.\varepsilon'^2+\frac{225}{32}mb^4.\varepsilon'^2.$$

Les équations [32] et [44] ajoutent au second membre des équations [24] et [25] les termes suivans; savoir:

$$[45] \ldots\ldots \quad \int'\zeta dv=-\frac{3}{2}.2m^2\int R'\,dv=$$

$$\left(\frac{4779}{64}m^5-\frac{2655}{64}m^3e^2-\frac{99}{128}m^3\gamma^2\right)\int dv\,(\varepsilon'^2-E'^2)\ ;$$

$$[46] \ldots\ldots \quad \int''\zeta dv=-\frac{3}{2}.2m^2\int \delta R'\,dv=$$

$$\left(-\frac{36963}{64}m^5-\frac{22593}{128}m^3e^2+\frac{2937}{512}m^3\gamma^2+\frac{675}{64}mb^4\right)\int dv\,(\varepsilon'^2-E'^2)\ .$$

§ IV.

Calcul des termes constans du 6.ième et 7.ième ordre appartenans au coefficient de ε'^2 *dans le développement de l'intégrale*

$$-2m^2\int R'\,dv\ .$$

Et expression des termes additionnels au coefficient primitif de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune.

En prenant

$$[47] \ldots\ldots \quad R'=\left(-\frac{15}{4}-\frac{15}{2}e^2+\frac{39}{32}\varepsilon'^2\right)\varepsilon'^2\sin.2Ev$$

$$+\frac{15}{2}.e\varepsilon'^2\sin.(2Ev-cv)$$

$$+\left(-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{32}\varepsilon'^2\right).\varepsilon'.\sin.(2Ev+c'mv)$$

$$+\left(\frac{21}{4}+\frac{21}{2}e^2-\frac{369}{32}\varepsilon'^2\right).\varepsilon'.\sin.(2Ev-c'mv)$$

$$+\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{4}m+\frac{9}{8}e^2-\frac{3}{8}\gamma^2\right).e\varepsilon'.\sin.(2Ev+c'mv-cv)$$

$$+\left(-\frac{21}{2}-\frac{63}{4}m-\frac{63}{8}e^2+\frac{21}{8}\gamma^2\right).e\varepsilon'.\sin.(2Ev-c'mv-cv)$$

$$-\frac{15}{8}.e^2\varepsilon'.\sin.(2Ev+c'mv-2cv)$$

$$+\frac{105}{8}.e^2\varepsilon'.\sin.(2Ev-c'mv-2cv)$$

$$+\frac{3}{8}.b^2\varepsilon'.\sin.(Ev+c'mv)$$

$$+\frac{9}{8}.b^2\varepsilon'.\sin.(Ev-c'mv)\ ;$$

[48] ..... $\delta v=$

$$\left\{\begin{array}{l}-\frac{11}{8}m^2-\frac{59}{12}m^3+\frac{45}{16}me^2+\frac{3}{16}m\gamma^2-\frac{893}{72}m^4+\frac{55}{16}m^2\varepsilon'^2\\ +\frac{603}{64}m^2e^2+\frac{47}{64}m^2\gamma^2-\frac{2855}{108}m^5+\frac{33769}{1024}m^3e^2\\ +\frac{5149}{3072}m^3\gamma^2-\frac{39}{16}me^2\gamma^2-\frac{9}{64}m\gamma^2\end{array}\right\}\sin.2Ev$$

$$+\left\{-\frac{15}{4}m-\frac{285}{16}m^2-\frac{17347}{256}m^3+\frac{15}{8}me^2+\frac{21}{8}m\gamma^2\right\}e\sin.(2Ev-cv)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{11}{16}m+\frac{59}{48}m^2-\frac{45}{16}e^2-\frac{3}{16}\gamma^2+\frac{29}{576}m^3-\frac{99}{64}me^2\\ -\frac{37}{64}m\gamma^2-\frac{1129}{432}m^4+\frac{65711}{1024}m^2e^2-\frac{4237}{3072}m^2\gamma^2\\ +\frac{39}{16}e^2\gamma^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{9}{64}\gamma^4-\frac{225}{128}b^4\end{array}\right\}m\varepsilon'.\sin.(2Ev+c'mv)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{77}{16}m-\frac{413}{16}m^2+\frac{105}{16}e^2+\frac{7}{16}\gamma^2-\frac{7003}{60}m^3\\ +\frac{1983}{64}me^2+\frac{173}{64}m\gamma^2-\frac{6077}{16}m^4+\frac{170573}{1024}m^2e^2\\ +\frac{11443}{1024}m^2\gamma^2-\frac{91}{16}e^2\gamma^2-\frac{105}{64}e^4-\frac{21}{64}\gamma^4\end{array}\right\}m\varepsilon'.\sin.(2Ev-c'mv)$$

$$+\left\{\frac{15}{4}+\frac{15}{32}m-\frac{18913}{128}m^2-\frac{15}{8}e^2-\frac{21}{8}\gamma^2\right\}me\varepsilon'.\sin.(2Ev+c'mv-cv)$$

$$+\left\{-\frac{35}{4}-\frac{1775}{32}m-\frac{32691}{128}m^2+\frac{35}{8}e^2+\frac{49}{8}\gamma^2\right\}me\varepsilon'.\sin.(2Ev-c'mv-cv)$$

$$+\frac{45}{16}me^2\varepsilon'.\sin.(2Ev+c'mv-2cv)$$

$$-\frac{105}{16}me^2\varepsilon'.\sin.(2Ev-c'mv-2cv)$$

$$+\left\{-\frac{5}{2}+\frac{45}{4}m\right\}b^2\varepsilon'\sin.(Ev+c'mv)$$

$$-\frac{15}{8}mb^2\varepsilon'\sin.(Ev-c'mv)\ .$$

En appliquant à ces deux fonctions les formules [5], [7], (a), suivant les valeurs des exposans désignés par g et λ; et tenant compte des termes du 8.ième ordre, de la forme $Am^4\varepsilon'^4$, l'on obtiendra les termes suivans :

$$-2m^2\int R'dv=$$

$$\left\{\begin{array}{l}m^4.\frac{15}{4}\varepsilon'^2\left\{\begin{array}{l}-\frac{893}{72}m^4+\frac{603}{64}m^2e^2+\frac{47}{64}m^2\gamma^2+\frac{1}{2}.\frac{55}{16}m^2\varepsilon'^2\\ -\frac{2855}{108}m^3+\frac{33769}{1024}m^3e^2+\frac{5149}{3072}m^3\gamma^2\\ -\frac{39}{16}me^2\gamma^2-\frac{9}{64}m\gamma^4\end{array}\right\}\\ +m^2.\frac{15}{2}e^2\varepsilon'^2\left\{-\frac{11}{8}m^2-\frac{59}{12}m^3+\frac{45}{16}me^2+\frac{3}{16}m\gamma^2\right\}\\ -m^2.\frac{39}{32}\varepsilon'^4\left(-\frac{11}{8}m^2\right)\end{array}\right.$$

$$+\left\{-m^2.\frac{15}{2}e^2\varepsilon'^2\left(-\frac{285}{16}m^2-\frac{17347}{256}m^3+\frac{15}{8}me^2+\frac{21}{8}m\gamma^2\right)\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l}+m^3.\frac{3}{8}\varepsilon'^2\left\{\begin{array}{l}\frac{29}{576}m^3-\frac{99}{64}me^2-\frac{37}{64}m\gamma^2-\frac{1129}{432}m^4+\frac{65711}{1024}m^2e^2\\-\frac{4237}{3072}m^2\gamma^2+\frac{39}{16}e^2\gamma^2+\frac{9}{64}\gamma^4+\frac{45}{64}e^4-\frac{225}{128}b^4\end{array}\right\}\\+m^3.\frac{3}{4}e^2\varepsilon'^2\left\{\frac{11}{16}m+\frac{59}{48}m^2-\frac{45}{16}e^2-\frac{3}{16}\gamma^2\right\}\\-\frac{3}{32}.\frac{3}{4}.\frac{11}{16}m^4\varepsilon'^4\end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-m^3.\frac{21}{8}\varepsilon'^2\left\{\begin{array}{l}-\frac{7003}{64}m^3+\frac{1983}{64}me^2+\frac{173}{64}m\gamma^2-\frac{6077}{16}m^4\\+\frac{170573}{1024}m^2e^2+\frac{11443}{1024}m^2\gamma^2-\frac{91}{16}e^2\gamma^2-\frac{105}{64}e^4-\frac{21}{64}\gamma^4\end{array}\right\}\\-m^3.\frac{21}{4}e^2\varepsilon'^2\left\{-\frac{77}{16}m-\frac{413}{16}m^2+\frac{105}{16}e^2+\frac{7}{16}\gamma^2\right\}\\-\frac{369}{32}.\frac{3}{4}.\frac{77}{16}m^4\varepsilon'^4\end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-m^3.\frac{3}{4}e^2\varepsilon'^2\left\{\frac{15}{32}m-\frac{18913}{128}m^2-\frac{15}{8}e^2-\frac{21}{8}\gamma^2\right\}\\-m^4.\frac{3}{8}e^2\varepsilon'^2\left(\frac{15}{4}+\frac{15}{32}m\right)\\-m^3.\frac{15}{8}e^2\varepsilon'^2\left(\frac{9}{8}e^2-\frac{3}{8}\gamma^2\right)\end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l}+m^3.\frac{21}{4}e^2\varepsilon'^2\left\{-\frac{1775}{32}m-\frac{32691}{128}m^2+\frac{35}{8}e^2+\frac{49}{8}\gamma^2\right\}\\+m^4.\frac{63}{8}e^2\varepsilon'^2\left\{-\frac{35}{4}-\frac{1775}{32}m\right\}\\+m^3.\frac{35}{8}e^2\varepsilon'^2\left(-\frac{63}{8}e^2+\frac{21}{8}\gamma^2\right)\end{array}\right.$$

$$+\left\{+\frac{15}{16}\cdot\frac{45}{16}m^3e^4\varepsilon'^2+\frac{105}{16}\cdot\frac{105}{16}m^3e^4\varepsilon'^2\right\}$$

$$+\left\{-m^2\cdot\frac{3}{16}b^4\varepsilon'^2\left(-\frac{5}{2}+\frac{45}{4}m\right)\right\}$$

$$+m^3\cdot\frac{9}{16}\cdot b^4\varepsilon'^2\left(\frac{15}{8}\right).$$

Donc en réunissant les termes affectés du même coefficient littéral, l'on aura

$$(49)\ \ldots\ldots\ldots\qquad -2m^2\int R'dv=$$

$$\left(\frac{825}{128}+\frac{429}{256}-\frac{99}{2048}-\frac{85239}{2048}=-\frac{34353}{1024}\right)m^4\varepsilon'^4$$

$$+\left(-\frac{4465}{96}+\frac{29}{1536}+\frac{147063}{512}=+\frac{184889}{768}\right)m^6\cdot\varepsilon'^2$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{9045}{256}-\dfrac{165}{16}+\dfrac{4275}{32}-\dfrac{297}{512}+\dfrac{33}{64}-\dfrac{41643}{512}+\dfrac{1617}{64}\\[2ex] -\dfrac{45}{128}-\dfrac{45}{32}-\dfrac{37275}{128}-\dfrac{2205}{32}=-\dfrac{66405}{256}\end{array}\right\}m^4e^2\cdot\varepsilon'^2$$

$$+\left\{\frac{705}{256}-\frac{111}{512}-\frac{3633}{512}=-\frac{1167}{256}\right\}m^4\gamma^2\cdot\varepsilon'^2$$

$$+\left\{-\frac{14275}{144}-\frac{1129}{1152}+\frac{127617}{128}=+\frac{43051}{48}\right\}m^7\cdot\varepsilon'^2$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{506535}{4096}-\dfrac{295}{8}+\dfrac{260205}{512}+\dfrac{197133}{8192}+\dfrac{59}{64}\\[2ex] +\dfrac{3582033}{8192}+\dfrac{8673}{64}+\dfrac{56739}{512}\\[2ex] -\dfrac{45}{256}-\dfrac{686511}{512}-\dfrac{111825}{256}=-\dfrac{971265}{2048}\end{array}\right\}m^5e^2\cdot\varepsilon'^2$$

$$+\left\{\frac{25745}{4096}-\frac{4237}{8192}-\frac{240303}{8192}=-\frac{96525}{4096}\right\}m^5\gamma^2\cdot\varepsilon'^2$$

$$+\left\{\begin{matrix}-\frac{585}{64}+\frac{45}{32}-\frac{315}{16}+\frac{117}{128}+\frac{1911}{128}-\frac{147}{64}+\frac{63}{32}\\ +\frac{45}{64}+\frac{1029}{32}+\frac{735}{64}-\frac{9}{64}=+\frac{663}{32}\end{matrix}\right\} m^3e^2\gamma^2.\varepsilon'^2$$

$$+\left\{-\frac{135}{256}+\frac{27}{512}+\frac{441}{512}=+\frac{99}{256}\right\} m^3\gamma^4.\varepsilon'^2$$

$$+\left\{\begin{matrix}\frac{675}{32}-\frac{225}{16}+\frac{135}{512}-\frac{135}{64}+\frac{2205}{512}-\frac{2205}{64}+\frac{45}{32}\\ -\frac{135}{64}+\frac{735}{32}-\frac{2205}{64}+\frac{675}{256}+\frac{11025}{256}=+\frac{10455}{128}\end{matrix}\right\} m^3e^4.\varepsilon'^2$$

$$+\frac{15}{32}m^2b^4.\varepsilon'^2+\left\{-\frac{225}{128}-\frac{135}{64}+\frac{135}{128}=-\frac{45}{16}\right\} m^3b^4.\varepsilon'^2 \quad .$$

Cela posé si l'on réunit ces termes avec ceux déterminés par nos équations [10] et [44], on aura, pour la totalité des termes fournis par le développement de l'intégrale $-2m^2\int R'dv$, le résultat suivant;

[50] ..... $$-2m^2\int R'dv=$$

$$\left\{\begin{matrix}\frac{495}{64}m^4+\frac{1593}{32}m^5-\frac{885}{32}m^3e^2-\frac{33}{64}m^3\gamma^2\\ +\frac{184889}{768}m^6-\frac{66405}{256}m^4e^2-\frac{1167}{256}m^4\gamma^2\\ +\frac{43051}{48}m^7-\frac{971265}{2048}m^5e^2-\frac{96525}{4096}m^5\gamma^2\\ +\frac{663}{32}m^3e^2\gamma^2+\frac{99}{256}m^3\gamma^4+\frac{10455}{128}m^3e^4\\ +\frac{15}{32}m^2b^4-\frac{45}{16}m^3b^4\end{matrix}\right\}\varepsilon'^2$$

$$-\frac{34353}{1024}m^4\varepsilon'^4 \quad .$$

Donc, en établissant les équations

$$\Pi = m^2 \int R' dv \; ; \qquad \frac{a}{a_1} = 1 - 2m^2 \int R' dv \; ,$$

il suffit ici de faire

$$(1+\Pi)\left(\frac{a}{a_1}\right)^2 = -\frac{3}{2} \cdot 2m^2 \int R' dv \; ;$$

et de multiplier par $1-m^2$ les termes du second membre de cette équation, pour avoir ceux qui doivent être ajoutés aux coefficiens des deux intégrales

$$\int dv (\varepsilon'^2 - E'^2) \; ; \qquad \int dv (\varepsilon'^4 - E'^4) \; ,$$

dans l'expression de l'intégrale $\int \zeta dv$ donnée à la page 485 du premier Volume de ma Théorie de la Lune. C'est ce qui devient clair en consultant la page 852 du second Volume et les pages 321 et 802 du troisième. En désignant par $\int' \zeta dv$ la somme de ces termes additionnels, le résultat de ce calcul sera renfermé dans cette équation, savoir

$$[51] \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \int' \zeta dv =$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1485}{128} m^4 + \frac{4779}{64} m^5 - \frac{2655}{64} m^3 e^2 - \frac{99}{128} m^3 \gamma^2 \\
&+ \left(\frac{184889}{512} - \frac{1485}{128} = \frac{178949}{512}\right) m^6 - \frac{199215}{512} m^4 e^2 \\
&- \frac{3501}{512} m^4 \gamma^2 + \left(\frac{43051}{32} - \frac{4779}{64} = \frac{81323}{64}\right) m^7 \\
&+ \left(-\frac{2913795}{4096} + \frac{2655}{64} = -\frac{2743875}{4096}\right) m^5 e^2 \\
&+ \frac{45}{64} m^2 b^4
\end{aligned}\right\} \int dv (\varepsilon'^2 - E'^2)$$

$$- \frac{103059}{2048} m^4 \int dv (\varepsilon'^4 - E'^4) \; .$$

Nous avons supprimés les termes du 7.ième ordre multipliés par $m^5\gamma^2$, $m^3e^2\gamma^2$, $m^2\gamma^4$, m^3e^4, m^3b^4, parceque ces termes n'ont pas été considérés dans nos développements primitifs.

Je dois faire observer que dans le second membre de l'équation différentielle en δs, il y a la fonction $2P\mu^2.\gamma\sin.gv\int R_1dv$, qui, en y faisant $P=\frac{3}{2}m^2$, $\mu^2=m^2$, et prenant pour $-2m^2\int R_1dv$ la seule partie séculaire $\frac{495}{64}m^4\varepsilon'^2$ fournie par notre équation [10], y introduit le terme du *neuvième* ordre,

$$[52]\ \ldots\ldots\quad 2P\mu^2.\gamma\sin.gv\int R_1dv=-\frac{1485}{128}m^6\varepsilon'^2\gamma\sin.gv\ .$$

Mais ce terme donnerait des quantités du *sixième* ordre, et notre approximation a été bornée aux quantités du *cinquième* ordre dans le coefficient de l'équation séculaire du mouvement du nœud de la Lune (Voyez la page 195 du 3.ème Volume de ma Théorie de la Lune).

Il y a un terme semblable dans l'expression du mouvement du périgée, dû à la fonction

$$\frac{2\mu^2.qQ'}{1+\gamma^2}.e\cos.cv.\int R_1dv\ ,$$

qui fait partie du second membre de l'équation (II)″ donnée à la page 277 de mon 1.er Volume. Car, en posant $\frac{q}{1+\gamma^2}=1$ et $Q'=-\frac{3}{2}m^2$, il est clair que, au lieu de l'équation [52], l'on aura

$$[53]\ \ldots\ldots\quad \frac{2\mu^2.qQ'}{1+\gamma^2}.e\cos.cv.\int R_1dv=\frac{1485}{128}m^6\varepsilon'^2.e\cos.cv\ ;$$

c'est-à-dire un terme qui donnerait des quantités du *sixième* ordre, tandis que nous avons borné l'approximation à celles du *cinquième* dans le calcul du coefficient de l'équation séculaire relativement au mouvement du périgée (Voyez la page 292 du 3.ème Volume).

Avant de terminer ce § j'ajouterai ici l'équation séculaire de l'anomalie, et celle de l'argument de latitude de la Lune. La première est composée par la somme algébrique $\int\zeta dv+\int\varpi dv$, et la seconde par

la somme $\int \zeta dv + \int \theta dv$. Ainsi, en appliquant l'équation désignée par (k) dans le préambule de ce Mémoire, aux valeurs des intégrales $\int \varpi dv$, $\int \theta dv$ posées dans les pages 485 et 486 du premier Volume de mon ouvrage, l'on aura

$$(k'') \quad \ldots\ldots \quad \int \zeta dv + \int \varpi dv =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{21}{8} m^2 + \frac{825}{32} m^3 + \frac{60351}{256} m^4 + \frac{1816233}{1024} m^5 \\ + e^2 \left\{ \frac{1389}{128} m^2 + \frac{65295}{512} m^3 \right\} \\ + \gamma^2 \left\{ \frac{237}{128} m^2 - \frac{10401}{512} m^3 \right\} + b^4 \left(\frac{75}{32} - \frac{677}{32} m \right) \end{array} \right\} \int dv (\varepsilon'^2 - E'^2)$$

$$+ \left\{ \frac{105}{32} m^3 + \frac{225}{4} m^3 \right\} \int dv (\varepsilon'^4 - E'^4) \; ;$$

$$(k''') \quad \ldots\ldots \quad \int \zeta dv + \int \theta dv =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{8} m^2 + \frac{33}{32} m^3 + \frac{1281}{256} m^4 + \frac{79785}{1024} m^5 \\ + e^2 \left\{ \frac{1173}{128} m^2 + \frac{74007}{512} m^3 \right\} \\ + \gamma^2 \left\{ \frac{597}{128} m^2 - \frac{105}{512} m^3 \right\} + b^4 \left(\frac{75}{32} - \frac{675}{32} m \right) \end{array} \right\} \int dv (\varepsilon'^2 - E'^2)$$

$$+ \left\{ \frac{15}{32} m^2 + \frac{9}{4} m^3 \right\} \int dv (\varepsilon'^4 - E'^4) \; .$$

Les premiers termes $\frac{21}{8} m^2$ et $\frac{3}{8} m^2$ de ces équations sont ceux trouvés par LAPLACE en 1787 (*). Plus tard (en 1802) il a reconnu

(*) Voyez la page 257 du Volume de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1786.

que les quantités du 3.ième et du 4.ième ordre augmentaient considérablement l'équation séculaire du périgée, sans reconnaître, en même temps, que les quantités du même ordre modifient aussi, sensiblement, l'équation séculaire du moyen mouvement (Lisez la page 227 du 3.ième Volume de la Mécanique Céleste).

§ V.

La fonction séculaire [*désignée par* $\int'' \zeta dv$ *dans les équations* [25] *et* [46]], *née des termes périodiques de* ∂u *et* ∂nt *multipliés par* $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, *est étrangère à l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune.*

Pour démontrer cette proposition, il est indispensable de remonter à la source de la fonction $\int'' \zeta dv$, afin de faire concevoir, que les expressions, soit de ∂u, soit de ∂nt, obtenues jusqu'aux quantités d'un ordre déterminé, ne doivent pas être substituées dans les intégrales de la forme

$$A\int dv.\,\partial u.\varepsilon'^{g}\sin.(kv+\beta-g\tau')\ ;$$

$$A'\int dv.\partial nt.\varepsilon'^{g}\cos.(kv+\beta-g\tau')\ ,$$

qui entrent dans les équations différentielles mêmes qui ont été intégrées. Pour avoir égard dans l'intégration, non seulement à la variabilité séculaire, inhérente aux élémens ε' et τ' de l'orbite de la Terre, mais aussi aux termes périodiques multipliés par les coefficiens différentiels de ces mêmes élémens, on doit faire $\partial u=0$, $\partial nt=0$ dans les fonctions qu'on sait ne pouvoir donner que des quantités de l'ordre subséquent.

Transportons nous au commencement de ce Mémoire, et examinons de plus près la valeur de x déterminée par l'équation

(A) ..... $x=B\int dv.\varepsilon'^{g}\sin.(kv+\beta-g\tau')$,

lorsqu'on y fait,

$$\varepsilon'^{g}\cos.g\tau' = M\cos.(p\nu+q)+M'\cos.(p'\nu+q')+\text{etc.}\ ;$$

$$\varepsilon'^{g}\sin.g\tau' = M\sin.(p\nu+q)+M'\sin.(p'\nu+q')+\text{etc.}\ ,$$

après avoir calculé séparément, à l'aide de nos trois formules [5], [7], et (*a*) la partie séculaire née des termes multipliés par $\delta\nu$, que l'on voit dans l'équation [2].

Sous une forme concise, nous écrirons

$$(\text{A}')\ \ldots\ldots\ \begin{cases} \varepsilon'^{g}\cos.g\tau' = \bar{\Sigma}\cdot M\cos.(p\nu+q)\ , \\ \varepsilon'^{g}\sin.g\tau' = \bar{\Sigma}\cdot M\sin.(p\nu+q)\ ; \end{cases}$$

ce qui transforme la valeur précédente en x en celle-ci;

$$x = B\int d\nu\cdot\bar{\Sigma}\cdot M\sin.(k\nu+\beta-p\nu-q)\ ,$$

et donne, en exécutant l'intégration indiquée;

$$(\text{A}'')\ \ldots\ldots\ x = -B\cdot\bar{\Sigma}\cdot\frac{M}{k-p}\cos.(k\nu+\beta-p\nu-q)\ .$$

Cette formule exige, en général, la connaissance des coefficiens M, M', M'', etc.; p, p', p'', etc. Mais, dans le cas particulier, où *tous* les coefficiens p, p', p'', etc. sont très-petits en comparaison du coefficient désigné par k, on peut remplacer

$$\frac{M}{k-p}\quad\text{par}\quad\frac{M}{k}\left(1+\frac{p}{k}+\frac{p^2}{k^2}+\text{etc.}\right)\ ;$$

et alors la valeur précédente de x peut, d'abord, être écrite ainsi;

$$-\frac{B}{k}\Big\{\cos.(k\nu+\beta)\cdot\bar{\Sigma}\cdot\ M\cos.(p\nu+q)+\sin.(k\nu+\beta).\bar{\Sigma}\cdot\ M\sin.(p\nu+q)\Big\}$$

$$-\frac{B}{k^2}\Big\{\cos.(k\nu+\beta)\cdot\bar{\Sigma}\cdot p\,M\cos.(p\nu+q)+\sin.(k\nu+\beta)\cdot\bar{\Sigma}\cdot p\,M\sin.(p\nu+q)\Big\}$$

$$-\frac{B}{k^3}\Big\{\cos.(k\nu+\beta)\cdot\bar{\Sigma}\cdot p^2M\cos.(p\nu+q)+\sin.(k\nu+\beta)\cdot\bar{\Sigma}\cdot p^2M\sin.(p\nu+q)\Big\}$$

$$-\text{etc.}$$

Or, il est clair, que la première ligne du second membre de cette équation est équivalente au terme

$$-\frac{B}{k}.\varepsilon'^{g}\cos.(k\nu+\beta-g\tau')\ :$$

donc, en négligeant les termes multipliés par p, p^2, etc. qui sont, en réalité, très-petits comparativement au premier terme, on peut réduire la valeur de x à

$$(A''')\ \ldots\ldots\qquad x=-\frac{B}{k}.\varepsilon'^{g}\cos.(k\nu+\beta-g\tau')\ ;$$

c'est-à-dire à la valeur que l'on obtient immédiatement, en intégrant le second membre de l'équation (A), comme si les élémens ε' et τ' étaient des quantités tout-à-fait constantes. De sorte que, pour avoir égard à leur variabilité séculaire, il suffit de calculer les termes périodiques avec les valeurs variables de ces mêmes élémens. C'est sur ce principe, qui facilite singulièrement les intégrations, qu'est fondé le développement de tous les coefficiens qui affectent les termes périodiques appartenans aux trois perturbations δs, δu, δnt des coordonnées elliptiques de la Lune. Mais, si on demande en outre, que les intégrations soient conduites de manière à pouvoir tenir compte des coefficiens différentiels des élémens ε' et τ', il suffira d'observer, que la série précédente revient à dire que l'on a ;

$$\begin{aligned}(A^{iv})\ \ldots\ldots\qquad x=&-\frac{B}{k}\,\varepsilon'^{g}\cos.(k\nu+\beta-g\tau')\\
&-\frac{B}{k^2}\left\{\cos.(k\nu+\beta).\frac{d.[\varepsilon'^{g}\sin.g\tau']}{d\nu}-\sin.(k\nu+\beta).\frac{d.[\varepsilon'^{g}\cos.g\tau']}{d\nu}\right\}\\
&+\frac{B}{k^3}\left\{\cos.(k\nu+\beta).\frac{d^2.[\varepsilon'^{g}\cos.g\tau']}{d\nu^2}+\sin.(k\nu+\beta).\frac{d^2.[\varepsilon'^{g}\sin.g\tau']}{d\nu^2}\right\}\\
&+\frac{B}{k^4}\left\{\cos.(k\nu+\beta).\frac{d^3.[\varepsilon'^{g}\sin.g\tau']}{d\nu^3}-\sin.(k\nu+\beta).\frac{d^3.[\varepsilon'^{g}\cos.g\tau']}{d\nu^3}\right\}\\
&+\text{etc.}\ ;\end{aligned}$$

ce qui offre le moyen d'exprimer indéfiniment la valeur de x par les coefficiens différentiels $\frac{d\varepsilon'}{d\nu}$, $\frac{d^2\varepsilon'}{d\nu^2}$, etc. ; $\frac{d\tau'}{d\nu}$, $\frac{d^2\tau'}{d\nu^2}$, etc.

L'équation différentielle du second ordre qui détermine δu, peut être intégrée d'une manière analogue, après l'avoir préparée de manière que les fonctions inconnues, de la forme

$$\int dv.\delta u.F(v) , \qquad \int dv.\delta nt.f(v) ,$$

ne puissent produire aucun terme de l'ordre auquel on veut que l'approximation soit poussée. Alors, la question est réduite à intégrer une équation de la forme ;

$$(D) \ldots\ldots\ldots \qquad -\frac{d^2.\delta u}{dv^2} - i^2.\delta u =$$

$$H.\varepsilon'^g \cos.(kv+\beta-g\tau') - B\int dv.\varepsilon'^g \sin.(kv+\beta-g\tau') ,$$

pour chaque terme périodique que l'on veut considérer.

Ici, $i^2 = 1-\frac{3}{2}m^2$, et le terme que je laisse affecté du signe intégral, est celui né du développement de la fonction $-2m^2\int R_1 dv$.

En vertu des deux équations (A'), cette équation est équivalente à celle-ci ;

$$(D') \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{d^2.\delta u}{dv^2} - i^2\delta u =$$

$$H.\overline{\Sigma}.M\cos.(kv+\beta-pv-q)+\beta.\overline{\Sigma}.\frac{M}{k-p}\cos.(kv+\beta-pv-q) .$$

Donc, en intégrant d'après le principe ordinaire, ce qui est permis, puisque, ici, les coefficiens sont des quantités absolument constantes, si l'on fait, pour plus de simplicité;

$$N=\frac{M}{(k-p)^2-i^2} ; \qquad G=\frac{N}{k-p} ,$$

l'on aura

$$(D'') \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \delta u =$$

$$H.\overline{\Sigma}.N\cos.(kv+\beta-pv-q)+B.\overline{\Sigma}.G\cos.(kv+\beta-pv-q) .$$

Maintenant, si l'on néglige le carré de p, l'on a

$$N = \frac{M}{k^2 - i^2} + \frac{2k.pM}{(k^2 - i^2)^2} \; ;$$

$$G = \frac{M}{k(k^2 - i^2)} + \frac{pM}{(k^2 - i^2)} \cdot \left\{ \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k^2 - i^2} \right\} \; ;$$

donc, en faisant

$$A = \frac{H + \dfrac{B}{k}}{k^2 - i^2} \; ; \qquad C = \frac{B}{k} \; ,$$

l'équation (D″) donne

$$(D''') \ldots\ldots \quad \delta u = A \cdot \bar{\Sigma} \cdot M \cos.(k\nu + \beta - p\nu - q) + \frac{2k}{(k^2 - i^2)} \left\{ A + \frac{C}{2k^2} \right\} \cdot \bar{\Sigma} \cdot pM \cos.(k\nu + \beta - p\nu - q) \; .$$

Cela posé, si l'on observe que,

$$\bar{\Sigma} \cdot M \cos.(k\nu + \beta - p\nu - q) = \cos.(k\nu + \beta) . \varepsilon'^g \cos. g\tau' + \sin.(k\nu + \beta) . \varepsilon'^g \sin. g\tau' \; ;$$

$$\bar{\Sigma} \cdot pM \cos.(k\nu + \beta - p\nu - q) = \cos.(k\nu + \beta) . \frac{d.[\varepsilon'^g \sin. g\tau']}{d\nu} - \sin.(k\nu + \beta) . \frac{d.[\varepsilon'^g \cos. g\tau']}{d\nu} \; ,$$

l'on en conclura, que l'expression précédente de δu peut être mise sous cette forme;

$$(D^{iv}) \ldots\ldots \quad \delta u = A . \varepsilon'^g \cos.(k\nu + \beta - g\tau') - \left(A + \frac{C}{2k^2} \right) \cdot \frac{2k . \varepsilon'^{g-1}}{(k^2 - i^2)} \cdot \frac{d\varepsilon'}{d\nu} \sin.(k\nu + \beta - g\tau') + \left(A + \frac{C}{2k^2} \right) \cdot \frac{2kg . \varepsilon'^g}{(k^2 - i^2)} \cdot \frac{d\tau'}{d\nu} \cos.(k\nu + \beta - g\tau') \; .$$

Les coefficiens A et C étant connus *séparément* par la méthode même qui a été suivie dans la formation, et dans l'intégration de l'équation différentielle en δu, on pourrait obtenir, *a priori*, à l'aide de la formule (D^{iv}) les deux termes de la forme

$$\delta u = P.\cos.(k\nu+\beta-g\tau')+Q.\sin.(k\nu+\beta-g\tau')\ ,$$

définis par LAPLACE à la page 214 du 3.ième Volume de la Mécanique Céleste. Mais le second terme $Q.\sin.(k\nu+\beta-g\tau')$ ne constitue pas une *approximation ultérieure;* il est associé au premier dès que l'on veut avoir égard à la variation séculaire de $\frac{d\varepsilon'}{d\nu}$ et $\frac{d\tau'}{d\nu}$. Cette condition modifie le mode d'intégrer l'équation (D), mais elle doit être satisfaite sans l'addition de l'intégrale

$$+12m^2H'\int d\nu.\delta u.\Sigma.M\sin.(k\nu+\beta-p\nu-q)$$

dans le second membre de l'équation (D′), puisque cette intégrale a déjà été prise en considération en formant les deux parties distinctes qui composent le second membre de l'équation (D′). Il suit de là que l'on doit faire $\delta u=0$ dans cette intégrale, dès qu'il n'est point question de passer des quantités d'un ordre à celles de l'ordre suivant. On doit en conséquence *supprimer* les termes séculaires nés de l'intégrale précédente par la substitution du second terme de la formule (D$^{\text{IV}}$). Tels sont les motifs qui me font regarder comme inadmissibles les termes séculaires donnés par l'intégrale que j'ai désignée par $\int''\zeta d\nu$ en formant les équations [25] et [46]. D'ailleurs en poursuivant leur calcul on verrait qu'ils constituent une suite divergente.

Les termes séculaires, qui constituent l'intégrale $\int'\zeta d\nu$, déterminés par les équations [10], [45] et [51] naissent de l'intégrale $-2m^2\int R'd\nu$, en vertu de la *simple élimination* de la longitude moyenne $n't$ de la Terre en fonction de la longitude ν de la Lune: et, à ce titre, ils doivent être conservés, comme tous les autres de la forme $A\varepsilon'^2$ donnés par le développement des fonctions δR^{IV}, δR^{V} qui entrent dans le second membre de l'équation fondamentale (II)″ donné à la page 277 du premier Volume de ma Théorie du mouvement de la Lune. Ces termes sont les seuls, qui doivent être ajoutés aux primitifs, conformément à l'équation (*k*) que j'ai donnée dans le préambule de ce Mémoire.

Vers le commencement du mois d'avril dernier, je n'avais pas fait la distinction entre les fonctions séculaires $\int'\zeta d\nu$ et $\int''\zeta d\nu$: mais

des réflexions ultérieures m'ont persuadé qu'il fallait rejeter la fonction séculaire $\int'' \zeta\, dv$, comme entièrement étrangère aux développemens par lesquels on forme l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune.

NOTE

sur l'expression indéfinie *de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune*.

Il y a une différence essentielle entre le développement de l'intégrale $\int \zeta\, dv$ suivant les puissances du temps t, et son expression finie en termes progressifs et périodiques. Pour fixer les idées sur cette importante différence, voici comment on obtient l'équation qui doit être rapprochée de celle désignée par (k'). Soit

$$H = M^2 + M'^2 + M''^2 + M'''^2 + M^{iv\,2} + M^{v\,2} + M^{vi\,2} - E'^2 = \overline{\Sigma}.M^2 - E'^2 \;;$$

les sept coefficiens M, M', ... M^{vi} étant ceux qui doivent être pris dans la formation des deux équations

$$\varepsilon' \cos.\tau' = \overline{\Sigma}.M \cos.(at+q) \;;$$

$$\varepsilon' \sin.\tau' = \overline{\Sigma}.M \sin.(at+q) \;;$$

de manière qu'ils répondent respectivement aux arcs a, b, c, d, e, f, g; l'unité du temps t étant l'année Julienne de $365^{j}.\frac{1}{4}$.

En faisant le carré de ces deux équations, leur somme donnera

$$\varepsilon'^2 = \overline{\Sigma}.M^2 + \overline{\Sigma}.2MM' \cos.(at - bt + q - q') \;:$$

et en faisant $t = 0$, on doit avoir

$$E'^2 = \overline{\Sigma}.M^2 + \overline{\Sigma}.2MM' \cos.(q - q') \;.$$

Il suit de là, que, en intégrant depuis $t=0$, l'on a

$$\int(\varepsilon'^2-E'^2)n\,dt=-nt\cdot\overline{\Sigma}\cdot 2MM'\cos.(q-q')$$
$$+n\cdot\overline{\Sigma}\cdot\frac{2MM'}{a-b}\left\{\sin.(at-bt+q-q')-\sin.(q-q')\right\};$$

partant il est clair que l'on a;

$$\int(\varepsilon'^2-E'^2)n\,dt=nt\left\{\overline{\Sigma}\cdot M^2-E'^2\right\}$$
$$+n\cdot\overline{\Sigma}\cdot\frac{4MM'}{(a-b)}\sin.\frac{1}{2}(a-b)t\,.\cos.\left\{\frac{1}{2}(a-b)t+q-q'\right\};$$

ou bien

$$(p)\ \ldots\ldots\qquad C\int(\varepsilon'^2-E'^2)n\,dt=$$
$$CHnt-Cn\cdot\overline{\Sigma}\cdot MM'(a-b)\sin.(q-q').\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-b)t}{a-b}\right\}^2$$
$$+Cn\cdot\overline{\Sigma}\cdot 2MM'\cos.(q-q').\frac{\sin.(a-b)t}{a-b}\ .$$

L'équation (p) démontre que l'équation séculaire $\int\zeta dv$ peut croître indéfiniment à raison du terme progressif $CHnt$, tandis que la partie périodique ne peut pas surpasser la quantité

$$Cn\left\{\overline{\Sigma}\cdot\frac{4MM'}{a-b}\sin.(q-q')+\overline{\Sigma}\cdot\frac{2MM'}{a-b}\cos.(q-q')\right\}.$$

en prenant tous les termes positivement. Elle explique une proposition de la page 282 du 5.ième Volume de la Mécanique Céleste de Laplace, où il est dit: « Les inégalités séculaires du mouvement de révolution de » la Lune s'élévant à *plusieurs circonférences* etc. ».

En prenant pour M, M', M'', $\ldots\ldots M^{VI}$ les valeurs numériques données par M.r Le Verrier à la page 38 des Additions à la Connaissance des Temps pour l'année 1843, on aura $\overline{\Sigma}\cdot M^2=0,0011770\,65$ (*).

(*) D'après les valeurs de M, M', $\ldots\ldots M^V$, données par Lagrange à la page 272 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1782, l'on a $\Sigma.M^2=0,0011944\,35$: c'est-à-dire une quantité fort approchante de celle calculée avec des valeurs plus exactes des masses des planètes.

Le premier janvier de l'année 1801, à l'instant de midi moyen à l'Observatoire de Paris, on avait, pour l'excentricité E' de l'orbite de la Terre, $E' = 0,016792$: partant

$$H = 0,001177065 - 0,000281971 = 0,000895679 .$$

Les observations du siècle passé ont donné $n = 1732559354''$ pour le moyen mouvement sidéral de la Lune en cent années Juliennes. Donc $CHn = 13759'',4$. Il suit de là, que, abstraction faite de toute inégalité absolument périodique, si l'on fait

$$N = 1732559354'' - 13759'' = 1732545595'' ,$$

l'on aura $N\left(\frac{t}{100}\right)$ pour expression du véritable moyen mouvement sidéral de la Lune; le temps t étant évalué en années Juliennes de $365^{j},25$. De sorte que, depuis le commencement du 19^{ième} siècle, l'on a (pour un temps illimité)

$$v = 111^{\circ}.36'.43'' + N\left(\frac{t}{100}\right) + \textit{des termes périodiques} ,$$

pour expression de la longitude vraie de la Lune, comptée depuis l'équinoxe fixe.

Conformément aux résultats trouvés par M.^{r} Le Verrier dans ses deux Mémoires: « *Sur les variations séculaires des éléments des anciennes* « *planètes* » publiés dans les Volumes de la Connaissance des Temps pour les années 1843, 1844, je prends pour les constantes M, a, q: M', b, q'; ..... M^{vi}, g, q^{vi}, les valeurs suivantes:

$M = 0,000526$	$a = 2'',31714$	$q = 126^{\circ}.43'.15''$
$M' = 0,016611$	$b = 3'',72881$	$q' = 27^{\circ}.21'.26''$
$M'' = 0,002366$	$c = 22'',7504$	$q'' = 126^{\circ}.44'.8''$
$M''' = 0,010622$	$d = 5'',1124$	$q''' = 85^{\circ}.47'.45''$
$M^{iv} = -0,018925$	$e = 7'',5780$	$q^{iv} = 35^{\circ}.38'.43''$
$M^{v} = 0,011782$	$f = 16'',9920$	$q^{v} = -25^{\circ}.11'.33''$
$M^{vi} = -0,016913$;	$g = 17'',7161$;	$q^{vi} = -45^{\circ}.28'.59''$.

Cela posé, si l'on fait pour plus de simplicité:

$MM' \sin.(q-q') = (1)$; $MM' \cos.(q-q') = [1]$;

$MM'' \sin.(q-q'') = (2)$; $MM'' \cos.(q-q'') = [2]$;

etc. ; etc. ;

l'on aura

Log. (1) = 4, 935556 (+)	Log [1] = 4, 1527801 (−)
(2) = 0, 5048511 (−)	[2] = 4, 0950004 (+)
(3) = 4, 5634801 (+)	[3] = 4, 6254654 (+)
(4) = 4, 9979452 (−)	[4] = 3, 2715062 (+)
(5) = 4, 4650472 (+)	[5] = 4, 7377897 (−)
(6) = 4, 0816207 (−)	[6] = 4, 9451733 (+)
(7) = 5, 5885666 (−)	[7] = 4, 8064725 (−)
(8) = 6, 1770825 (−)	[8] = 5, 9654455 (+)
(9) = 5, 6562462 (+)	[9] = 6, 4928717 (−)
(10) = 6, 1913706 (+)	[10] = 6, 0755703 (+)
(11) = 6, 4288407 (−)	[11] = 5, 9184920 (−)
(12) = 5, 2166378 (+)	[12] = 5, 2783976 (+)
(13) = 5, 6509720 (−)	[13] = 3, 9304387 (+)
(14) = 5, 1178671 (+)	[14] = 5, 3908782 (−)
(15) = 4, 7338339 (−)	[15] = 5, 5982177 (+)
(16) = 6, 1884512 (−)	[16] = 6, 1099461 (−)
(17) = 6, 0676025 (+)	[17] = 5, 6515793 (−)
(18) = 6, 1303602 (−)	[18] = 6, 0737897 (+)
(19) = 6, 2893905 (−)	[19] = 6, 0363411 (−)
(20) = 6, 5000294 (+)	[20] = 5, 6934024 (+)
(21) = 5, 8394949 (−) .	[21] = 6, 2716174 (−) .

Actuellement, si l'on fait :

$$MM'\,(a-b)\,\text{sin.}(q-q')=(1).(a-b)=(1)'\ ;$$
$$MM''\,(a-c)\,\text{sin.}(q-q'')=(2).(a-c)=(2)'\ ;$$
etc. ;
$$MM'\,(a-b)^2\cos.(q-q')=[1].(a-b)^2=[1]'\ ;$$
$$MM''\,(a-c)^2\cos.(q-q'')=[2].(a-c)^2=[2]'\ ;$$
etc. ;

l'on aura

Log. $(1)'=5,0852888\,(-)$	Log. $[1]'=4,4522465\,(-)$
$(2)'=1,8151887\,(+)$	$[2]'=6,7156756\,(+)$
$(3)'=5,0099013\,(-)$	$[3]'=5,5183078\,(+)$
$(4)'=5,7190020\,(+)$	$[4]'=4,7136218\,(+)$
$(5)'=5,6316212\,(-)$	$[5]'=7,0709377\,(-)$
$(6)'=5,2691132\,(+)$	$[6]'=7,3201583\,(+)$
$(7)'=6,8678365\,(+)$	$[7]'=7,3650123\,(-)$
$(8)'=6,3170931\,(+)$	$[8]'=6,2454667\,(+)$
$(9)'=6,2416167\,(-)$	$[9]'=7,6636127\,(-)$
$(10)'=7,3140190\,(-)$	$[10]'=8,3208671\,(+)$
$(11)'=7,5745747\,(+)$	$[11]'=8,2099600\,(-)$
$(12)'=6,4630871\,(+)$	$[12]'=7,7712962\,(+)$
$(13)'=6,8320149\,(-)$	$[13]'=6,2925245\,(+)$
$(14)'=5,8782489\,(+)$	$[14]'=6,9114818\,(-)$
$(15)'=5,4357730\,(-)$	$[15]'=7,0020959\,(+)$
$(16)'=6,5803738\,(+)$	$[16]'=6,8937913\,(-)$
$(17)'=7,1424185\,(-)$	$[17]'=7,8012113\,(-)$
$(18)'=7,2308582\,(+)$	$[18]'=8,2747857\,(+)$
$(19)'=7,2631647\,(+)$	$[19]'=7,9835825\,(-)$
$(20)'=7,5059860\,(-)$	$[20]'=7,7053156\,(+)$
$(21)'=5,6992934\,(+)$.	$[21]'=5,9912144\,(-)$.

Cela posé, remarquons que la formule (p) peut être écrite ainsi

$$(p')\ldots\ldots\ldots\quad C\int(\varepsilon'^2-E'^2)n\,dt=$$

$$-Cn.(10)^4\sin.1''.\bar{2}.(a-b)MM'\sin.(q-q')\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-b)t}{100(a-b)}\right\}^2$$

$$-2Cn.\bar{2}.MM'\cos.(q-q')\left\{t-\frac{\sin.(a-b)t}{(a-b)}\right\}.$$

Mais nous avons;

$$\text{Log.}\,C=7,9467613\ ;\qquad \text{Log.}\,n=7,2386845\ ;$$

$$\text{Log.}\,[2Cn]=5,4865758\ ;\qquad \text{Log.}\left|(10)^4Cn\sin.1''\right|=3,8710207\ ;$$

donc, en ajoutant ces logarithmes constans aux logarithmes des quantités [1], [2], etc.; (1)', (2)', etc.; l'on aura ce résultat très-remarquable; savoir:

$$(p'')\ldots\ldots\ldots\quad C\int(\varepsilon'^2-E'^2)n\,dt=$$

$$+\ 0'',090429\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-b)t}{100(a-b)}\right\}^2+\ 0'',43578\left\{t-\frac{\sin.(a-b)t}{a-b}\right\}$$

$$-\ 0'',000048\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-c)t}{100(a-c)}\right\}^2-\ 0'',38157\left\{t-\frac{\sin.(a-c)t}{a-c}\right\}$$

$$+\ 0'',076019\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-d)t}{100(a-d)}\right\}^2-\ 1'',29432\left\{t-\frac{\sin.(a-d)t}{a-d}\right\}$$

$$-\ 0'',\ 38916\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-e)t}{100(a-e)}\right\}^2-\ 0'',05729\left\{t-\frac{\sin.(a-e)t}{a-e}\right\}$$

$$+\ 0'',\ 31826\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-f)t}{100(a-f)}\right\}^2+\ 1'',67635\left\{t-\frac{\sin.(a-f)t}{a-f}\right\}$$

$$-\ 0'',\ 13808\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-g)t}{100(a-g)}\right\}^2-\ 2'',70240\left\{t-\frac{\sin.(a-g)t}{a-g}\right\}$$

$$-\ 5'',\quad 4809\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(b-c)t}{100(b-c)}\right\}^2+\ 1'',96358\left\{t-\frac{\sin.(b-c)t}{b-c}\right\}$$

$$-\ 1'',\ 5421\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(b-d)t}{100(b-d)}\right\}^2-28'',3153o\left\{t-\frac{\sin.(b-d)t}{b-d}\right\}$$

$$+\ 1'',\ 2961\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(b-e)t}{100(b-e)}\right\}^2+95'',\ 3669\left\{t-\frac{\sin.(b-e)t}{b-e}\right\}$$

$$+15'',\ 3123\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(b-f)t}{100(b-f)}\right\}^2-36'',\ 4793\left\{t-\frac{\sin.(b-f)t}{b-f}\right\}$$

$$-27'',\ 8996\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(b-g)t}{100(b-g)}\right\}^2+25'',413_{7}o\left\{t-\frac{\sin.(b-g)t}{b-g}\right\}$$

$$-\ 2'',\ 1583o\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(c-d)t}{100(c-d)}\right\}^2-\ 5'',\ 8207\left\{t-\frac{\sin.(c-d)t}{c-d}\right\}$$

$$+\ 5'',\ 04702\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(c-e)t}{100(c-e)}\right\}^2-\ o'',\ 26123\left\{t-\frac{\sin.(c-e)t}{c-e}\right\}$$

$$-\ o'',\ 56129\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(c-f)t}{100(c-f)}\right\}^2+\ 7'',\ 54143\left\{t-\frac{\sin.(c-f)t}{c-f}\right\}$$

$$+\ o'',\ 20267\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(c-g)t}{100(c-g)}\right\}^2-12'',\ 1561\left\{t-\frac{\sin.(c-g)t}{c-g}\right\}$$

$$-\ 2'',\ 82745\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(d-e)t}{100(d-e)}\right\}^2+39'',\ 4841\left\{t-\frac{\sin.(d-e)t}{d-e}\right\}$$

$$+10'',\ 3143\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(d-f)t}{100(d-f)}\right\}^2+13'',\ 7453\left\{t-\frac{\sin.(d-f)t}{d-f}\right\}$$

$$-12'',\ 6439\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(d-g)t}{100(d-g)}\right\}^2-36'',\ 3384\left\{t-\frac{\sin.(d-g)t}{d-g}\right\}$$

$$-13'',\ 6203\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(e-f)t}{100(e-f)}\right\}^2+33'',\ 3o5o\left\{t-\frac{\sin.(e-f)t}{e-f}\right\}$$

$$+23'',\ 8239\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(e-g)t}{100(e-g)}\right\}^2-15'',\ 1348\left\{t-\frac{\sin.(e-g)t}{e-g}\right\}$$

$$-\ o'',\ 3718\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(f-g)t}{100(f-g)}\right\}^2+57'',\ 3o51\left\{t-\frac{\sin.(f-g)t}{f-g}\right\}.$$

Les élémens employés dans le calcul de cette formule donnent, pour l'excentricité E' de l'orbite de la Terre, et pour la longitude de τ' du périhélie, les valeurs qui avaient lieu, effectivement, au commencement du 19^{ième} siècle: car l'on en tire

$$\Sigma \cdot M \sin. q = +0,016560\text{1} \; ; \qquad \Sigma \cdot M \cos. q = -0,00277376 \; ;$$

$$E' = \sqrt{(\Sigma \cdot M \sin. q)^2 + (\Sigma \cdot M \cos. q)^2} = 0,01679091 \; ;$$

$$\text{tang.}\, \tau' = \frac{\Sigma \cdot M \sin. q}{\Sigma \cdot M \cos. q} \; ; \qquad \tau' = 99^\circ. 30' 31'' \; .$$

En développant les *sinus*, le terme multiplié par la première puissance du temps t disparaît dans le second membre de l'équation (p'') et l'on a une série de la forme

$$(p''') \ldots\ldots\ldots \qquad C \int (\varepsilon'^2 - E'^2) n \, dt =$$

$$A \left(\frac{t}{100}\right)^2 + A' \left(\frac{t}{100}\right)^3 + A'' \left(\frac{t}{100}\right)^4 + \text{etc.}$$

Le coefficient A est immédiatement connu par la sommation des 21 parties qui le composent. Et pour obtenir le coefficient A' il suffira d'ajouter aux logarithmes des quantités $[1]'$, $[2]'$, etc., le logarithme constant

$$\text{Log.} \left\{ \frac{(10)^6}{3} . Cn . \sin.^2 1'' \right\} = 0,0793744 \; ,$$

et de changer ensuite le signe du nombre correspondant. On trouve ainsi;

$$A = -11'', 15193 \; ; \qquad A' = -0'', 0153379 \; .$$

Il y a donc un accord satisfaisant entre ces derniers résultats et ceux obtenus dans le préambule de ce Mémoire. Et la formule finie (p'') conserve en outre le très-grand avantage d'être appliquable pour un temps illimité, ou du moins pour un fort grand nombre de siècles.

On ne doit pas oublier que les erreurs encore existantes sur les quantités M, a, q; M', b' q'; etc. dépendantes de la masse des planètes, empêchent d'attribuer à cette formule une exactitude sans bornes. Elle donne la loi de la variation séculaire du moyen mouvement de la

Lune, mais on sera forcé de modifier les quantités constantes qui multiplient le temps, à mesure que, par les observations, on découvrira quelques-unes des petites variations qui peuvent encore affecter les masses adoptées pour les sept planètes plus anciennes.

Le terme progressif $137'',29583.t$, que la formule (p'') renferme est associé aux termes périodiques d'une manière indestructible, mathématiquement parlant. C'est dans l'acte du développement suivant les puissances de t que ce terme disparaît. La série ainsi obtenue a perdu le caractère de la périodicité, qui est inhérent à ses différens termes; néanmoins, la petitesse des différences $a-b$, $a-c$, etc., nous démontre que les deux premiers termes

$$A\left(\frac{t}{100}\right)^2+A'\left(\frac{t}{100}\right)^3$$

du développement de l'équation séculaire, suffisent pour comparer avec la théorie les plus anciennes éclipses dont nous avons connaissance avec certitude.

L'équation (p'') étant mise sous la forme

$$C\int(\varepsilon'^2-E'^2)n\,dt-137'',29583.t$$
$$=\bar{\Sigma}.G\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-b)t}{100\,(a-b)}\right\}^2+\bar{\Sigma}.H.\frac{\sin.(a-b)t}{a-b}$$

on voit que le second membre sera composé de la somme, ou de la différence des deux *mêmes* nombres, relativement à deux valeurs de t égales et de signe contraire: par exemple, en faisant successivement $t=-(10)^4$, $t=(10)^4$ on obtient;

$$-83749'',26+1387870'',88=+362°.15'.22'';$$

$$-83749'',26-1387870'',88=-408°.47'.\ 0''.$$

De sorte que le centre de gravité de la Lune, depuis le 1.er janvier de l'année 8999 avant notre ère, a parcouru (abstraction faite des inégalités à courte période) un arc égal à $N(10)^4+362°.15'.22''$; tandis que, depuis le 1.er janvier de l'année 1801 jusqu'au 1.er janvier de l'année

11801, l'arc parcouru sera égal à $N(10)^{\frac{1}{2}} + 408^{\circ}.\,47'.\,0''$; le coefficient N étant égal à $17325455'',95$.

On avait à la première de ces deux époques:

$$E' = \textit{excentricité de l'orbite de la Terre} = 0,0187\ ;$$

et à la seconde on aura :

$$E' = 0,0115\ .$$

On peut développer de la même manière l'intégrale

$$C'.\int d\varphi.(\varepsilon'^{4} - E'^{4})\ ,$$

qui fait partie de l'équation séculaire. En effet; nous avons l'équation

$$\varepsilon'^{4} - E'^{4} = (\overline{\Sigma}.M^{2})^{2} - E'^{4} + \left\{\varepsilon'^{2} - \overline{\Sigma}.M^{2}\right\}\left\{2.\overline{\Sigma}.M^{2}\right.$$
$$\left. + \left\{\overline{\Sigma}.2\,MM'\cos.(at - bt + q - q')\right\}^{2}\right.\ ,$$

qui donne;

$$\varepsilon'^{4} - E'^{4} = -\left\{E'^{2} - \overline{\Sigma}.M^{2}\right\}^{2} + \left\{\varepsilon'^{2} - E'^{2}\right\}\left\{2.\overline{\Sigma}.M^{2}\right.$$
$$\left. + \left\{\overline{\Sigma}.2MM'\cos.(at - bt + q - q')\right\}^{2}\right.\ .$$

Donc, en multipliant par $C'.n\,dt$, et intégrant, il viendra

$$C'.\int n\,dt(\varepsilon'^{4} - E'^{4}) =$$
$$-C'.\left\{E'^{2} - \overline{\Sigma}.M^{2}\right\}^{2} nt + 2\,C'.\overline{\Sigma}.M^{2}.\int n\,dt\,(\varepsilon'^{2} - E'^{2})$$
$$+ C'.\int n\,dt\left\{\overline{\Sigma}.2\,MM'\cos.(at - bt + q - q')\right\}^{2}\ .$$

Mais

$$E'^{2} - \overline{\Sigma}.M^{2} = -H = -0,00089\,5679\ ,$$

et

$$\text{Log.}\,C'n = 5,8933326\ ;$$

partant l'on a

$$C'.\int n\,dt\,(\varepsilon'^{4} - E'^{4}) =$$
$$-0'',627535\,.\,t + 0,000106286\int n\,dt\,(\varepsilon'^{2} - E'^{2})$$
$$+ C'.\int n\,dt\left\{\overline{\Sigma}.2\,MM'\cos.(at - bt + q - q')\right\}^{2}\ .$$

Actuellement, si l'on fait

$$MM' = N_{(1)} \; ; \qquad MM'' = N_{(2)} \ldots\ldots ; \qquad M^{v}M^{vi} = N_{(21)} \; ;$$

$$\varphi_{(1)} = (a-b)t + q - q'' \; ; \qquad \varphi_{(2)} = (a-c)t + q - q'' \; ;$$

$$\varphi_{(3)} = (a-d)t + q - q''' \; ; \quad \ldots\ldots\ldots ; \quad \varphi_{(21)} = (f-g)t + q^{v} - q^{vi} \; ;$$

on trouvera, avec les valeurs numériques précédentes;

$$C'.nt.\overline{\Sigma}.N^{2}_{(1)} = t.\,0'',386276 \; ;$$

ce qui donne, en développant le polynome compris sous le signe $\overline{\Sigma}\cdot$, et intégrant;

$$C'.\int n\,dt\,(\varepsilon'^{4} - E'^{4}) =$$

$$-t.\,0'',241259 + 0,000106282.\int n\,dt.(\varepsilon'^{2} - E'^{2})$$

$$+\frac{1}{2}\,C'n\cdot\overline{\Sigma}\cdot\frac{N^{2}_{(1)}}{\varphi'_{(1)}}.\sin.2\,\varphi_{(1)}$$

$$+2\,C'n\cdot\overline{\Sigma}\cdot\frac{N_{(1)}\cdot N_{(2)}}{\varphi'_{(1)}+\varphi'_{(2)}}\sin.(\varphi_{(1)}+\varphi_{(2)})$$

$$+2\,C'n\cdot\overline{\Sigma}\cdot\frac{N_{(1)}\cdot N_{(2)}}{\varphi'_{(1)}-\varphi'_{(2)}}\sin.(\varphi_{(1)}-\varphi_{(2)}) \; .$$

Dans cette équation l'on a fait;

$$\varphi'_{(1)} = \frac{d\varphi_{(1)}}{dt} \; , \qquad \varphi'_{(2)} = \frac{d\varphi_{(2)}}{dt} \; ; \qquad \text{etc.}$$

Le premier signe $\overline{\Sigma}\cdot$, multiplié par $\frac{1}{2}\cdot C'n$, comprend une somme composée de 21 termes: chacun des deux autres en comprend 210. Pour le moment il suffit d'avoir réduit cette seconde intégrale à des termes que l'on peut calculer à l'aide des élémens qui nous ont donné tous les termes de la première.

ERRATA (*)

DU TOME PREMIER

DE LA THÉORIE DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

Page	Ligne	
61.	1	*(en remontant).* On doit ajouter à la valeur de x le troisième terme $+\frac{Bm}{k^2}\varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(kv+\beta-n\tau')$
533.	1	$\sin.2Ev+2gv-2cv.e^2\gamma^2\left(\frac{15}{16}+\frac{15}{16}+\frac{15}{16}=\frac{45}{16}\right)m$
559.	2	$\sin.2E.nt+2g.nt-2c.nt.e^2\gamma^2\left\{\frac{105}{64}-\frac{345}{64}+\frac{15}{8}=-\frac{15}{8}\right\}m$
581.	15	$\sin.2E.nt+2g.nt-2c.nte^2\gamma^2\left(-\frac{15}{8}m\right)$
611.	11	$\sin.2Ev+2gv-2cv\}-0'',464\,(5)\}$
635.	10	$+\frac{225}{64}m^2e^2$ au lieu de $+\frac{45}{64}m^3e^2$
	11	$+\frac{2115}{128}m^3e^2$ au lieu de $+\frac{2475}{128}m^3e^2$
636.	4	$\left(+\frac{225}{64}+\frac{1}{6}=\frac{707}{192}\right)m^2e^2+\frac{2115}{128}m^3e^2$
	6	$+\left(\frac{225}{64}+\frac{1}{6}=\frac{707}{192}\right)m^2e^2$
658.	15	$-\left(\frac{165}{128}+\frac{15}{4}+\frac{165}{128}=\frac{405}{64}\right)m^3$

(*) Je profite de cette circonstance pour publier cet *Errata*.

Page	Ligne	
	14	$-\left(\frac{707}{192}-\frac{707}{192}=0\right)m^2e^2$
664.	16	$\left(\frac{2115}{128}-\frac{2115}{128}=0\right)m^3e^2$
	20	$-\left(\frac{19}{16}+\frac{763}{64}-\frac{9}{8}-\frac{707}{192}=\frac{797}{96}\right)m^2e^4$
665.	2	$-\left(\frac{405}{32}+\frac{15}{4}-\frac{15}{4}=\frac{405}{32}\right)m^3$
674.	11	Le coefficient de cos.o.nt doit être augmenté de o″, 1619(5) — o″, 0121(6) = o″, 1498, et devient égal à 3423″, 3032.
	15	— o″, 0545(6) au lieu de — o″, 0162(6

ERRATA

DU TOME SECOND

854.	4	(*en remontant*) $e^2\left(-\frac{45}{16}m^3\right)$ au lieu de $e^2\left(-\frac{45}{16}m^4\right)$
855.	10	$e^2m^2\left\{\frac{225}{64}+\left(\frac{2475}{128}-\frac{45}{16}=\frac{2115}{128}\right)m+\left(\frac{165103}{2048}-\frac{225}{128}+\frac{227}{64}=\frac{168767}{2048}\right)m^2\right.$ au lieu de $e^2m^2\left(\frac{45}{64}+\frac{2475}{128}m+\frac{164927}{2048}m^2\right)$

RECHERCHES HISTORIQUES

SUR LA PREMIÈRE EXPLICATION DE L'ÉQUATION SÉCULAIRE

DU

MOYEN MOUVEMENT DE LA LUNE

D'APRÈS LE PRINCIPE DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE

PAR

JEAN PLANA

Lues dans la Séance du 7 décembre 1856.

En lisant les deux pages 359 et 360 du 5.ème Volume de la Mécanique Céleste, dans lesquelles, LAPLACE, expose l'histoire de cette mémorable découverte, on y voit LAGRANGE cité uniquement pour avoir tenté, sans succès, de trouver la cause et la loi de ce phénomène dans sa Pièce qui a remporté le prix de Mathématiques pour l'année 1774. Effectivement, c'est un fait incontestable que, à cette époque, LAGRANGE, croyait à l'impossibilité de dériver cette équation séculaire des équations ordinaires du mouvement de trois corps, formées en considérant les centres du Soleil, de la Terre et de la Lune comme trois centres d'action; centres desquels émane, suivant la loi primordiale, la résultante de leurs masses attractives censées composées de couches parfaitement sphériques.

Mais en s'écartant de la figure sphérique, LAGRANGE avait modifiées les équations primitives, et s'est attaché à examiner, si l'influence des nouveaux termes, introduits par la figure non sphérique de la Terre, pouvait offrir l'explication demandée par l'Académie des Sciences de Paris; ce qui l'a conduit à démontrer qu'il était impossible de la tirer de cette source.

Quelques années plus tard (en 1780) LAGRANGE a considéré la même question sous un autre point de vue dans la dernière section de son célèbre Mémoire *Sur la théorie de la Libration de la Lune* publié dans le Volume de l'Académie de Berlin pour cette année. Et là, par une analyse savante et profonde, il démontre qu'il est impossible de faire ressortir l'équation séculaire de la Lune de la considération des termes dûs à la figure non-sphérique de sa masse.

Après des recherches aussi éloignées de la cause ordinaire, LAGRANGE croyait avoir épuisé toutes les hypothèses admissibles, et il a exprimé sa conviction sur cette impossibilité d'une manière qui ne laisse pas la moindre part au doute; car son opinion est ainsi conçue: « J'ai fait » voir ailleurs que cette accélération ne pouvait être produite par la » non-sphéricité de la Terre; mais il était nécessaire d'examiner en par- » ticulier l'effet de la non-sphéricité de la Lune, à cause de la circons- » tance de l'égalité entre la rotation et la révolution de cette planète; » et cet examen achève de prouver l'impossibilité d'expliquer l'équation » séculaire de la Lune par la Théorie de la gravitation » (page 213 du Vol. cité). Une telle conclusion devenait alors d'autant plus accablante qu'elle était conforme à celle exprimée par EULER peu d'années auparavant dans sa Pièce, qui a remporté le prix de l'année 1770. Car il la finissait en disant: « La nouvelle Théorie de la Lune, que j'ai l'honneur » de présenter ici à l'Académie, fixe absolument toutes les inégalités de » ce satellite; il n'y en a aucune qui soit restée incertaine, et mainte- » nant il paraît bien constaté, que l'équation séculaire du mouvement » de la Lune *ne saurait être produite par les forces de l'attraction.* »

Ainsi, les efforts réunis de ces deux grands Géomètres n'avaient pas réussi, ni en 1770, ni en 1780, à faire cesser tout-à-fait la justesse de l'épigraphe *Errantemque canit Lunam*, empruntée par EULER à VIRGILE dans sa Pièce couronnée.

En présence de cette difficulté, des hommes donés d'une aussi puissante pénétration, ne laissaient pas de penser, ou que le problème en question était par lui-même très-difficile, ou qu'il y avait dans la conception des causes agissantes l'oubli complet de quelque circonstance, qui, jusque là, n'avait pas été prise en considération. Mais dans cette vue on pouvait encore s'égarer; et le même EULER, entraîné probablement par les résultats de son fils Jean Albert, et par ceux obtenus dans le même temps par BOSSUT dans sa Pièce couronnée de l'année 1762, ne s'est

pas fait scrupule de déclarer dans sa Pièce de l'année 1772, que « sans » aucun doute, l'équation séculaire de la Lune était l'effet de la résistance » du milieu dans lequel les planètes se meuvent. » D'Alembert quelques années auparavant (en 1768) s'était borné à confirmer la conclusion antérieure de Bossut en disant, que cette cause peut expliquer d'une manière plausible l'équation séculaire, sans toutefois pousser la fausseté de l'application au point de dire comme Bossut « qu'il ne fallait pas » chercher cette cause ailleurs que dans la résistance de l'éther (Voyez la page 420 du Tome V de ses Opuscules).

Quoique cette force passive ne soit nullement correspondante à l'effet dont il est ici question, il ne faudrait pas en conclure que l'existence d'une matière éthérée est inadmissible. Les phénomènes de la lumière, et probablement la résistance opposée au mouvement des corps très-peu denses et d'un fort grand volume, comme le sont ceux des comètes, autorisent à croire que l'éther remplit l'immensité des espaces célestes.

Sur ce point, Lagrange a exprimé positivement son opinion *peu de temps avant sa mort*, lorsqu'il appliquait ses formules aux variations séculaires des éléments des planètes produites par la résistance d'un milieu très-rare. Il commence cette application par ces mots: « Pour ne rien » laisser à désirer sur les variations séculaires des planètes, nous devons » encore considérer l'effet d'un milieu peu résistant dans lequel il est » possible qu'elles se meuvent, et où elles devraient nécessairement se » mouvoir, si la lumière était due aux oscillations d'un fluide » (Voyez la page 165 du second Volume de la Mécanique Analytique, édition de 1815). C'est *vers le même temps* qu'il a consigné dans ce Volume (aux pages 147, 148 et 151) son opinion, contraire à celle de Laplace, sur la possibilité d'un accroissement illimité des inclinaisons des orbites, et des excentricités des planètes dont les masses sont fort petites.

Depuis 1780, Lagrange avait en quelque sorte abandonné la Théorie de la Lune proprement dite, et avait dirigé ses recherches sur la Mécanique Céleste vers la *Théorie des variations séculaires des éléments des Planètes*, afin d'achever celle, bornée aux variations séculaires des inclinaisons et des nœuds, qu'il avait envoyée au mois d'octobre de l'année 1774 à l'Académie des Sciences de Paris. En rapprochant cette théorie de celle que le même Lagrange avait donnée en 1766 dans sa Pièce *Sur la Théorie des Satellites de Jupiter*, on voit qu'il avait fait des progrès immenses dans cet intervalle; qu'il avait lui-même démontré

la vérité de son épigraphe *Multum adhuc restat operis* empruntée à Sénèque; et on reconnait, que le don du génie ne dispense pas du pénible et continuel exercice de ses facultés.

Le nouveau Mémoire, dont nous parlons, développe toute la fécondité du principe général qu'il avait découvert en 1776 pour démontrer l'invariabilité séculaire des grands axes des orbites elliptiques des planètes: il a été publié dans son ensemble dans les deux Volumes de l'Académie de Berlin pour les années 1781-1782.

Laplace a donné une courte analyse de ce Mémoire à la page 318 du 5.ème Vol.e de sa *Mécanique Céleste* (Livre XV) sans y faire mention de la *continuation* publiée par Lagrange dans le Volume de la même Académie de Berlin pour l'année 1783 (publié en 1785). Cependant, cette continuation se compose de deux Mémoires tout-à-fait dignes de fixer l'attention, et d'être non-seulement cités mais appréciés dans une histoire des progrès de la Mécanique Céleste.

Le titre du premier est *Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes;* celui du second est *Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes.* Ils sont l'un et l'autre fort remarquables à plusieurs égards.

Dans le premier (page 170) il y a l'idée originale des variations périodiques, qui, quoique dépendantes de la configuration des planètes, peuvent être sensibles et avoir une fort longue période en raison d'une commensurabilité approchante dans le rapport de leurs moyens mouvements, comme Jupiter et Saturne en ont offert depuis un exemple frappant par la découverte de Laplace annoncée le 10 mai de l'année 1786 à l'Académie des Sciences.

Dans le second, que Lagrange qualifie comme un Supplément à sa *Théorie générale des variations séculaires*, il y a, explicitement, la formule propre à calculer les variations séculaires de l'élément désigné par *époque* dans le mouvement elliptique des planètes, parce qu'il en détermine la position à l'origine du temps.

Il est démontré par là: 1.° que ces variations sont nulles en bornant l'approximation à la première puissance des excentricités et des inclinaisons des orbites: 2.° que la destruction mutuelle des termes séculaires cesse d'avoir lieu en portant l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre du carré des excentricités et des inclinaisons des orbites, inclusivement.

Voici cette formule donnée à la page 216 du Volume de l'Académie

de Berlin pour l'année 1783. Soient

$$nt+\varepsilon=\int n\,dt+\varepsilon=p\ ,$$

la longitude moyenne d'une planète T, dont $\frac{T}{S}$ désigne le rapport de sa masse T à celle du Soleil représentée par S; et a sa moyenne distance au Soleil. Nommons de même

$$n't+\varepsilon'=\int n'\,dt+\varepsilon'=p'\ ,\quad \text{et}\quad a'$$

les quantités analogues relatives à une planète perturbatrice T'; sa masse par rapport au Soleil étant $\frac{T'}{S}$. Si l'on suppose développée la fonction

$$\left\{a^2-2aa'.\cos.(p-p')+a'^2\right\}^{-\frac{3}{2}}\ ,$$

par une série de la forme

$$(a,a')+(a,a')1.\cos.(p-p')+(a,a')2.\cos.2(p-p')+\text{etc.}\ ,$$

Lagrange démontre, que le coefficient différentiel

$$\frac{d\varepsilon}{dp}=\frac{d\varepsilon}{n\,dt}$$

de l'époque, sera exprimé de manière, que e, e' étant les excentricités des deux orbites; ϖ, ϖ' les longitudes de leurs aphélies; θ, θ' les longitudes de leurs nœuds; φ, φ' leurs inclinaisons par rapport à un plan fixe, l'on aura l'équation

$$\text{(L)}\ \ldots\ldots\ \frac{d\varepsilon}{dp}=\frac{d\varepsilon}{n\,dt}=(0)+(1)e^2+(2)e'^2+(3)ee'\cos.(\varpi'-\varpi)$$
$$-(2)\left\{(s-s')^2+(u-u')^2\right\}\ ;$$

où l'on a fait;

$$s=\text{tang.}\frac{\varphi}{2}.\sin.\theta\ ;\qquad s'=\text{tang.}\frac{\varphi'}{2}.\sin.\theta'\ ;$$

$$u=\text{tang.}\frac{\varphi}{2}.\cos.\theta\ ;\qquad u'=\text{tang.}\frac{\varphi'}{2}.\cos.\theta'\ ;$$

$$(0)=\frac{T'}{S}\left\{2a^3(a,a')-2a^2a'(a,a')_1\right\};$$

$$(1)=\frac{T'}{S}\left\{\frac{12a^3a'^2(a,a')+(3a^4a'-a^2a'^3).(a,a')_1}{8(a^2-a'^2)}\right\};$$

$$(2)=\frac{T'}{S}\left\{\frac{6a^3a'^2(a,a')+a^4a'(a,a')_1}{4(a^2-a'^2)}\right\};$$

$$(3)=\frac{T'}{S}\left\{\frac{(3a^4a'-15a^2a'^3).(a,a')-(a^5+6a^3a'^2-5aa'^4)(a,a')_1}{4(a^2-a'^2)}\right\};$$

Et pour déterminer les deux coefficients (a,a'), $(a,a')_1$, LAGRANGE fait

$$(a,a')=\frac{Ma'}{(a'^2-a^2)^2};\qquad (a,a')_1=\frac{6Na'}{(a'^2-a^2)^2};$$

et obtient pour M, N les deux séries

$$M=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{a'}\right)^2+\left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{a'}\right)^4+\left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{a'}\right)^6+\text{etc.};$$

$$N=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{a'}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1.1}{2.4}\cdot\left(\frac{a}{a'}\right)^3-\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\left(\frac{a}{a'}\right)^5-\text{etc.},$$

qui sont toujours convergentes, en établissant les dénominations de manière que l'on ait $\frac{a}{a'}<1$. On sait d'ailleurs que ces séries sont sommables par des transcendantes elliptiques (Voyez le second Volume de LEGENDRE *Sur les Fonctions elliptiques*, page 541 et suivantes).

En outre on sait, que, en désignant par

$$[a,a']+[a,a']_1.\cos.(p-p')+[a,a']_2.\cos.2(p-p')+\text{etc.},$$

le développement du radical

$$\sqrt{a^2-2aa'\cos.(p-p')+a'^2},$$

l'on a ;

$$(a.a')=\frac{[a,a']}{(a'^2-a^2)^2};\qquad (a,a')_1=-\frac{3a[a,a']_1}{a'(a'^2-a^2)^2};$$

ce qui fait dépendre le calcul des fonctions (a,a'), $(a,a')_1$ des mêmes transcendantes qui entrent dans les équations différentielles linéaires qui

déterminent les inégalités séculaires des excentricités, des aphélies, des inclinaisons et des nœuds des orbites (Voyez les pages 298 et 310 du 1.er Volume de la Mécanique Céleste).

J'ai corrigé l'erreur qui s'était glissée dans la valeur du coefficient (2) en y écrivant $a^{\frac{1}{2}}a'$ au lieu de $a^2a'^3$, ainsi que cela résulte des équations qui précèdent le N.° 22 dans ce Mémoire de LAGRANGE. Il n'est pas superflu d'ajouter que les coefficients (0), (1), (2), (3) sont donnés aux pages 203 et 213 du même Volume sous la forme avec laquelle ils ont été publiés en 1802 dans le 3.ème Volume de la Mécanique Céleste (p. 15); toutefois il faut observer que dans cette page on doit remplacer la troisième ligne par

$$\frac{m'}{8}\left\{aa'B^{(1)}+a^2a'\frac{dB^{(1)}}{da}\right\}.\left\{(p'-p)^2+(q'-q)^2\right\}+\text{etc.}\ ,$$

ainsi que cela a été fait par LAPLACE en 1805 à la page 53 du 4.ème Volume de la Mécaniqne Céleste.

Au reste, la formule (L) est conforme à l'équation plus générale

$$\frac{d\varepsilon}{ndt}=2a^2\left(\frac{dR}{da}\right)-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left\{1-\sqrt{1-e^2}\right\}.\left(\frac{dR}{de}\right)$$

trouvée en 1808 par LAGRANGE et LAPLACE après la découverte de l'équation

$$d\varepsilon=d\varpi.\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)+2a^2\left(\frac{dR}{da}\right)ndt$$

faite par POISSON (Voyez la page 6 du Supplément à la Méc.e Céleste).

On sait que cette formule générale comprend les termes séculaires et les termes périodiques: elle remplace avec avantage la formule connue antérieurement pour ce double objet, sur laquelle il est intéressant de lire les remarques exposées par LAPLACE aux pages 365 et 366 du 1.er Volume de la Mécanique Céleste.

Cela posé, il est évident que, en appliquant la formule (L) à un cas particulier pour lequel la partie séculaire des termes

$$(0)\ ;\quad (1)e^2\ ;\quad (3)ee'\cos.(\varpi-\varpi')\ ;\quad (2)\left\{(s-s')^2+(u-u')^2\right\}$$

serait séparément nulle, l'on aurait en intégrant

$$(\mathrm{L}')\ldots\ldots\ldots\qquad \varepsilon=(2)n\int e'^2dt\ .$$

Or, en prenant seulement le premier terme des séries M et N, l'on a;

$$(2) = -\frac{T'}{S}\left\{\frac{3}{2}\cdot\frac{a^3}{a'^3\left(1-\frac{a^2}{a'^2}\right)^2}+3\cdot\frac{a^5}{a'^5\left(1-\frac{a^2}{a'^2}\right)^2}\right\};$$

ou bien

$$(2) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{T'}{S}\cdot\left(\frac{a}{a'}\right)^3\left\{\frac{1+2\left(\frac{a}{a'}\right)^2}{\left(1-\frac{a^2}{a'^2}\right)^2}\right\}.$$

Donc en supposant la fraction $\left(\frac{a}{a'}\right)^2$ assez petite pour pouvoir la négliger comparativement à l'unité, l'on aura

$$(2) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{T'}{S}\cdot\left(\frac{a}{a'}\right)^3;$$

ce qui réduit l'équation (L′) à celle-ci;

$$(L'') \ldots\ldots\ldots \qquad \varepsilon = -\frac{3}{2}n\cdot\frac{T'}{S}\cdot\left(\frac{a}{a'}\right)^3\int e'^2 dt.$$

Maintenant, il faudra substituer ici la valeur séculaire du carré e'^2 de l'excentricité de la planète perturbatrice, censée préalablement déterminée en tenant compte de l'action de toutes les planètes qui auront concouru à la production de la valeur séculaire de e'; ce qui donne pour e'^2 une expression de la forme

$$e'^2 = \left\{A\sin.(kt+\beta)+A'\sin.(k't+\beta')+\text{etc.}\right\}^2 + \left\{A\cos.(kt+\beta)+A'\cos.(k't+\beta')+\text{etc.}\right\}^2;$$

où le nombre des coefficients A, A', A'', etc. sera $m+1$, si m est le nombre des masses perturbatrices T'', T''', T^{IV}, etc., qui agissent sur la planète T'.

Lagrange a appliqué la formule (L″) à *Jupiter* troublé par *Saturne*, ce qui lui a donné une quantité insensible; résultat bien différent de celui qu'il avait trouvé en 1765 par ses premières recherches sur le même sujet publiées dans le 3.ème Volume des *Miscellanea Taurinensia*. Préoccupé de l'idée que l'équation séculaire de la Lune ne pouvait pas

être déduite du principe de la gravitation universelle, il n'a pas senti, ni soupçonné, que sa même formule (L'') était capable de la lui donner d'une manière fort satisfaisante. Car, rien n'empêche de l'appliquer à toute masse T circulante autour d'une autre masse S beaucoup plus grande, et troublée par une troisième masse T', *qui serait elle-même troublée dans son mouvement elliptique autour du corps* S par d'autres masses T'', T''', etc. : c'est dans cette dernière considération que consiste l'essence de la cause de l'équation séculaire de la Lune, qui échappait ici à Lagrange, comme elle lui avait échappé dans ses autres recherches, toujours bornées à l'action directe et réciproque *de trois corps seulement*. En effet, en supposant que les lettres S, T, T' représentent, respectivement, les masses de la Terre, de la Lune et du Soleil; et les lettres a, a' les distances moyennes de la Lune et du Soleil au centre de la Terre, l'on aura

$$\left(\frac{T'}{S}\right)\cdot\left(\frac{a}{a'}\right)^3=\left(\frac{n'}{n}\right)^2 ;$$

le rapport $\frac{n'}{n}$ étant celui des moyens mouvements de la Terre autour du Soleil, et de la Lune autour de la Terre. D'après cela, la formule (L'') donne

$$(\mathrm{L}''') \ldots\ldots\ldots \qquad \varepsilon=-\frac{3}{2}m^2.n\int e'^2dt ,$$

en faisant $\frac{n'}{n}=m=0,074801$. La grandeur du coefficient

$$n=1732559''',54$$

(en prenant pour unité de temps l'année Julienne) rend cette valeur de ε fort sensible, après quelques siècles, quoique l'on ait en développant la valeur séculaire de e'^2, produite sur l'excentricité e' de l'orbite elliptique de la Terre par l'action des autres planètes,

$$\int e'^2dt=-\left(\frac{t}{100}\right)^2.0,0000729''' .$$

La formule (L''') est précisément celle qui a été annoncée par Laplace dans une Note publiée à la tête du Volume de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1785, et présentée le 19 novembre de l'année 1787 à la même Académie pour être publiée en 1788 dans le

Volume appartenant à l'année 1786. Le Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1783, où il y a la formule générale (L), a été publié en 1785, comme je l'ai déjà dit.

On voit maintenant comment cette découverte a pu échapper à Lagrange, quoique elle soit une conséquence fort simple d'un résultat très-remarquable qu'il avait obtenu le premier en considérant d'une manière abstraite les *variations séculaires des mouvements moyens des planètes*. C'est un de ces cas singuliers où la difficulté d'imaginer la cause surpasse la difficulté d'en calculer l'effet, dès que son existence a été reconnue. La théorie du son en offre un exemple: l'effet de la chaleur développée pendant les vibrations de l'air n'était pas difficile à calculer; mais il était fort difficile d'imaginer le mode de son action, et de sentir qu'il pouvait modifier sensiblement la vitesse de la propagation.

Tout ce que je viens d'exposer n'empêche pas de considérer Laplace comme le *premier Géomètre* qui a donné l'explication théorique de l'équation séculaire de la Lune, surtout si l'on considère qu'il l'a exposée en faisant voir, conformément aux observations, que la même cause qui accélère le moyen mouvement de la Lune, rallentit les moyens mouvements du périgée et du nœud: connexion qui est loin d'être évidente de prime abord. Et Lagrange a consacré lui-même les droits de Laplace à cette invention en finissant son Mémoire *Sur la théorie des variations des éléments des Planètes*, lu à l'Institut le 22 août de l'année 1808 par cet aveu mémorable: « Cette variation séculaire, dit-il (celle de » l'époque), est insensible dans Jupiter et dans Saturne, comme je l'ai » fait voir dans le *Mémoire sur les variations séculaires des mouvemens* » *moyens des Planètes* (Mém. de Berlin de 1783); mais elle devient » sensible dans la Lune, et donne l'explication de l'équation séculaire » de cette planète, comme M.r Laplace l'a reconnu le premier. » Néanmoins on pourrait élever des doutes sur l'étendue de la signification de cet aveu, en réfléchissant que Lagrange ajoute immédiatement après: « Voyez les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1786, et ceux de » l'Académie de Berlin pour 1792 et 1793 où j'ai donné l'application » de mes formules à la Lune. » Or, en lisant la préface de ce dernier Mémoire *Sur l'équation séculaire de la Lune*, il est impossible de ne pas avouer à soi-même qu'elle n'est pas tout-à-fait en harmonie avec la déclaration de 1808. En effet, voici comment Lagrange s'exprimait alors: « Dans la Théorie des variations séculaires des élémens des planètes

» qui est imprimée dans les Volumes des années 1781 et 1782 je n'avais » point considéré les variations des mouvemens moyens, parceque j'avais » cru pouvoir les regarder comme invariables à cause de l'invariabilité » des grands axes que j'avais démontrée d'une manière directe et générale. » Ayant ensuite examiné plus scrupuleusement ce point important de la » théorie des planètes, j'ai reconnu que les mouvemens moyens pou- » vaient être sujets à des variations séculaires dépendantes des carrés » des excentricités et des inclinaisons, et j'ai donné le premier dans un » Mémoire imprimé dans le Volume de 1783, la théorie et les formules » de ces variations. J'en fis alors l'application à Jupiter et Saturne; » mais n'ayant trouvé pour les variations de leurs mouvemens moyens » que des quantités presque insensibles, je pensai qu'il était inutile » d'étendre cette recherche aux autres planètes. D'autres objets m'ayant » ensuite fait perdre celui-ci de vue (probablement ces objets sont ceux » relatifs aux Mémoires publiés dans les Volumes pour les années 1784, » 1785 et 1786), je négligeai d'appliquer aussi mes formules à la Lune; » ce qui ne demandait que des substitutions numériques très-faciles et » même plus simples que pour les planètes principales. Vers la fin de » 1787 (*) Laplace annonça à l'Académie des Sciences de Paris qu'il » avait trouvé moyen d'expliquer l'équation séculaire de la Lune par la » variation de l'excentricité du Soleil; et par le Mémoire qu'il a donné » ensuite sur ce sujet, et qui est imprimé dans le Volume de 1786, » on voit que cette équation est produite par les mêmes termes qui » composent ma formule des variations du mouvement moyen. Comme » ce résultat est un des plus intéressants de la théorie générale des va- » riations séculaires, j'ai cru devoir le développer dans ce Mémoire pour » compléter mon travail sur une partie si importante de l'astronomie » physique. »

Certes, cette préface n'est pas très-favorable pour établir la priorité de Laplace dans un sens absolu. Et si l'on remarque, que la déclaration de Lagrange, publiée à la page 72 du Tome 9 des Mémoires de l'Institut, n'a pas été reproduite à la page 164 du second Volume de la *Mécanique Analytique*, où il est naturel de la chercher, on sera peut-être

(*) Lagrange, qui avait quitté Berlin pour se fixer à Paris en 1787, était probablement présent à cette séance de l'Académie.

porté à penser que, peu avant sa mort (arrivée le 10 avril de 1813), LAGRANGE était devenu moins facile pour sa concession à LAPLACE. Et quoique le second Volume de la Mécanique Analytique ait été publié en 1815, la préface, qui le précède, nous donne l'assurance que, jusqu'à la page 164, le manuscrit de LAGRANGE a été trouvé fort en ordre, rédigé par lui-même.

Mais LAPLACE a, pour ainsi dire, détruit tout argument qui serait contraire, ou seulement peu favorable, à la priorité de sa découverte en publiant en 1825 qu'il l'avait faite d'une toute autre manière que celle dont nous avons parlé. En effet, à la page 360 du 5.ème Volume de la Mécanique Céleste (Livre XV) on y lit ce morceau remarquable: « En m'occupant de la Théorie des satellites de Jupiter, je reconnus » que la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite de Jupiter devait » produire des équations séculaires dans leurs mouvements moyens. Je » m'empressai de transporter ce résultat à la Lune, et je trouvai que la » variation séculaire de l'excentricité de l'orbite terrestre produit, dans le » moyen mouvement de la Lune, l'équation séculaire déterminée par les » Astronomes. Je trouvai de plus que la même cause produit dans les mou- » vements du nœud et du périgée de l'orbite de la Lune des équations » séculaires. » Cependant une telle origine de cette découverte n'a pas été indiquée dans la Note par laquelle elle était annoncée, la première fois, par LAPLACE au monde savant. Cette Note publiée en 1787 à la tête du Volume de l'Académie de Paris, pour l'année 1785, est ainsi conçue: « ..... il restait cependant un phénomène Céleste, l'accélé- » ration du moyen mouvement de la Lune, que l'on n'avait pu jusqu'ici » ramener aux loix de la pesanteur: les Géomètres qui s'en étaient oc- » cupés avaient conclu de leurs recherches qu'il ne peut être produit » par la gravitation universelle, et pour l'expliquer on avait eu recours » à différentes hypothèses, telles que la résistance de l'éther, la trans- » mission successive de la gravité, l'action des comètes etc. Mais après » diverses tentatives je suis enfin parvenu à découvrir la véritable cause » de ce phénomène. J'ai trouvé que l'équation séculaire de la Lune ré- » sulte de l'action du Soleil sur ce satellite combinée avec la variation » de l'excentricité de l'orbite terrestre. Elle est périodique, et dépend » des mêmes arguments que le carré de cette excentricité. » Les satel- lites de Jupiter ne sont pas nommés dans cette Note: et ils ne sont pas nommés dans la préface mémorable et fort élaborée de LAPLACE du

Mémoire publié en 1788, et présenté par lui à l'Académie des Sciences le 19 novembre de l'année 1787. En 1802, cette même préface a été reproduite, avec quelques additions, comme une introduction à la Théorie de la Lune publiée dans le troisième Volume de la Mécanique Céleste: mais les satellites de Jupiter n'y sont pas cités comme ayant occasionné la découverte de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune: ils sont cités à la page 173 au sujet de l'inégalité du mouvement lunaire en latitude due à l'aplatissement de la Terre.

Pour mieux éclaircir l'assertion de la page 360 que j'ai rapportée, remarquons que la formule (L''') étant appliquée au *quatrième* satellite de Jupiter, donne (en nommant ε''' la valeur de ε qui s'y rapporte):

$$\varepsilon''' = -\left(\frac{t}{100}\right)^2 . 0'',46433 \ ;$$

c'est-à-dire une équation séculaire 22 fois plus petite environ que celle de la Lune.

Pour les trois autres satellites, l'équation séculaire donnée par la formule (L''') est encore plus petite; car, en nommant ε''', ε'', ε', ε les valeurs de ε qui se rapportent aux quatre satellites; et n''', n'', n', n leurs moyens mouvements autour du centre de Jupiter, l'on a, d'après les valeurs numériques données aux pages 83 et 97 du 4.ème Volume de la Mécanique Céleste;

$$\frac{n''}{n'''} = 2,332643 \ ; \qquad \frac{n'}{n'''} = 4,699569 \ ; \qquad \frac{n}{n'''} = 9,433419 \ ;$$

$$\varepsilon''' = -\frac{3}{2}(0,\ 00038519)^2 . n''' \int e'^2 dt \ ;$$

$$\varepsilon'' = -\frac{3}{2}(0,00165136)^2 . n'' \int e'^2 dt \ ;$$

$$\varepsilon' = -\frac{3}{2}(0,00081966)^2 . n' \int e'^2 dt \ ;$$

$$\varepsilon = -\frac{3}{2}(0,00040832)^2 . n \int e'^2 dt \ .$$

Donc nous avons

$$\varepsilon'' = \varepsilon'''.\ 2,3326\,43\left(\frac{0,\ 00165136}{0,\ \ 00385\,19}\right)^2 = -\,0'',\ \ 19908\left(\frac{t}{100}\right)^2 ;$$

$$\varepsilon' = \varepsilon'''.\ 4,699569\left(\frac{0,\ 00081966}{0,\ \ 00385\,19}\right)^2 = -\,0'',\ 098814\left(\frac{t}{100}\right)^2 ;$$

$$\varepsilon\ = \varepsilon'''\ 9,\ 133419\left(\frac{0,\ 00040832}{0,\ \ 00385\,19}\right)^2 = -\,0'',\ 049223\left(\frac{t}{100}\right)^2 .$$

Pour calculer la valeur de ε''', j'ai pris, conformément aux observations,

$$n''' = 2836\,4150'',\ 0$$

pour le nombre de secondes sexagésimales parcourues en $365^{j}\frac{1}{4}$ par le quatrième satellite autour du centre de Jupiter par son mouvement moyen sydéral. Relativement à l'orbite de Jupiter, j'ai pris

$$e' = 0,\ 04816\,21 + \frac{t}{2}.\,(0,\ 00000\,3054\,57) ;$$

ce qui donne pour l'intégrale $\int e'^2 dt$ la quantité

$$0,\ 04816\,1\,.\,\frac{1}{2}.\,(0,\ 00000\,3054\,57).\,t^2 ;$$

et par conséquent

$$\varepsilon''' = -\,\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{t}{100}\right)^2.\,(0,\ 00385\,19)^2.\,(0,\ 0305457).n'''.\,0,\ 04816\,1 ;$$

$$\varepsilon''' = -\left(\frac{t}{100}\right)^2.\,0'',\ 46433\ .$$

On sait que ces variations séculaires sont modifiées par la variation séculaire de l'équateur de Jupiter. Mais cette modification est fort petite même pour le quatrième satellite pour lequel elle est la plus grande. En effet, la formule posée au fond de la page 102 du 4.ème Volume de la Mécanique Céleste donne pour cette partie de ε''' (en secondes centésimales),

$$'Lb.t^2\left\{2\,(1-\lambda''')^2.974'',\ 19 - 3.\lambda'''^2.2946'',\ 95\right\} = 'Lb\,t^2.\,1298'',\ 935 ;$$

où $\lambda''' = 0,\ 134612$; $'L = 34444''$; $b = 0'',\ 070350$.

En réduisant les secondes $34444''$; $1298'',\ 935$ en parties du rayon, l'on aura

$$\text{Log.}\left\{34444 \cdot \frac{81}{250} \cdot \text{sin. } 1'' \text{ (sex.)}\right\} = 8,7332335 \ ;$$

$$\text{Log.}\left\{1298,935 \cdot \frac{81}{250} \cdot \text{sin. } 1'' \text{ (sex.)}\right\} = 7,3097076 \ ;$$

$$6,0429411 \ .$$

Donc en remplaçant b par sa valeur $0'',070350 \cdot \frac{81}{250} = 0'',0227934$ en secondes sexagésimales, l'on obtiendra

$$+\left(\frac{t}{100}\right)^2 \cdot 0'',025162$$

pour la quantité qui doit être ajoutée à la valeur précédente de ε''' ; ce qui donne par la réunion des deux variations séculaires ;

$$\varepsilon''' = -\left(\frac{t}{100}\right)^2 \left\{0'',46433 - 0'',025162\right\} = -\left(\frac{t}{100}\right)^2 \cdot 0'',43917 \ .$$

La troisième variation séculaire, celle née de l'action réciproque des satellites, est encore plus petite. Sur cela on peut consulter les formules données à la page 75 du 4.ème Volume de la Mécanique Céleste.

D'après la parvité de ces équations séculaires des satellites de Jupiter, et d'après le fait que leur existence ne pouvait pas être déclarée par les observations faites depuis leur découverte (en 1610), comparativement récente, on ne peut s'empêcher de reconnaître que l'assertion de la page 360 citée plus haut aurait besoin d'autres explications pour être admise sans laisser des nuages dans l'esprit. Et cela, avec d'autant plus de raison, que, de cette manière, la découverte de la liaison entre l'équation séculaire du moyen mouvement, et les équations séculaires du périgée et du nœud n'aurait pas été faite par Laplace avec la facilité qu'elle découle de son analyse.

Quoiqu'il en soit, le rapprochement nouveau de ces remarques historiques me paraît propre à démontrer, que la découverte du *premier* terme de l'équation séculaire de la Lune est due aux efforts *réunis* de Lagrange et de Laplace. Probablement, la postérité ne voudra pas l'attribuer exclusivement à Laplace, sans ajouter que, en 1783, Lagrange pouvait être plus heureux dans l'interprétation de sa formule, mais non plus habile analyste pour la tirer des équations primordiales du mouvement libre d'un système de corps qui circulent autour du Soleil.

Je ne trouve nulle part, cité par LAPLACE, ce Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1783. Et cependant l'occasion de la citation était fort naturelle aux pages 314-317 du 5.ème Volume de la Mécanique Céleste. C'est là qu'il fallait signaler, après l'état d'enfance des méthodes précédentes, celle publiée par LAGRANGE dans ce même Volume pour faire disparaître les arcs de cercle des intégrales du mouvement des planètes obtenues par la méthode des approximations successives. C'est là qu'on croit devoir trouver, et qu'on cherche en vain, une courte notice sur ce passage remarquable de la préface de LAGRANGE « M.r de LAPLACE s'est » occupé de cet objet et il a donné dans les Mémoires de Paris une » méthode ingénieuse pour faire disparaître, par la variation des constantes, les arcs de cercle qui paraissent dans les intégrales approchées » des équations différentielles. Mais cette méthode est fondée sur une » métaphysique qui ne me paraît pas porter dans l'esprit toute la satisfaction qu'on pourrait désirer; et elle se trouve d'ailleurs en défaut » lorsque dans l'intégrale une des constantes arbitraires multiplie l'arc » sous les signes de *sinus*, de *cosinus* ou d'exponentielles; ce qui est le » cas des équations du mouvement des planètes, considérées dans toute » leur généralité. »

LAPLACE a rectifié sa méthode publiée en 1777, et à la page 246 du 1.er Volume de la Mécanique Céleste il a tenu compte des termes dus aux constantes arbitraires qui multiplient l'arc dans les fonctions périodiques. Alors les équations différentielles pour déterminer les constantes arbitraires, devenues variables, ne présentent plus le défaut mis en évidence par LAGRANGE à la page 231 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1783.

Ce même Volume est celui où LAGRANGE a publié son *Troisième Mémoire* « *Sur la détermination des orbites des comètes.* » En reproduisant cette méthode dans le second Volume de sa *Mécanique Analytique*, plusieurs fautes d'impression s'y sont glissées, et il devient nécessaire de corriger les formules avant de les appliquer à des cas particuliers. Je saisis cette occasion pour publier ici toutes les corrections que j'ai faites dans mon exemplaire, avec plusieurs Notes relatives à cette méthode originale de LAGRANGE.

ERRATA

POUR LE SECOND VOLUME

DE LA

MÉCANIQUE ANALYTIQUE DE LAGRANGE

(Édition de 1815).

ERRATA

pour le second Volume de la Mécanique Analytique de LAGRANGE

(Édition de 1815).

Page 14. N.° 13.

$$Y = r \sin.\Phi .$$

Page 23. N.° 21.

$$\cos.\theta = \cos.u \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{e^3 d^2 \sin.u^4}{2.3\,du^2} - \text{etc.}$$

Page 25. N.° 22.

La seconde valeur de Φ doit être ;

$$\Phi = u + e\sin.u + \frac{e^2 d.\sin.u^2}{2\,du} + \frac{e^3 d^2.\sin.u^3}{2.3\,du^2} + \text{etc.}$$

$$+ 2E\sin.u + \frac{2E^2}{2}\sin.2u + \frac{2E^3}{3}\sin.3u + \text{etc.}$$

$$+ 2eEU\sin.u + 2e^2E\frac{d(U\sin.u^2)}{2\,du} + 2e^3E\frac{d^2(U\sin.u^3)}{2.3\,du^2} + \text{etc.}$$

Page 27. N.° 23.

La série qui donne la valeur de ψ doit être remplacée par celle-ci, toujours convergente, savoir;

$$\psi = 2\,\text{tang.}\frac{i}{2}.\sin.(\varphi - h) + \frac{2}{3}.\text{tang.}^3\frac{i}{2}.\sin.3(\varphi - h)$$

$$+ \frac{2}{5}\text{tang.}^5\frac{i}{2}.\sin.5(\varphi - h) + \frac{2}{7}.\text{tang.}^7\frac{i}{2}.\sin.7(\varphi - h) + \text{etc.}$$

(Voyez page 243 du Tome second des *Exercices de Calcul Intégral* de LEGENDRE).

Page 31. N.° 25.

« comme on peut s'en assurer en prenant les carrés » : ou bien en posant $s+v=p$, $s-v=q$, et observant que

$$\sqrt{2s-2\sqrt{s^2-v^2}}=\sqrt{p+q-2\sqrt{pq}}=\sqrt{p}-\sqrt{q}\ ;$$

$$6\sqrt{g}\,(t'-t)=\left(p+q+\sqrt{pq}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right)=p^{\frac{3}{2}}-q^{\frac{3}{2}}\ .$$

Page 33. N.° 28.

$$T=1-\frac{g}{r^3}\times\frac{t^2}{2}+\frac{3g.s}{r^5}\times\frac{t^3}{2.3}+\text{etc.}$$

Page 34. N.° 28.

Vers la fin de ce N.° il faut lire

$$\frac{ds}{dt}=g\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)\ ;\qquad \frac{1}{a}=\frac{1}{r}-\frac{ds}{g\,dt}\ .$$

Page 37. N.° 31.

$$A=y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\ ;\qquad C=x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\ ;$$

$$B=-D\sin.i\cos.h\ .$$

Page 39. N.° 33.

« Ensuite l'article 7 donne

» $$\text{tang.}\,(\Phi+k)=\frac{\text{tang.}\,(\varphi-h)}{\cos.i}\ .$$

» De sorte que h et i étant déjà connus, on aura par l'angle intermédiaire φ l'angle $\Phi+k$ en x et y; et de là on aura k par l'équation de l'article 15 rapportée à l'instant où $t=0$;

» $$\cos.\Phi=\frac{1}{e}\cdot\left(\frac{b}{r}-1\right)\ .$$

Page 41. N.° 35.

A la seconde ligne il faut lire

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{r}-\frac{ds}{g\,dt}\ ;$$

et à la huitième ligne il faut lire $\frac{ds}{dt}=\frac{g}{r}$.

Page 43. N.° 37.

Ligne 6 en remontant « celle du cosinus de l'angle ».

Page 44. N.° 37.

A la deuxième ligne il faut lire « une nouvelle inconnue R. »

Page 46. N.° 39.

A la deuxième ligne de ce N.° il faut lire « les valeurs des rayons « r, r' » ; et à la cinquième ligne il faut lire

» $$b=\frac{u^2-(r'-r)^2}{2\left\{r+r'-\sqrt{(r+r')^2-u^2}\right\}}\ ;$$

» et comme on a en général (art. 10) $Cz+Ax+By=0$, dans la-
» quelle $\frac{A}{C}=\text{sin.}h\,\text{tang.}\,i$; $\frac{B}{C}=-\cos.h\,.\,\text{tang.}\,i$ (art. 11), on aura
» ces deux-ci;

» $$z+(x\ \text{sin.}\,h-y\ \cos.h)\,\text{tang.}\,i=0\ ;$$

» $$z'+(x'\,\text{sin.}\,h-y'\cos.h)\,\text{tang.}\,i=0\ .$$

Page 47. N.° 39.

» $$Rn-\rho\nu=-L(Rl-\rho\lambda)+M(Rm-\rho\mu)\ ;$$

» d'où l'on tire

» $$R=\rho.\frac{\nu+\lambda L-\mu M}{n+lL-mM}\ .$$

Page 50. N.° 41.

La première équation de cette page doit être

$$(Rm-\rho\mu)V''-(R'm'-\rho'\mu')V'+(R''m''-\rho''\mu'')V=0\ .$$

Page 51. N.° 42.

Dans la série, qui donne la valeur de V'', il y manque le facteur s au troisième terme; on doit lire

$$V'' = t' - t - g\frac{(t'-t)^3}{6r^3} + g\frac{s(t'-t)^3(t+t')}{4r^5} + \text{etc.}$$

Page 52. N.° 43.

En substituant les valeurs de V, V', V'' dans les valeurs de R, R', R'', posées dans la page 50, on obtient;

$$R = \frac{6Pr^3 - Qt^2}{[6(m-1)r^3 - (m-1)^3t^2]G};$$

$$-R' = \frac{6P_1r^3 - Q_1t^2}{[6mr^3 - m^3t^2]G};$$

$$R'' = \frac{6P_2r^3 - Q_2t^2}{[6r^3 - t^2]G}.$$

Dans le Mémoire de Lagrange les valeurs ρ, ρ', ρ'' (qui répondent à celles-ci de R, R', R'') sont exactes (Voyez la page 315 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1783).

Page 54. N.° 44.

On doit lire

$$R = \frac{Qt^2}{6(m-1)G}\left\{\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r^3}\right\};$$

$$-R' = \frac{Q_1t^2}{6mG}\left\{\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r^3}\right\};$$

$$R'' = \frac{Q_2t^2}{6G}\left\{\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r^3}\right\}.$$

(Voyez pages 117 et 118 du Volume de l'Académie de Berlin, où les trois valeurs de ρ, ρ', ρ'' s'accordent avec celle-ci).

Page 56. N.° 45.

On doit lire

$$R' = -\frac{(m-1)}{m}\cdot\frac{Q_1}{Q}R; \qquad R'' = (m-1)\cdot\frac{Q_2}{Q}R;$$

Page 56. N.° 46.

A la dernière ligne il faut lire $\frac{ds}{dt}=\frac{g}{r}$.

Page 57. N.° 46.

On doit faire

$$M=(m-1)^2\left\{\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{Q_1}{Q}\right)^2-\left(\frac{Q_2}{Q}\right)^2\right\};$$

$$N=-(m-1)\left\{\rho'\frac{Q_2}{Q}\cos.(C'S')+\rho''\frac{Q_2}{Q}\cos.(C''S'')\right\};$$

Alors l'on a (à cause de $g=1$)

$$MR^2-2NR+m\rho'^2-\rho''^2-(m-1)r^2+m(m-1)\frac{t^2}{r}=0 .$$

Page 59. N.° 47.

Dans la valeur de G^2, posée au fond de cette page, on doit lire

$$-\cos.(C'C'')^2 .$$

Page 63. N.° 50.

On doit lire

$$l=\cos.a.\cos.d ;$$

$$\lambda=\cos.\alpha.\cos.\delta .$$

Page 64. N.° 49.

On doit changer les signes des valeurs de G, Γ_2, Γ_2', Γ_2''. En outre dans la valeur de Γ_2 on doit lire $+\sin.(\alpha-a')\tang.d$, au lieu de $+\sin.(\alpha-a')\tang.\delta$.

Pour plus de clarté, voici les véritables expressions de G, Γ, Γ', Γ''; Γ_1, Γ_1', Γ_1''; Γ_2, Γ_2', Γ_2'':

$$\begin{aligned}G=&\ \cos.d\cos.d'\sin.d''\sin.(a-a')\\&-\cos.d\cos.d''\sin.d'\sin.(a-a'')\\&+\cos.d'\cos.d''\sin.d\sin.(a'-a'');\end{aligned}$$

$$G = \cos.d \cos.d' \cos.d'' \left\{ \begin{array}{l} \sin.(a - a') \tang.d'' \\ -\sin.(a - a'') \tang.d' + \sin.(a' - a'') \tang.d \end{array} \right\};$$

$$\Gamma = \cos.\delta \cos.d' \cos.d'' \left\{ \begin{array}{l} \sin.(\alpha - a') \tang.d'' \\ -\sin.(\alpha - a'') \tang.d' + \sin.(a' - a'') \tang.\delta \end{array} \right\};$$

$$\Gamma' = \cos.\delta' \cos.d' \cos.d'' \left\{ \begin{array}{l} \sin.(\alpha' - a') \tang.d'' \\ -\sin.(\alpha' - a'') \tang.d' + \sin.(a' - a'') \tang.\delta' \end{array} \right\};$$

$$\Gamma'' = \cos.\delta'' \cos.d' \cos.d'' \left\{ \begin{array}{l} \sin.(\alpha'' - a') \tang.d'' \\ -\sin.(\alpha'' - a'') \tang.d' + \sin.(a' - a'') \tang.\delta'' \end{array} \right\};$$

$$\Gamma_1 = \cos.d \cos.\delta \cos.d'' \left\{ \begin{array}{l} \sin.(a - \alpha) \tang.d'' \\ -\sin.(a - a'') \tang.\delta + \sin.(\alpha - a'') \tang.d \end{array} \right\};$$

$$\Gamma_1' = \cos.d \cos.\delta' \cos.d'' \left\{ \begin{array}{l} \sin.(a - \alpha') \tang.d'' \\ -\sin.(a - a'') \tang.\delta' + \sin.(\alpha' - a'') \tang.d \end{array} \right\};$$

$$\Gamma_1'' = \cos.d \cos.d'' \cos.\delta'' \left\{ \begin{array}{l} \sin.(a - \alpha'') \tang.d'' \\ -\sin.(a - a'') \tang.\delta'' + \sin.(\alpha'' - a'') \tang.d \end{array} \right\};$$

$$\Gamma_2 = \cos.d \cos.d' \cos.\delta \left\{ \begin{array}{l} \sin.(a - a') \tang.\delta \\ -\sin.(a - \alpha) \tang.d' + \sin.(a' - \alpha) \tang.d \end{array} \right\};$$

$$\Gamma_2' = \cos.d \cos.d' \cos.\delta' \left\{ \begin{array}{l} \sin.(a - a') \tang.\delta' \\ -\sin.(a - \alpha') \tang.d' + \sin.(a' - \alpha') \tang.d \end{array} \right\};$$

$$\Gamma_2'' = \cos.d \cos.d' \cos.\delta'' \left\{ \begin{array}{l} \sin.(a - a') \tang.\delta'' \\ -\sin.(a - \alpha'') \tang.d' + \sin.(a' - \alpha'') \tang.d \end{array} \right\}.$$

Page 68. N.° 53.

Il faut changer le signe du second terme au dénominateur de tang.h; ce qui donne

$$\text{tang.}\, h = \frac{\sin.\varphi\,.\,d\psi - \sin.\psi\,.\cos.\psi\,.\cos.\varphi\,.\,d\varphi}{\cos.\varphi\,.\,d\psi + \sin.\psi\,.\cos.\psi\,.\sin.\varphi\,.\,d\varphi}\,.$$

A la sixième ligne, au lieu des mots « et dans une direction perpen- « diculaire à ce même plan » il faut lire « et dans une direction nor- « male au plan des deux composantes $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ »; car, autrement, la définition de la troisième composante serait fautive.

Page 69. N.° 54.

La seconde équation de la ligne huitième doit être

$$\frac{dr}{\sqrt{g}\,.\,dt} = \sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{b}{r^2}}\,.$$

Page 74. N.° 57.

Au commencement de la sixième ligne il faut lire « commune » au lieu de « connue ».

Page 104. N.° 76.

Ligne 7 en substituant (Ω) à la place de Ω

$$dh = \frac{1}{\sqrt{gb}} \times \frac{d(\Omega)}{\sin.i\,.\,di}\,dt\;; \qquad di = -\frac{1}{\sqrt{gb}} \times \frac{d(\Omega)}{\sin.i\,.\,dh}\,dt\;;$$

$$H = -\frac{g}{2a}\,.$$

Page 105. N.° 77.

Dans la première ligne on doit lire « par $-\sqrt{\frac{g}{a^3}}\,dc$ ».

Page 107. N.° 79.

On doit lire

$$\delta x = \alpha\,\delta X + \beta\,\delta Y + X(\beta\,\delta\chi + \gamma\,\delta\pi) + Y(-\alpha\,\delta\chi + \gamma\,\delta\tau)\,.$$

Dans le second membre de l'équation, qui termine cette page, on doit remplacer le dernier terme par

$$(X\,dY - Y\,dX)\,\delta\chi\,.$$

Page 109. N.° 80.

Dans la dernière ligne de cette page on doit lire « respectivement par » dr, $d\psi$, $d\varphi$ ».

Page 111. N.° 80.

L'avant-dernière équation doit être

$$r^2 d\psi^2 + dr^2 = 4 \cdot \frac{q^2 r^2 dr^2 - r^2 q^2 dq^2 + (r^2 + q^2 - h^2) r q dr dq}{4h^2 r^2 - (r^2 + h^2 - q^2)^2} :$$

et la dernière doit être;

$$\frac{r^2 \cos.^2 \psi . d\varphi^2}{dt^2} = \frac{4B^2 h^2}{4h^2 r^2 - (r^2 + h^2 - q^2)^2} .$$

Page 112. N.° 80.

Dans le premier membre de l'équation (a) on doit remplacer $2B^2$ par $2B^2h^2$. Le même changement doit être fait dans l'équation (c).

Page 113. N.° 81.

Le second membre de l'équation (d) doit être;

$$H\left[(r \pm q)^4 - h^4\right] + C(r \pm q)^2 - B^2 h^2 - Ch^2 .$$

Les seconds membres des deux équations (e) doivent être respectivement;

$$H(s^4 - h^4) + Cs^2 - B^2 h^2 - Ch^2 ;$$

$$H(u^4 - h^4) + Cu^2 - B^2 h^2 - Ch^2 .$$

Dans les équations (f), (g), (h) on doit remplacer, sous le radical, $-B^2$ par $-B^2h^2 - Ch^2$.

Page 114. N.° 82.

On doit lire « $Q = \frac{\beta}{q^2} + 2\gamma q$ ».

Page 117. N.° 84.

Vers la fin de cette page on doit remplacer l'équation $B^2 = Ch^2$ par l'équation $B^2h^2 = 0$.

Page 118. N.° 84.

On doit lire « Par les substitutions de ces valeurs le polynome

» $$Hs^4+\alpha s^3+Cs^2-\alpha h^2 s-Hh^4-B^2h^2-Ch^2$$

» devient

» $$H(s^4-2s^2h^2+h^4)+\alpha(s^3-s^2h-sh^2+h^3)\ ;$$

» ce qui se réduit à la forme

» $$H(s+h)^2(s-h)^2+\alpha(s+h)(s-h)^2\ ;$$

» il en sera de même du polynome en u ».

Page 119. N.° 85.

Dans cette page il faut remplacer la lettre ρ par la lettre r. L'équation qui termine la page doit être;

$$4t.\sqrt{g}=\frac{2}{3}(h+r+q)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(h+r-q)^{\frac{3}{2}}.$$

Page 135. N.° 95.

Dans la dernière équation, le radical du premier terme du second membre doit être

$$\sqrt{\rho'^2+\rho''^2-2\rho'\rho''\cos.(\Phi'-\Phi''-H-K)}\ ,$$

Page 136. N.° 96.

Les valeurs de ρ' et ρ'' doivent être écrites ainsi;

$$\rho'=a'\left[1-e'\cos.u'+\frac{e'^2}{2}-\frac{e'^2}{2}\cos.2u'\right],$$

$$\rho''=a''\left[1-e''\cos.u''+\frac{e''^2}{2}-\frac{e''^2}{2}\cos.2u''\right].$$

Page 138. N.° 96.

Dans l'avant-dernière équation on doit remplacer $\left(\sin.\frac{1}{2}I,''\right)$ par

$\left(\sin.\frac{1}{2}I''\right)^2$; et dans la dernière on doit séparer le facteur $\frac{a'}{a''^2}$ par deux paranthèses ; c'est-à-dire écrire

$$\frac{\rho'}{\rho''^3}=\frac{a'}{a''^2}\left\{1-e'\cos.u'\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}.$$

Page 142. N.° 98.

Dans la troisième ligne on doit remplacer le mot binome par le mot trinome. En outre on doit lire :

« Soit, pour abréger,

» $n'=\frac{n(n+1)}{2}$; $n''=\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}$; etc. ;

» on aura, en général,

» $\left(a'-a''e^{\varphi\cdot\sqrt{-1}}\right)^{-n}=a'^{-n}+na'^{-n-1}a''e^{\varphi\cdot\sqrt{-1}}+n'a'^{-n-2}a''^2e^{2\varphi\cdot\sqrt{-1}}+\text{etc.}$ »

Page 143. N.° 99.

Dans la ligne 9 on doit remplacer A par (Ω').

Page 144. N.° 100.

Dans l'avant-dernière équation on doit lire $\cos.i'.\cos.i''$.

Page 145. N.° 100.

Vers la fin de cette page on doit lire $(\Omega'')_1=\ldots\ldots$; $(\Omega'')_2=\ldots\ldots$

Page 154. N.° 106.

Dans la troisième et quatrième ligne, il faut remplacer le symbole (1) par A. En outre on y lira

$$d.\cos.\gamma=-Audt\ ;\qquad d.\cos.\beta=-Budt\ .$$

Page 156. N.° 106.

La seconde ligne doit être remplacée par

$$dy=\frac{B}{C}dx\ ;\qquad dz=\frac{A}{C}dx\ ;$$

et la quatrième par

$$y=\frac{Bx+a}{C}\ ;\qquad z=\frac{Ax+b}{C}\ .$$

Dans la 11.ème ligne on lira $y=-1+\eta$. Et dans la 13.ème ligne on lira

$$\xi=2\left(\frac{1}{2}I_{\prime}''\right)^{2}\ ;\qquad \eta=2\left(\frac{1}{2}I_{\prime}'''\right)^{2}\ ;\qquad \zeta=2\left(\frac{1}{2}I_{\prime\prime}'''\right)^{2}\ .$$

Dans la 19.ème ligne on lira $d\xi=Cudt$.

Page 159. N.° 108.

On doit lire $\sqrt{1-p'^{2}-q'^{2}}=x$.

Page 168. N.° 114.

Vers le fond de cette page, dans la quatrième ligne en remontant, on doit lire;

$$r=a\ ;\qquad \left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a^{3}}}\ ;$$

(et pour plus de clarté)

$$r=a\ ;\qquad \text{ce qui donne}\qquad \left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a^{3}}}\ .$$

Ainsi, il faut attribuer à une méprise la Note placée, par M.r Bertrand, dans le bas de la page 146 de l'édition de 1855.

Page 170. N.° 115.

Dans la cinquième ligne on doit lire l'équation

$$de.\left(\sqrt{A}-t\Gamma.\sqrt{g}\right)+\Gamma.\sqrt{g}\,.edt=0\ .$$

Page 175. N.° 119.

Dans la sixième ligne, le dénominateur du second terme est $2r'^{3}$.

Page 176. N.° 120.

La 13.ème ligne doit être remplacée par celle-ci;

$$-\frac{m-2m'-\frac{m''}{2}-\frac{m'''}{2}-\text{etc.}}{r'}\ .$$

Et dans la 16.ème ligne on doit lire $m-2m'-\frac{m''}{2}-\frac{m'''}{2}-\text{etc.}$

Page 198. N.° 17.

Lignes 6 et 7, lisez σ au lieu de s.
» 3, en remontant, sous le radical, lisez $\varkappa^2$ au lieu de II.
» 4, en remontant, lisez $\varkappa^2 = \ldots\ldots$ au lieu de $\varkappa = \ldots\ldots$

Page 199. N.° 17 et 18.

» 5, lisez $(\cos.\beta - \cos.\alpha)$ au lieu de $(\cos.\beta - \cos.\alpha^2)$.
» 11 et 22, lisez σ au lieu de s.
» 1, en remontant, lisez $(1 + \text{tang.}\gamma^2 + 2\,\text{tang.}\gamma \times \cos. 2\sigma)^{-\frac{1}{2}}$.
» 5, en remontant, lisez $\varkappa^2$ au lieu de $\varkappa$.

Page 200. N.° 18.

» 4, lisez $\varphi = 2\sigma$, au lieu de $\varphi = 2s$.
» 7 » $B = -2(n\,\text{tang.}\gamma + \ldots\ldots)$.
» 11 » $d\sigma$ au lieu de ds.
» 13 » $A\sigma$ au lieu de As.
» 3, en remontant, lisez $\sigma = \ldots\ldots$ au lieu de $s = \ldots\ldots$

Page 201. N.° 19.

» 10, lisez $(B)\cos. 2\sigma$ au lieu de $(B)\cos. 2s$.

Page 202. N.° 19.

» 4 » $1 - \text{tang.}\mu^2$ au lieu de $1 - \text{tang.}\mu$ au dénominateur.
» 12 » $1 - \text{tang.}\nu^2$ au lieu de $1 + \text{tang.}\nu^2$ au dénominateur.
» 13 » de $d\varphi$ de l'article 17.
» 15 et 16, lisez $\varkappa$ au lieu de Γ; σ au lieu de s; cos.α au lieu de cos.α^2 sous le radical; et sin.2σ, sin.4σ, etc. au lieu de cos.2σ, cos.4σ, etc.
» 1 et 2, en remontant, lisez $\varkappa$ au lieu de Γ.

Page 203. N.° 20.

» 2 et 3, lisez σ au lieu de s.
» 12, lisez $2T$ au lieu de T.

Page 204. N.° 21.

» 6, lisez article 17 au lieu de article 5.
» 11 » passe pas par la verticale.
» 15 » $\varkappa = \frac{1}{2}$ au lieu de $\Gamma = \frac{1}{2}$.
» 17 » $A'' = \frac{1}{1 - \text{tang.}\nu^2} = \frac{\cos.\nu^2}{\cos. 2\nu}$.
» 18 » $\Phi = \frac{\pi}{2}$.

Page 205. N.° 22.

Ligne 2 en remontant

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{g}{r\cos.\alpha}}.$$

Ligne 5 en remontant

$$2\pi.\sqrt{\frac{r\cos.\alpha}{g}}.$$

Ligne 7 en remontant

$$\varphi = t.\sqrt{\frac{g}{r\cos.\alpha}}.$$

(La nécessité de cette correction est démontrée par le Mémoire que j'ai publié dans le Vol. XVIII de l'Académie des Sciences de Turin).

NOTES

SUR

LA MÉTHODE DE LAGRANGE

POUR

DÉTERMINER L'ORBITE DES COMÈTES

NOTE

Sur le N.° 11 (page 55) du second Volume de la Mécanique Analytique de LAGRANGE.

En retenant le terme multiplié par t^2 dans le dénominateur des valeurs de R, R', R'', le résultat de l'élimination de R serait

$$K^2(r^3-\rho^3)^2-2K\rho^4(r^3-\rho^3)\left[r^3-\frac{(m-1)^2}{6}t^2\right]\cos.(CS)$$
$$-\rho^6(r^2-\rho^2)\left[r^3-\frac{(m-1)^2}{6}t^2\right]^2=0\ ;$$

et en divisant par $r-\rho$, l'on aura l'équation du 7.ème degré;

$$K^2(r-\rho)(r^2+r\rho+\rho^2)^2-2K\rho^4(r^2+r\rho+\rho^2)\left[r^3-\frac{(m-1)^2}{6}t^2\right]\cos.(CS)$$
$$-\rho^6(r+\rho)\left[r^3-\frac{(m-1)^2}{6}t^2\right]^2=0\ .$$

Dans les cas particuliers où la distance héliocentrique r serait fort petite, il conviendrait d'avoir égard à la différence $r^3-\frac{(m-1)^2}{6}t^2$.

En ordonnant cette équation par rapport à r l'on aura;

$$r^7+\rho.r^6-p_1r^5-p_2r^4-p_3r^3+p_4r^2+p_5r+p_6=0\ ;$$

où l'on a fait;

$$p_1=\frac{K^2}{\rho^6}+\frac{2K}{\rho^2}\cos.(CS)\ ;$$

$$p_2=\frac{K^2}{\rho^5}+\frac{2K}{\rho}\cos.(CS)+\frac{(m-1)^2}{3}t^2\ ;$$

$$p_3=\frac{K^2}{\rho^4}+2K\cos.(CS)+\frac{(m-1)^2}{3}\rho t^2\ ;$$

$$p_4=\frac{K^2}{\rho^3}+\frac{(m-1)^2}{3}t^2.\frac{K}{\rho^2}\cos.(CS)\ ;$$

$$p_5 = \frac{K^2}{\rho^2} + \frac{(m-1)^2}{3} t^2 . \frac{K}{\rho} \cos.(CS) + \frac{(m-1)^2}{36} t^4 ;$$

$$p_6 = \frac{K^2}{\rho} + \frac{(m-1)^2}{3} t^2 . K \cos.(CS) + \rho \frac{(m-1)^4}{36} t^4 .$$

Au reste, la forme primitive,

$$\rho \cos.(CS) \pm \sqrt{r^2 - \rho^2 \sin.^2(CS)} = \frac{K\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r^3}\right)}{1 - \frac{(m-1)^2}{6r^3} t^2} ,$$

de cette équation du $7.^{\text{ème}}$ degré, offrira souvent plus de facilité pour calculer la valeur de r.

En désignant par p_i, p_λ les deux plus grands coefficients négatifs parmi les six coefficients $-p_1$, $-p_2$, $-p_3$, p_4, p_5, p_6, on aura pour les deux limites entre lesquelles sont comprises toutes les valeurs positives de r:

$$r > 1 : \left\{ \sqrt[6-i]{-\frac{p_i}{p_6}} + \sqrt[6-\lambda]{-\frac{p_\lambda}{p_6}} \right\} ; \qquad r < \sqrt[i+1]{-p_i} + \sqrt[\lambda+1]{-p_\lambda} .$$

où le coefficient p_6 est en général une quantité positive.

Et pour avoir des limites plus resserrées, on pourra, conformément à la méthode connue de Newton, remplacer r par $r+l$, et déterminer la quantité l de manière que tous les coefficients de la transformée soient positifs. En outre on doit avoir $r<\rho$ ou $r>\rho$, suivant que la quantité K sera négative ou positive.

Si pour la solution d'un tel problème il suffisait d'indiquer des possibilités, j'ajouterai que, en posant

$$X = A_{(0)} + A_{(1)} r + A_{(2)} r^2 + A_{(3)} r^3 + A_{(4)} r^4 ,$$

on pourrait déterminer, par la solution d'une équation du $3.^{\text{ème}}$ degré, les cinq coefficients $A_{(0)}, \ldots\ldots, A_{(4)}$ de manière à faire dépendre le calcul de la racine r d'une autre équation du $7.^{\text{ème}}$ degré, privée du second, du troisième, et du quatrième terme; c'est-à-dire d'une équation de la forme

$$X^7 + B_{(1)} X^3 + B_{(2)} X^2 + B_{(3)} X + B_{(4)} = 0 ;$$

où les quatre coefficients $B_{(1)}$, $B_{(2)}$, $B_{(3)}$, $B_{(4)}$ sont des fonctions entières et homogènes des cinq coefficients $A_{(0)}, A_{(1)}, \ldots\ldots, A_{(4)}$. Mais

l'application de ce théorème, dû à M.r Jerrard, Géomètre Anglais, ne me paraît pas présenter un avantage réel, quoique l'on puisse avoir r par cette fonction rationnelle de X; savoir

$$-\mathrm{r}=\frac{X^3.\frac{d.B_{(1)}}{d.A_{(1)}}+X^2.\frac{d.B_{(2)}}{d.A_{(1)}}+X.\frac{d.B_{(3)}}{d.A_{(1)}}+\frac{d.B_{(4)}}{d.A_{(1)}}}{7X^6+3B_{(1)}X^2+2B_{(2)}X+B_{(3)}}\ .$$

Au reste, il y a une autre transformation beaucoup plus utile. En effet, d'après les formules connues

$$\sin.\varphi=\frac{2x}{1+x^2}\ ;\qquad \cos.\varphi=\frac{1-x^2}{1+x^2}\ ,$$

il est clair, que toute équation de la forme

$$\sin.^4\varphi=A\sin.\varphi+B\cos.\varphi$$

est réductible à une autre (en x) du 8.ème degré. Gauss, en appliquant cette transformation à l'équation de Lagrange;

$$K^2\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{\mathrm{r}^3}\right)^2-2\rho K\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{\mathrm{r}^3}\right)\cos.(CS)+\rho^2-\mathrm{r}^2=0\ ,$$

par le moyen de l'équation

$$\mathrm{r}=\frac{\rho.\sin.(CS)}{\sin.\varphi}\ ,$$

l'a réduite à une autre de la forme

$$\sin.^4\varphi=M\sin.(\varphi-\psi)\ ;$$

où M et ψ sont des quantités connues; et l'inconnue φ est l'angle à la Comète formé par ses distances R et r à la Terre et au Soleil (Voyez page 157 de l'ouvrage *Theoria motus corporum coelestium, etc.*).

NOTE

Sur le N.° 46 du second Volume de la Mécanique Analytique de LAGRANGE, *relatif à la détermination de l'orbite parabolique des Comètes.*

En effectuant l'élimination, entre les deux équations en R, et faisant pour plus de simplicité ;

$$N' = \rho \cos.(CS) \; ; \qquad M' = m\rho'^2 - \rho''^2 - M\rho^2 \; ;$$

$$M'' = N'(m\rho'^2 - \rho''^2) - N\rho^2 \; ; \qquad M''' = N'M - N \; ;$$

$$H = m(m-1)t^2 \; ;$$

on obtient cette équation du *sixième* degré; savoir

$$\left\{(1-m)r^3 + M'r + H\right\}^2 + 4M'''\left\{(1-m)N'r^4 + M''r^2 + N'Hr\right\} = 0 \; ;$$

qui se réduit au *cinquième* en négligeant H^2; et conservant la première puissance de H. Mais en y faisant $H = 0$, l'équation devient divisible par r^2 et s'abaisse au *second* degré, par rapport à r^2.

En ordonnant l'équation du *cinquième* degré, et faisant

$$L = m\frac{\rho'^2}{\rho^2} - \frac{\rho''^4}{\rho^2} - M + 2\frac{N'}{\rho}\left(M\frac{N'}{\rho} - \frac{N}{\rho}\right) \; ;$$

$$L' = \left(M\frac{N'}{\rho} - \frac{N}{\rho}\right)\left\{\frac{N}{\rho} - \frac{N'}{\rho}\left(m\frac{\rho'^2}{\rho^2} - \frac{\rho''^2}{\rho^2}\right)\right\} - \frac{1}{4}\left(m\frac{\rho'^2}{\rho^2} - \frac{\rho''^2}{\rho^2} - M\right)^2 \; ;$$

l'on aura

$$0 = r^5 - \frac{2L}{m-1}\rho^2 r^3 - 2mt^2 . r^2 - \frac{4L'}{(m-1)^2}\rho^4 r + \frac{2mL}{m-1}\rho^2 t^2 \; .$$

La petitesse des deux termes multipliés par t^2 est telle, que, en général, on pourra les négliger dans un premier calcul. Alors l'équation

$$0 = r^4 - \frac{2L\rho^2}{m-1} . r^2 - \frac{4L'.\rho^4}{(m-1)^2} \; ,$$

donne immédiatement

$$(m-1)\frac{r^2}{\rho^2} = H''' \pm 2.\sqrt{\frac{N'}{\rho}.H'H''} ,$$

en posant

$$H' = M.\frac{N'}{\rho} - \frac{N}{\rho} ;$$

$$H'' = \frac{N'}{\rho} + m\frac{\rho'^2}{\rho^2} - \frac{\rho''^2}{\rho^2} - M ;$$

$$H''' = m.\frac{\rho'^2}{\rho^2} - \frac{\rho''^2}{\rho^2} - M + 2H'.\frac{N'}{\rho} .$$

Il y a une autre solution, pour le cas de l'orbite parabolique, qui mérite d'être rapprochée de la précédente, afin de mieux caractériser leur différence. Voici en quoi elle consiste. Soit

$$N'' = \rho'' \cos.(C''S'') ; \quad N''' = \rho'' \cos.(CS'') ;$$

$$N^{IV} = \rho \cos.(C''S) ; \quad N^{V} = \rho\rho'' \cos.(SS'') ; \quad N^{VI} = \cos.(CC'') .$$

En appliquant aux deux rayons vecteurs extrêmes r, r'' la formule donnée à la page 45 (N.° 38) pour exprimer le carré de la distance u qui joint leurs extrémités, l'on a;

$$u^2 = r^2 + r''^2 - 2N^{VI}RR'' + 2N'''R + 2N^{IV}R'' - 2N^{V} ;$$

$$r''^2 = R''^2 - 2N''R'' + \rho''^2 ;$$

$$r^2 = R^2 - 2N'R + \rho^2 .$$

Donc, en remplaçant R'' par sa valeur

$$R'' = (m-1).\frac{Q_2}{Q}R ,$$

on aura les deux équations

$$u^2 = \Omega R^2 - 2\Omega' R + \Omega'' ;$$

$$r''^2 = \lambda R^2 - 2\lambda' R + \rho''^2 ;$$

où les cinq coefficients Ω, Ω', Ω'', λ, λ' sont censés connus par les données de l'observation, sans l'intervention de la quantité G dont la

petitesse est du 3.ème ordre. Cela posé, si l'on substitue ces valeurs dans l'équation

$$6mt=(\mathrm{r}+\mathrm{r}''+u)^{\frac{3}{2}}-(\mathrm{r}+\mathrm{r}''-u)^{\frac{3}{2}}\ ;$$

où mt exprime l'intervalle entre la première et la troisième observation, on aura une équation en R qui peut être assez facilement résolue par des essais. C'est à cela que se réduit la méthode publiée par Olbers en 1797. En débarassant cette équation des quantités radicales on aurait en R une équation du 24.ème degré.

Pour obtenir cette équation promptement, remarquons que, en faisant

$$A=6mt\ ;\qquad p=\mathrm{r}+\mathrm{r}''+u\ ;\qquad q=\mathrm{r}+\mathrm{r}''-u\ ,$$

l'équation précédente,

$$A=\sqrt{p^3}-\sqrt{q^3}\ ,$$

peut être transformée dans l'équation

$$(A^2-p^3-q^3)^2=4p^3q^3\ .$$

Mais en posant pour un moment $v=\mathrm{r}+\mathrm{r}''$, on réduit cette équation à la forme

$$(M+M'v^2+M''v^4)^2=Nv^2+N'v^4+N''v^6\ ;$$

laquelle, en posant $v^2=\xi^2+2\mathrm{r}\mathrm{r}''$, devient de la forme

$$(V+V'\mathrm{r}\mathrm{r}'')^2=U+U'\mathrm{r}\mathrm{r}''\ .$$

Cette dernière donne

$$[V^2-U+V'^2\mathrm{r}^2\mathrm{r}''^2]^2=(U'-2VV')^2\mathrm{r}^2\mathrm{r}''^2\ ;$$

où $\mathrm{r}^2\mathrm{r}''^2$ est un polynome du 4.ème degré. Et comme V et U sont des polynomes du 6.ème degré en R, il est évident que cette équation montera au 24.ème degré. Pour plus de clarté j'ajouterai que l'on a;

$$M=A^4.12.u^6\ ;\qquad M'=24.u^4\ ;\qquad M''=36.u^2\ ;$$

$$N=144.A^4u^4\ ;\qquad N'=96.A^4u^2\ ;\qquad N''=16.A^4\ .$$

Après avoir déterminé par un premier calcul les valeurs approchées de R, R', R''; r, r', r''; on supposera que $R+\delta R$; $R'+\delta R'$:

$R''+\partial R''$ soient les valeurs plus exactes de R, R', R''. De là on déduira les valeurs de $r\,\partial r$, $r'\partial r'$, $r''\partial r''$ en fonction de ∂R, $\partial R'$, $\partial R''$, en négligeant le carré de ces variations. Avec ces expressions on pourra obtenir trois équations linéaires entre ∂R, $\partial R'$, $\partial R''$, en différentiant les trois équations fournies par le théorème d'Euler et Lambert, successivement appliqué aux trois intervalles compris: entre la 1.ère et la 2.ème observation; entre la 1.ère et la 3.ème; et entre la 2.ème et la 3.ème observation.

Par là on pourra calculer les valeurs de ∂R, $\partial R'$, $\partial R''$; et avec cela, au lieu de l'équation $b=2r-s^2$, qui aura été employée avec une valeur *approchée* de s^2, il conviendra de calculer la distance périhélie $\frac{1}{2}.b$ d'après l'équation connue;

$$\tfrac{1}{2}.b=\frac{u^2-(r''-r)^2}{4\left\{r''+r-\sqrt{(r''+r)^2-u^2}\right\}}\,.$$

Dans le cas particulier de $r+r''=u$, et par conséquent

$$p=2(r+r'')=A^{\frac{2}{3}}\,,$$

l'on aurait immédiatement une équation en R du 4.ème degré, en observant que, alors, l'on a ces équations

$$\left(r''^2-r^2-\frac{1}{4}A^{\frac{4}{3}}\right)^2=A^{\frac{4}{3}}.r^2\;;\qquad \tfrac{1}{2}.b=\frac{rr''}{r''+r}\,.$$

Ce cas singulier est celui où l'on aurait deux observations de la Comète au moment de son passage par les deux Nœuds.

Il importe d'observer, que la suppression des termes multipliés par t^3, que Lagrange fait dans le N.° 46, est une conséquence nécessaire de la suppression des termes multipliés par t^2 faite dans le dénominateur des valeurs de R, R', R'' posées dans le N.° 44.

Conformément à la méthode proposée dans ce numéro, il faudrait, à la rigueur, conserver la totalité des termes multipliés par t^3, et conduire le calcul jusqu'à l'équation finale avant de supprimer les termes multipliés par t^4, et ceux multipliés par des puissances supérieures de t^4. Alors on obtient une équation finale du 34.ème degré, qui devient réductible au $\frac{17}{2}$.ème (et non au 5.ème degré) en tenant compte de la *totalité* des termes multipliés par t^2. Et en ayant égard à la totalité des termes

multipliés par t^2 et par t^4, la même équation finale du 34.ème degré s'abaisse au 10.ème, et non au *sixième* degré. C'est de quoi je vais donner la démonstration. Cette démonstration est importante pour faire sentir que, analytiquement parlant, il y a une grande différence entre les expressions des rapports

$$\frac{R'}{R} = -\frac{(m-1)}{m}\cdot\frac{Q_1}{Q}\left\{\frac{6r^3-(m-1)^2t^2}{6r^3-m^2t^2}\right\};$$

$$\frac{R''}{R} = \quad (m-1)\cdot\frac{Q_2}{Q}\left\{\frac{6r^3-(m-1)^2t^2}{6r^3-t^2}\right\};$$

affectés de la quantité inconnue r^3 et les expressions

$$\frac{R'}{R} = -\frac{(m-1)}{m}\cdot\frac{Q_1}{Q}\;; \qquad \frac{R''}{R} = (m-1)\cdot\frac{Q_2}{Q}\;,$$

immédiatement connues par les seules données de l'observation.

En égalant les deux valeurs de s, données par les équations

$$R'^2 - 2N'R' + \rho'^2 = r^2 + \frac{t^2}{r} + \left(2t - \frac{t^3}{3r^3}\right)s\;;$$

$$R''^2 - 2N''R'' + \rho''^2 = r^2 + \frac{m^2t^2}{r} + \left(2mt - \frac{m^3t^3}{3r^3}\right)s\;;$$

où l'on a

$$N' = \rho'.\cos.(C'S')\;; \qquad N'' = \rho''\cos.(C''S'')\;;$$

et faisant ensuite;

$$q = -\frac{(m-1)}{m}\cdot\frac{Q_1}{Q}\;; \qquad q' = (m-1)\cdot\frac{Q_2}{Q}\;;$$

$$R' = q\cdot\left\{\frac{6r^3-(m-1)^2t^2}{6r^3-m^2t^2}\right\}R\;; \qquad R'' = q'\left\{\frac{6r^3-(m-1)^2t^2}{6r^3-t^2}\right\}R\;;$$

on obtient l'équation

$$\psi(r) = m(6r^3-m^2t^2)(R'^2-2N'R') - (6r^3-t^2)(R''^2-2N''R'')\;,$$

où

$$\psi(r) = 6r^3\left\{\rho''^2 - m\rho'^2 + (m-1)r^2\right\}$$
$$+t^2\left\{m^3\rho'^2 - \rho''^2 + r^2\left[6m(1-m) - (m^3-1)\right] - m^2(m-1)\frac{t^2}{r}\right\}\;.$$

Cela posé, la substitution des valeurs précédentes de R', R'', donnera;

$$F(\mathrm{r}) = R^2 . \Pi'(\mathrm{r}) - 2\,\Pi''(\mathrm{r}) . R \ ;$$

après avoir fait, pour plus de simplicité;

$$F(\mathrm{r}) = \psi(\mathrm{r}) . (6\mathrm{r}^3 - t^2)^2 (6\mathrm{r}^3 - m^2 t^2)^2 \ ;$$

$$f'(\mathrm{r}) = (6\mathrm{r}^3 - m^2 t^2)(6\mathrm{r}^3 - t^2)^2 \left(6\mathrm{r}^3 - (m-1)^2 t^2\right) \ ;$$

$$f''(\mathrm{r}) = (6\mathrm{r}^3 - t^2)(6\mathrm{r}^3 - m^2 t^2)^2 \left(6\mathrm{r}^3 - (m-1)^2 t^2\right) \ ;$$

$$\psi'(\mathrm{r}) = (6\mathrm{r}^3 - t^2)^2 (6\mathrm{r}^3 - m^2 t^2)^2 \left(6\mathrm{r}^3 - (m-1)^2 t^2\right) \ ;$$

$$\Pi'(\mathrm{r}) = m q^2 f'(\mathrm{r}) - q'^2 f''(\mathrm{r}) \ ;$$

$$\Pi''(\mathrm{r}) = \left\{ m q N' - q' N'' \right\} \psi'(\mathrm{r}) \ .$$

En éliminant R entre les deux équations

$$R^2 . \Pi'(\mathrm{r}) - 2\,\Pi''(\mathrm{r}) . R - F(\mathrm{r}) = 0 \ ,$$

$$R^2 - 2N . R + \rho^2 - \mathrm{r}^2 = 0 \ ,$$

où $N = \rho \cos.(CS)$, on aura l'équation

$$0 = \left\{ (\mathrm{r}^2 - \rho^2)\,\Pi'(\mathrm{r}) - F(\mathrm{r}) \right\}^2 + 4 \left\{ N\Pi'(\mathrm{r}) - \Pi''(\mathrm{r}) \right\} \left\{ NF(\mathrm{r}) + (\mathrm{r}^2 - \rho^2)\Pi''(\mathrm{r}) \right\} \ ,$$

qui, ordonnée par rapport à r, s'élève au 34.ème degré, en observant que $F(\mathrm{r})$ est un polynome du 17.ème degré, et que $\Pi'(\mathrm{r})$, $\Pi''(\mathrm{r})$ sont des polynomes du 15.ème degré.

Il est manifeste que, en supprimant les termes multipliés par t^2, cette équation devient divisible par r^{30}, et qu'elle s'abaisse au 4.ème degré. En rejetant les termes multipliés par t^4 on aura une équation de la forme

$$0 = \Omega(\mathrm{r}) . \mathrm{r}^{30} + \Omega'(\mathrm{r}) . \mathrm{r}^{27} t^2 \ ,$$

qui s'abaisse au 7.ème degré, en divisant par r^{27}. Et en rejetant la totalité des termes multipliés par t^6, on aurait une équation de la forme

$$0 = \Omega(\mathrm{r}) . \mathrm{r}^{30} + \Omega'(\mathrm{r}) . \mathrm{r}^{27} . t^2 + \Omega''(\mathrm{r}) . \mathrm{r}^{24} . t^4 \ ,$$

qui s'abaisse, en général, au 10.ème degré.

Pour avoir explicitement l'équation finale relative au cas où l'on néglige les termes multipliés par t^4 il suffit de prendre;

$$f'(\mathrm{r}) = 6^4.\mathrm{r}^{12}(6.\mathrm{r}^3 - A't^2) \ ;$$

$$f''(\mathrm{r}) = 6^4.\mathrm{r}^{12}(6.\mathrm{r}^3 - A''t^2) \ ;$$

$$\psi'(\mathrm{r}) = 6^4.\mathrm{r}^{12}(6.\mathrm{r}^3 - B't^2) \ ;$$

où l'on a fait;

$$A' = 4 - 4m + 3m^2 \ ; \qquad A'' = 3 - 4m + 4m^2 \ ;$$

$$B' = 4(1 - m + m^2) \ .$$

D'après cela, l'on a;

$$\Pi'(\mathrm{r}) = 6^5.\mathrm{r}^{15}(mq^2 - q'^2) - 6^4.\mathrm{r}^{12}(mA'q^2 - q'^2A'')t^2 \ ;$$

$$\Pi''(\mathrm{r}) = (mqN' - q'N'')\left\{6^5.\mathrm{r}^{15} - 6^4.B'.\mathrm{r}^{12}.t^2\right\} \ .$$

La fonction $F(\mathrm{r})$ donne

$$F(\mathrm{r}) = 6^3.\mathrm{r}^9\left\{6.\mathrm{r}^3 - 2(1+m^2)t^2\right\}.\psi(\mathrm{r}) \ :$$

et en posant

$$U = \rho''^2 - m\rho'^2 + (m-1)\mathrm{r}^2 \ ;$$

$$U' = m^3\rho'^2 - \rho''^2 + \mathrm{r}^2\left[6m(1-m) - (m^3-1)\right] \ ;$$

l'on aura;

$$\psi(\mathrm{r}) = 6\mathrm{r}^3.U + U'.t^2 \ ;$$

$$F(\mathrm{r}) = 6^5.\mathrm{r}^{15}.U + 6^4.\mathrm{r}^{12}.\left\{U' - 2(1+m^2)U\right\}t^2 \ ;$$

d'où l'on tire

$$(\mathrm{r}^2 - \rho^2)\Pi'(\mathrm{r}) - F(\mathrm{r}) = 6^5.\mathrm{r}^{15}.V - 6^4.\mathrm{r}^{12}.V'.t^2 \ ,$$

en faisant

$$V = (\mathrm{r}^2 - \rho^2)(mq^2 - q'^2) - U \ ;$$

$$V' = (\mathrm{r}^2 - \rho^2)(mA'q^2 - q'^2A'') - 2(1+m^2)U + U' \ .$$

Maintenant, si l'on fait

$$C' = N(mq^2 - q'^2) - (mqN' - q'N'') \ ;$$

$$C'' = N(mA'q^2 - q'^2A'') - (mqN' - q'N'')B' \ ;$$

l'on a

$$N'\Pi'(r)-\Pi''(r)=6^5.r^{15}.C'-6^4.r^{12}.C''.t^2 .$$

Et en posant

$$Z'=NU+(r^2-\rho^2)(mqN'-q'N'') ;$$

$$Z''=N\left[U'-2(1+m^2)U\right]+B'(mqN'-q'N'')(r^2-\rho^2) .$$

l'on aura;

$$NF(r)+(r^2-\rho^2)\Pi''(r)=6^5.r^{15}.Z'-6^4.r^{12}.Z'' .$$

Cela posé, il est clair que nous avons

$$\left\{(r^2-\rho^2)\Pi'(r)-F(r)\right\}^2=6^{10}.V^2.r^{30}-2.6^9.VV'.r^{27}.t^2 :$$

$$\left\{N\Pi'(r)-\Pi''(r)\right\}\left\{NF(r)+(r^2-\rho^2)\Pi''(r)\right\}$$

$$=6^{10}.C'Z'.r^{30}-6^9.(C'Z''+C''Z')r^{27}.t^2 .$$

L'équation finale du 7.ème degré est donc telle que l'on a;

$$6.r^3(V^2+C'Z')=t^2(2VV'+C'Z''+C''Z') .$$

L'abaissement de l'équation finale au-dessous du 7.ème degré est donc impossible, quelle que soit la petitesse de l'intervalle écoulé entre les trois observations. Cette même proposition a été soutenue par Lagrange dans ses deux premiers Mémoires *Sur la détermination de l'orbite des Comètes* publiés dans le Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1778 (Voyez les pages 120, 141, 142 et 156 de ce Volume). Et si, plus tard, dans le Volume de la même Académie pour l'année 1783 (p. 316), et au N.° 46 du second Volume de la Mécanique Analytique, Lagrange obtenait une équation finale du *sixième* degré, cela tient à la circonstance, que son analyse ne comprend pas la totalité des termes multipliés par t^2, qui, à la rigueur, entrent dans la composition de l'équation finale relative à l'orbite parabolique.

Toutefois il importe de ne pas perdre de vue que l'impossibilité de l'abaissement, dont nous parlons ici, est seulement inhérente à l'exclusion de l'emploi des coefficients différentiels, comme données de l'observation; et à la restriction de faire usage de *trois* observations seulement pour former l'équation qui détermine une des trois distances héliocentriques.

Pour avoir explicitement, en fonction de r, le double b de la distance périhélie, déterminée par l'équation $b = 2r - s^2$, il faut observer que l'équation

$$r'^2 = r^2 + \left(2t - \frac{t^3}{3r^3}\right)s + \frac{t^2}{r^2},$$

donne

$$s = \frac{3r^3 . r'^2 - 3r^2(r^3 + t^2)}{t(6r^3 - t^2)}.$$

Mais nous avons les équations

$$r'^2 = R'^2 - 2N'R' + \rho'^2 ;$$

$$R' = qR\left\{\frac{6r^3 - (m-1)^2 t^2}{6r^3 - m^2 t^2}\right\} ;$$

donc en faisant

$$\varphi'(r) = \frac{3q^2 r^3 \left\{6r^3 - (m-1)^2 t^2\right\}^2}{(6r^3 - t^2)(6r^3 - m^2 t^2)^2} ;$$

$$\varphi''(r) = \frac{6qN' r^3 \left\{6r^3 - (m-1)^2 t^2\right\}}{(6r^3 - t^2)(6r^3 - m^2 t^2)} ;$$

$$\varphi'''(r) = \frac{3r^2(r^3 - r.\rho'^2 + t^2)}{6r^3 - t^2} ;$$

l'on a

$$t^2 . b = 2r . t^2 - \left\{R^2 \varphi'(r) - R\varphi''(r) + \varphi'''(r)\right\}^2 :$$

ou bien,

$$t^2 . b = 2r . t^2 - \left\{(r^2 - \rho^2)\varphi'(r) + \left(2N' - \varphi''(r)\right)R + \varphi'''(r)\right\}^2 .$$

Et comme la valeur de R est donnée par l'équation

$$R = \rho \cos.(CS) \pm \sqrt{r^2 - \rho^2 . \sin.^2(CS)} ,$$

il est clair que la distance périhélie $\frac{1}{2} b$ est ainsi déterminée en fonction de la distance héliocentrique. On voit par cette formule que l'on aura b par une équation de la forme $b = 2r - \frac{\beta^2}{t^2}$; de sorte que le degré d'approximation avec lequel la quantité β^2 doit être calculée, doit être estimé en ayant égard à la grandeur du multiplicateur $\frac{1}{t^2}$.

Pour déterminer le signe qui doit affecter le radical qui entre dans cette valeur de R, remarquons, que l'on doit avoir la même valeur de b, en prenant pour s la valeur donnée par l'équation

$$r''^2 = r^2 + \left(2mt - \frac{m^3t^3}{3r^3}\right)s + \frac{m^2t^2}{r},$$

après avoir fait

$$r''^2 = R''^2 - 2N''R'' + \rho''^2 :$$

$$R'' = q'R.\frac{\left\{6r^3 - (m-1)^2t^2\right\}}{6r^3 - t^2}.$$

Alors on aura l'équation

$$m^4t^2.b = 2r.m^2t^2 - \left\{(r^2-\rho^2)\varphi'_{(1)}(r) + \left(2N'' - \varphi''_{(1)}(r)\right)R + \varphi'''_{(1)}(r)\right\}^2 ;$$

où les fonctions $\varphi'_{(1)}(r)$, $\varphi''_{(1)}(r)$, $\varphi'''_{(1)}(r)$ représentent ce que deviennent, respectivement, $\varphi'(r)$, $\varphi''(r)$, $\varphi'''(r)$ par le changement de q en q'; de N' en N''; de t^2 en m^2t^2, et de m^2t^2 en t^2, sans faire aucun changement à l'égard de $(m-1)^2t^2$.

A l'aide des deux équations ainsi formées on décidera le signe que doit prendre le radical afin de rendre identiques les deux valeurs de b. En outre, le signe de la quantité $s = r\frac{dr}{dt}$ sera positif ou négatif suivant que la première observation aura eu lieu *après* ou avant le passage de la Comète par le périhélie.

Et pour savoir, si le mouvement de la Comète est *direct* ou *rétrograde*, il faudra calculer les deux longitudes héliocentriques φ', φ'' correspondantes à la première et à la seconde observation, et voir si la différence $\varphi'' - \varphi'$ est positive ou négative. Ce calcul se fait à l'aide des formules connues:

$$\cos.\psi.\sin.\varphi = \frac{R}{r}\sin.\alpha.\cos.d - \frac{\rho}{r}\sin.\alpha ;$$

$$\cos.\psi.\cos.\varphi = \frac{R}{r}\cos.\alpha.\cos.d - \frac{\rho}{r}\cos.\alpha ;$$

$$\sin.\psi = \frac{R}{r}\sin.d ; \qquad \sin.(\varphi-\alpha) = \frac{R}{r}\cdot\frac{\cos.d.\sin.(a-\alpha)}{\cos.\psi} ;$$

$$\cos.(\varphi-\alpha) = \frac{R}{r}\cdot\frac{\cos.d.\cos.(a-\alpha)}{\cos.\psi} - \frac{\rho}{r}\cdot\frac{1}{\cos.\psi} ;$$

où a et d sont la longitude et la latitude géocentrique de la Comète; et α la longitude du Soleil; tandis que φ et ψ sont la longitude et la latitude héliocentrique pour le même instant.

Les mêmes valeurs de φ', φ''; ψ', ψ'' donneront l'inclinaison i de l'orbite par rapport à l'écliptique, la longitude h du Nœud ascendant,

et les distances $(C'\Omega)$, $(C''\Omega)$ de la Comète au Nœud, à l'aide des formules;

$$\sin.(\varphi''-\varphi')\,\text{tang.}\,i\,.\,\sin.\,h=\text{tang.}\,\psi''.\sin.\varphi'-\text{tang.}\,\psi'.\sin.\varphi''\ ;$$

$$\sin.(\varphi''-\varphi')\,\text{tang.}\,i\,.\,\cos.\,h=\text{tang.}\,\psi''.\cos.\varphi'-\text{tang.}\,\psi'.\cos.\varphi''\ ;$$

$$\text{tang.}\,i=\frac{\text{tang.}\,\psi'}{\sin.(\varphi'-h)}=\frac{\text{tang.}\,\psi''}{\sin.(\varphi''-h)}\ ;$$

$$\text{tang.}\left\{\frac{1}{2}(\varphi''+\varphi')-h\right\}=\frac{\sin.(\psi''+\psi')}{\sin.(\psi''-\psi')}\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi')\ ,$$

$$\text{tang.}\,(C'\,\Omega)=\frac{\text{tang.}\,(\varphi'-h)}{\cos.\,i}\ ;\qquad \text{tang.}\,(C''\Omega)=\frac{\text{tang.}\,(\varphi''-h)}{\cos.\,i}\ ;$$

données par l'équation du plan de l'orbite qui passe par le centre du Soleil.

Soit T le temps écoulé depuis l'instant de la première observation à l'instant du passage de la Comète par le périhélie: on aura sa valeur d'après l'équation

$$6\,T=(2\,\mathrm{r}+b)\sqrt{2\,\mathrm{r}-b}\ ;$$

(Voyez le N.° 24 du second Volume de la Mécanique Analytique) en ayant soin de l'*ajouter* ou de la *retrancher* de l'instant de la première observation, suivant que la valeur de s aura été trouvée *négative* ou *positive*.

Pour avoir immédiatement la valeur de T en jours solaires moyens, il faudra remplacer T par $T.\left(\frac{0^{\circ}.\,59'.\,8''.\,3}{57^{\circ}.\,17'.\,45''}\right)$, ce qui donne

$$T=9^{\text{jours}},687.(2\,\mathrm{r}+b)\sqrt{2\,\mathrm{r}-b}\ .$$

On calculera l'anomalie vraie Φ''; c'est-à-dire l'angle que le rayon vecteur r'' fait avec la distance périhélie $\frac{1}{2}b$ et la longitude L du périhélie, en observant que

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi''=\sqrt{\frac{2\,\mathrm{r}''-b}{b}}=\cot.\tfrac{1}{2}(\Phi''-\Phi)-\frac{\sqrt{\frac{\mathrm{r}''}{\mathrm{r}}}}{\sin.\frac{1}{2}(\Phi''-\Phi)}\ ;$$

$$L=(C''\Omega)-\Phi''+h\ .$$

En substituant pour I', I'', etc. leurs valeurs, l'équation

$$6r^3(I'^2+C'Z')=t^2(2I'I''+C'Z''+C''Z')\ ,$$

prendra la forme

$$6r^3(\beta^2r^4+\beta'r^2+\beta'')=t^2(\mu r^4+\mu' r^2+\mu'')\ ;$$

où l'on formera les six coefficients, en observant que si l'on fait;

$$B''=-3+5m-3m^2\ ;\qquad B^{IV}=3+2m^2\ ;$$
$$B'''=m(2+3m^2)\ ;\qquad B^{V}=3-8m+8m^2-3m^3\ ;$$

$$P=mq^2-q'^2\ ;\qquad P'=mA'q^2-A''q'^2\ ;\qquad P''=mqN'-q'N''\ ;$$

$$M_{(1)}=m\rho'^2-\rho''^2-P\rho^2\ ;\qquad M_{(2)}=1-m+P\ ;$$
$$M'_{(1)}=B'''\rho'^2-B^{IV}\rho''^2-P'\rho^2\ ;\qquad M'_{(2)}=P'+(m-1)B''\ ,$$
$$M''_{(1)}=N(\rho''^2-m\rho'^2)-P''\rho^2\ ;\qquad M''_{(2)}=P''+(m-1)N\ ;$$
$$M'''_{(1)}=N(B'''\rho'^2-B^{IV}\rho''^2)\ ;\qquad M'''_{(2)}=B'P''+NB^{V}\ ;$$

l'on a;

$$C'=NP-P''\ ;\qquad C''=NP'-B'P''\ ;$$

et :

$$I'=M_{(1)}+M_{(2)}r^2\ ;\qquad Z'=M''_{(1)}+M''_{(2)}r^2\ ;$$
$$I''=M'_{(1)}+M'_{(2)}r^2\ ;\qquad Z''=M'''_{(1)}+M'''_{(2)}r^2\ .$$

De sorte que nous avons

$$\beta=M_{(2)}\ ;$$
$$\beta'=2M_{(1)}M_{(2)}+C'M''_{(2)}\ ;$$
$$\beta''=M''_{(1)}+C'M''_{(1)}\ ;$$
$$\mu=2M_{(2)}M'_{(2)}\ ;$$
$$\mu'=2M_{(1)}M'_{(2)}+2M'_{(1)}M_{(2)}+C'M'''_{(2)}+C''M''_{(2)}\ ;$$
$$\mu''=2M_{(1)}M'_{(1)}+C'M'''_{(1)}+C''M''_{(1)}\ .$$

L'équation du 7.ème degré qui doit donner la distance héliocentrique r, appartenante à l'orbite parabolique, est donc telle qu'en posant;

$$r^7+H_{(1)}r^5-H_{(2)}t^2r^4+H_{(3)}r^3-H_{(4)}t^2r^2-H_{(5)}t^2=0\ ;$$

l'on a;

$$H_{(1)}=\frac{\beta'}{6\beta^2}\ ;\qquad H_{(2)}=\frac{\mu}{6\beta^2}\ ;\qquad H_{(3)}=\frac{\beta''}{6\beta^2}\ ;$$

$$H_{(4)}=\frac{\mu'}{6\beta^2}\ ;\qquad H_{(5)}=\frac{\mu''}{6\beta^2}\ .$$

Après avoir obtenu les valeurs numériques de ces coefficients avec les données des trois observations, il sera facile d'avoir les limites entre lesquelles sont comprises toutes les valeurs positives de r, à l'aide des principes connus.

De cette manière on calculera la valeur de r sans l'emploi de la quantité G, qui, par sa nature, peut être considérablement modifiée par les petites erreurs existantes sur les longitudes et latitudes de la Comète déduites des ascensions droites et déclinaisons observées.

Mais s'il était permis de faire abstraction de ces erreurs, il est certain que la valeur de r, dont il est ici question, devrait être une racine commune à l'équation

$$r^7 + H_{(1)}\, r^5 - \text{etc.} = 0 \ ,$$

et à l'équation

$$r^7 + \rho\, r^6 - p_1 r^5 - \text{etc.} = 0 \ ,$$

formée dans la Note relative au N.° 44; cette dernière ayant lieu quelle que soit la section conique décrite par l'astre observé. D'après cela on démontre en Algèbre, que la racine commune doit être une fonction *rationnelle* des coefficients des deux équations. Mais le calcul de cette fonction *a priori*, à l'aide des fonctions symétriques, est impraticable par son excessive longueur. Pour s'en convaincre, il suffira de faire observer, que r_1, r_2, r_3, ..., r_7 étant les sept racines de l'équation

$$F(r) = r^7 + H_{(1)}\, r^5 + \text{etc.} = 0 \ ;$$

si l'on fait,

$$f(r) = r^7 + \rho\, r^6 - p_1 r^5 - p_2 r^4 - p_3 r^3 + p_4 r^2 + p_5 r + p_6 \ ;$$

il faudrait former le produit ;

$$\Omega(r_7) = f(r_1).f(r_2).f(r_3).f(r_4).f(r_5).f(r_6) \ ,$$

qui a la propriété d'être une *fonction symétrique* des racines de l'équation du sixième degré;

$$\frac{F(r)}{r - r_7} = r^6 + r_7 . r^5 + (r_7 - H'_{(2)} t^2)\, r^4 + \text{etc.} = 0 \ .$$

En vertu de cette propriété le polynome $\Omega(r_7)$ sera réductible à la forme

$$\Omega(r_7) = T'_{(0)} + T'_{(1)}\, r_7 + T'_{(2)}\, r_7^2 + T'_{(3)}\, r_7^3 + T'_{(4)}\, r_7^4 + T'_{(5)}\, r_7^5 + T'_{(6)}\, r_7^6 \ ,$$

après avoir abaissé les puissances de r_7 supérieures à la sixième, par la règle connue. - Cela posé la racine commune aux deux équations étant désignée par r_1, l'on a (à cause que le coefficient du second terme est égal à zéro);

$$r_1 = \frac{T_{(5)}}{T_{(6)}} ,$$

où $T_{(6)}$ et $T_{(5)}$ représentent des fonctions des coefficients connus des deux équations du 7.ème degré. Mais, je le répète, un tel calcul est impraticable; et j'ai voulu seulement mettre en évidence le principe général de son exécution littérale pour mieux faire entendre à quoi tient la possibilité dont LAGRANGE a parlé à la page 297 de son 3.ème Mémoire *Sur la détermination de l'orbite des Comètes*, publié dans le Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1783. Car, autrement, on pourrait croire qu'il conviendrait de réaliser le principe que LAGRANGE énonce en disant: « que l'on peut, si l'on veut, rabaisser l'équation générale du septième » degré au premier; ce qui ne doit point paraître surprenant, attendu » que, dans le cas de l'orbite parabolique, le problème est plus que » déterminé par trois lieux observés de la Comète ».

Avant de terminer cette analyse je dois faire observer, que, à la rigueur, il ne fallait pas négliger les termes multipliés par $t^3.s$ qui se trouvent dans les expressions primitives de R, R', R'' posées au N.° 41 du même second Volume de la Mécanique Analytique, lorsqu'on admet les quantités du *quatrième* ordre dans le développement des coordonnées héliocentriques. Mais dès que l'on entreprend le calcul, sans la suppression de ces termes, on reconnait bientôt, que l'élimination de R, pour avoir une équation finale en r, devient à-peu-près impraticable par sa complication. Cette raison, jointe à la considération qu'on ne saurait tirer de là aucun parti utile, m'a fait abandonner l'idée de toute recherche ultérieure sur le point qui fait le sujet de cette Note. Toutefois je ne dois pas, ici, passer sous silence que LEGENDRE, en 1820, a fait la remarque, qu'on peut faire dépendre d'une équation du *troisième* degré la détermination de l'orbite parabolique des Comètes en supposant connus les coefficients différentiels (qui font partie des données) avec toute l'*exactitude nécessaire* (Voyez pages 64 et 75 de son *Second Supplément*).

Au reste on sait, que, LAPLACE, avec l'emploi des coefficients différentiels, tombe sur une équation du *sixième* degré (Voyez la page 216 du premier Volume de la Mécanique Céleste).

Lagrange, vers la fin du N.° 42 de sa Mécanique Analytique, fait remarquer en quoi consiste le principal avantage de la méthode qu'il propose, et les obstacles qu'elle présente pour pousser plus loin l'approximation. Mais, à cette généralité, j'ajouterai que la méthode du N.° 46, quoique bornée à l'hypothèse de l'orbite parabolique, devient impraticable en voulant conserver les termes multipliés par t^4 dans le développement des trois fonctions V, V', V''. Car, alors, l'expression des rapports $\frac{R'}{R}$, $\frac{R''}{R}$ conserve un terme multiplié par $\frac{ts}{r^3}$, et l'élimination de s doit s'effectuer entre deux équations en s du second degré; ce qui conduit à une équation en R, qui n'est pas du second mais du sixième degré. Ainsi, tout bien considéré, le choix des inconnues r, s, $\frac{ds}{dt}$, fait par Lagrange, cesse de sauver les difficultés analytiques inhérentes à ce problème, dès qu'on veut considérer les termes multipliés par une puissance de *t supérieure à la troisième.* Alors on sent toute la justesse et toute la force de cette réflexion de Gauss: « *incognitarum* » *separatio talis, ut tandem aequatio unicam tantummodo continens pro-* » *deat, generaliter loquendo, pro impossibili haberi potest, multoque* » *adeo minus problematis solutionem integram per solas operationes di-* » *rectas absolvere licebit* ». Gauss, page 135 de son ouvrage *Theoria motus corporum coelestium etc.*

2.ème NOTE sur le N.° 46.

Formation de l'équation finale en ayant égard à la quatrième *puissance du temps dans l'expression des trois fonctions* V, V', V''.

D'après la remarque exposée au N.° 44, les valeurs générales de GRV'', $-GR'V'$, GRV, posées dans le N.° 41, peuvent être réduites à celles-ci;

$$GRV''=\rho\Gamma(V''-\overline{V''})-\rho'\Gamma'(V'-\overline{V'})+\rho''\Gamma''(V-\overline{V})\ ;$$

$$-GR'V'=\rho\Gamma_1(V''-\overline{V''})-\rho'\Gamma_1'(V'-\overline{V'})+\rho''\Gamma_1''(V-\overline{V})\ ;$$

$$GR''V=\rho\Gamma_2(V''-\overline{V''})-\rho'\Gamma_2'(V'-\overline{V'})+\rho''\Gamma_2''(V-\overline{V})\ ;$$

où $\overline{V}$, $\overline{V'}$, $\overline{V''}$ désignent ce que deviennent les valeurs de V, V', V'', après y avoir fait $r=\rho$. Par là, les termes multipliés par la première puissance de t sont immédiatement détruits, et, après avoir divisé les deux membres par t, on obtient trois équations dans lesquelles le second membre est de la forme

$$At^2+Bt^3+\text{etc.}$$

Et comme en divisant par t les valeurs de V, V', V'' prennent la forme

$$A'+B't^2+C't^3+\text{etc.}\ ,$$

il est clair, que, en conservant les termes multipliés par t^4 dans les expressions de V, V', V'', on obtient pour R, R', R'' des valeurs exactes jusqu'à la *troisième* puissance de t inclusivement. Cela posé, il est facile de voir, que, en négligeant toute quantité multipliée par t^4, on aura, au lieu des valeurs de R, R', R'' données dans la page 54 (N.° 44), celles-ci;

$$R=\frac{-t^2}{6G(m-1)}\left\{QX-\frac{2}{3}Y.Ut\right\}\ ;$$

$$R'=\frac{t^2}{6Gm}\left\{Q_1X-\frac{2}{3}Y.U_1t\right\}\ ;$$

$$R''=\frac{-t^2}{6G}\left\{Q_2X-\frac{2}{3}Y.U_2t\right\}\ ;$$

où,

$$X=\frac{1}{r^3}-\frac{1}{\rho^3}\ ;\qquad Y=\frac{s}{r^5}-\frac{s'}{\rho^5}\ ;$$

s' étant la valeur de $\rho\frac{d\rho}{dt}$ correspondante à l'instant pris pour l'origine du temps. On désigne par Q_1, Q_2; U_1, U_2 les valeurs de

$$Q=(m-1)^3.\rho\Gamma-m^3.\rho'\Gamma'+\rho''\Gamma''\ ;$$

$$U=(m+1)(m-1)^3\rho\Gamma-m^4.\rho'\Gamma'+\rho''\Gamma''\ ,$$

en y changeant successivement Γ, Γ', Γ'', en Γ_1, Γ_1', Γ_1''; Γ_2, Γ_2', Γ_2''.

Maintenant, si l'on néglige les termes multipliés par t^2; après avoir fait

$$K'=\frac{U_1}{Q_1}-\frac{U}{Q}\ ;\qquad K''=\frac{U_2}{Q_2}-\frac{U}{Q}\ ,$$

on tire de là;

$$\frac{R'}{R}=-\frac{(m-1)}{m}\cdot\frac{Q_1}{Q}\left\{1-\frac{2}{3}K'.\frac{V}{X}t\right\};$$

$$\frac{R''}{R}=\quad(m-1)\cdot\frac{Q_2}{Q}\left\{1-\frac{2}{3}K''.\frac{V}{X}t\right\}.$$

Donc, en remarquant que l'on peut négliger la quantité s', qui a pour facteur la première puissance de l'excentricité de l'orbite de la Terre, l'on aura

$$R'=q\,R\left\{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{K't}{X\mathrm{r}^3}\cdot\mathrm{s}\right\};$$

$$R''=q'R\left\{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{K''t}{X\mathrm{r}^3}\cdot\mathrm{s}\right\};$$

où l'on a fait:

$$q=-\frac{(m-1)}{m}\cdot\frac{Q_1}{Q};\qquad q'=(m-1).\frac{Q_2}{Q}.$$

Ces valeurs de R', R'' étant substituées dans les équations

$$R'^2-2N'R'+\rho'^2=\mathrm{r}^2+\frac{t^2}{\mathrm{r}}+\left(2t-\frac{t^3}{3\mathrm{r}^3}\right).\mathrm{s};$$

$$R''^2-2N''R''+\rho''^2=\mathrm{r}^2+\frac{m^2t^2}{\mathrm{r}}+\left(2mt-\frac{m^3t^3}{3\mathrm{r}^3}\right).\mathrm{s},$$

déjà établies dans la première Note sur le N.° 46, on aura deux équations du second degré en s, de la forme

$$\mathrm{s}^2.R^2t^2H+\mathrm{s}.tH'+E=0;$$

$$\mathrm{s}^2.R^2t^2H_{(1)}+\mathrm{s}.tH'_{(1)}+E'=0.$$

Donc, en éliminant s, on obtiendra l'équation

$$R^2(EH_{(1)}-E'H)^2+(H'H_{(1)}-H'_{(1)}H)(E'H'-EH'_{(1)})=0,$$

qui s'élève au 6.ème degré par rapport à R, en observant que H', $H'_{(1)}$, E, E' contiennent le carré de R. Maintenant, si l'on fait

$$H=\frac{4}{3}\cdot\frac{q^2K'^2}{\mathrm{r}^{10}X^2}=\frac{L}{\mathrm{r}^{10}X^2};\qquad H_{(1)}=\frac{4}{3}\cdot\frac{q'^2K''^2}{\mathrm{r}^{10}X^2}=\frac{L'}{\mathrm{r}^{10}X^2};$$

$$E_{,} = q^{2}.\mathrm{r}R^{2} + \mathrm{r}\rho'^{2} - \mathrm{r}^{3} - t^{2} \; ;$$

$$E_{,}' = q'^{2}.\mathrm{r}R^{2} + \mathrm{r}\rho''^{2} - \mathrm{r}^{3} - m^{2}t^{2} \; ;$$

l'on aura, en substituant ces expressions dans l'équation précédente;

$$R^{2}(E_{,}L' - E_{,}'L)^{2} + X^{2}\mathrm{r}''(H'L' - H'_{(1)}L)(E_{,}'H' - E_{,}H'_{(1)}) = 0 \; .$$

Mais en faisant

$$H' = \frac{I}{X\mathrm{r}^{5}} \; ; \qquad H'_{(1)} = \frac{I'}{X\mathrm{r}^{5}} \; ;$$

l'on aura

$$R^{2}(E_{,}L' - E_{,}'L)^{2} + \mathrm{r}(IL' - I'L)(E_{,}'I - E_{,}I') = 0 \; ;$$

où les polynomes désignés par I, I' sont tels que l'on a;

$$I = -\frac{4}{3}q^{2}K'R^{2} + \frac{4}{3}N'.qK'R - \frac{(6\mathrm{r}^{3} - t^{2})}{3\mathrm{r}}\mathrm{r}^{3}X \; ;$$

$$I' = -\frac{4}{3}q'^{2}K''R_{,}^{2} + \frac{4}{3}N''.q'K''R - \frac{(6m\mathrm{r}^{3} - m^{3}t^{2})}{3\mathrm{r}}\mathrm{r}^{3}X \; .$$

Cela posé, si l'on fait

$$I = 3\mathrm{r}.\xi \; ; \qquad I' = 3\mathrm{r}.\xi' \; ;$$

l'on aura;

$$\xi = -4.q^{2}K'.\mathrm{r}R^{2} + 4N'.qK'.\mathrm{r}R - (6\mathrm{r}^{3} - t^{2})\left(1 - \frac{\mathrm{r}^{3}}{\rho^{3}}\right) \; ;$$

$$\xi' = -4.q'^{2}K''.\mathrm{r}R^{2} + 4N''.q'K''.\mathrm{r}R - (6m\mathrm{r}^{3} - m^{3}t^{2})\left(1 - \frac{\mathrm{r}^{3}}{\rho^{3}}\right) \; ;$$

et l'équation finale deviendra;

$$R^{2}(E_{,}L' - E_{,}'L)^{2} + 9\mathrm{r}^{3}(L'\xi - L\xi')(E_{,}'\xi - E_{,}\xi') = 0 \; .$$

On voit maintenant que cette équation monte au *sixième* degré par rapport à la distance géocentrique R, et au *dix-huitième* degré par rapport à la distance héliocentrique r. En exécutant les multiplications indiquées, on pourra facilement lui donner la forme;

$$0 = R^{2}(\Omega R^{2} + \Omega')^{2} + (\Pi R^{2} + \Pi' R + \Pi'')(\Upsilon R^{4} + \Upsilon' R^{3} + \Upsilon'' R^{2} + \Upsilon''' R + \Upsilon^{\mathrm{IV}}) \; .$$

Actuellement, si l'on observe que l'on a;

$$R^2 = r^2 - \rho^2 + 2NR \ ;$$

$$R^3 = 2N(r^2 - \rho^2) + R(4N^2 + r^2 - \rho^2) \ ;$$

$$R^4 = (4N^2 + r^2 - \rho^2)(r^2 - \rho^2) + 4NR(2N^2 + r^2 - \rho^2) \ ;$$

on pourra réduire cette équation au premier degré par rapport à R, et en tirer une expression rationnelle en fonction de r de la forme

$$R = \frac{F(r)}{f(r)} \ ,$$

laquelle étant substituée dans l'équation

$$R^2 - 2NR + \rho^2 - r^2 = 0 \ ,$$

entraîne à une équation réductible au 36.ème degré par rapport à r. Cette circonstance suffit pour mettre en évidence, même dans le cas plus simple (celui de l'orbite parabolique), l'obstacle insurmontable qui empêche de pousser l'approximation au-delà de la troisième puissance du temps par la méthode exposée par LAGRANGE dans le N.° 46 de sa Mécanique Analytique. En outre il faut observer que les erreurs des observations ont, en général, une plus grande influence sur le rapport $\frac{R'}{R}$ que sur le rapport $\frac{R''}{R}$ des deux distances géocentriques extrêmes.

NOTE

Sur l'expression analytique des rapports $\frac{R''}{R}$, $\frac{R''}{R'}$, $\frac{R'}{R}$ ***entre deux des trois distances*** R, R', R'' ***de la Comète à la Terre.***

Conformément aux formules que j'ai établies dans ma seconde Note sur le N.° 46, si l'on retient les termes multipliés par la première puissance de l'inconnue s, l'on a;

$$GR \,.\, V'' = -X \,.\, Q\, t^3 + \frac{t^4}{4} \cdot \frac{s\,U}{r^5} \ ;$$

$$-GR' \,.\, V' = -X \,.\, Q_1 t^3 + \frac{t^4}{4} \cdot \frac{s\,U_1}{r^5} \ ;$$

$$GR'' \,.\, V = -X \,.\, Q_2 t^3 + \frac{t^4}{4} \cdot \frac{s\,U_2}{r^5} \ ;$$

où :

$$V = t - \frac{t^3}{6r^3} + \frac{s.t^5}{4r^5} + \text{etc.} \; ;$$

$$V' = mt - \frac{m^3 t^3}{6r^3} + \frac{s.m^5 t^5}{4r^5} + \text{etc.} \; ;$$

$$V'' = (m-1)t - \frac{(m-1)^3 t^3}{6r^3} + \frac{s.(m-1)^3(m+1)t^5}{4r^5} + \text{etc.}$$

Il suit de là que, en posant

$$K' = \frac{U_1}{Q_1} - \frac{U}{Q} \; ; \qquad K'' = \frac{U_2}{Q_2} - \frac{U}{Q} \; ; \qquad K''' = \frac{U_2}{Q_2} - \frac{U_1}{Q_1} \; ,$$

et négligeant les termes multipliés par $\frac{t^2}{16}$ dans le *troisième* facteur, nous avons

$$\frac{R''}{R} = \frac{V''}{V} \cdot \frac{Q_2}{Q} \left\{ 1 - \frac{t.K''s}{4Xr^5} \right\} \; ;$$

$$\frac{R''}{R'} = -\frac{V'}{V} \cdot \frac{Q_2}{Q_1} \left\{ 1 - \frac{t.K'''s}{4Xr^5} \right\} \; ;$$

$$\frac{R'}{R} = -\frac{V''}{V'} \cdot \frac{Q_1}{Q} \left\{ 1 - \frac{t.K's}{4Xr^5} \right\} \; .$$

La quantité s, ayant tacitement l'excentricité pour facteur, le troisième facteur de ces formules pourrait être réduit à l'unité, à l'égard d'une planète ; mais, pour les comètes d'une grande excentricité, cette réduction n'est permise que dans une première approximation. Maintenant, si l'on développe les rapports $\frac{V''}{V}$, $\frac{V'}{V}$, $\frac{V''}{V'}$ en retenant les termes multipliés par t^3, l'on aura

$$\frac{V''}{V} = (m-1) \left\{ 1 - \left[(m-1)^2 - 1 \right] \frac{t^2}{6r^3} + \left[(m-1)^2 (m+1) - 1 \right] \frac{s t^3}{4r^5} \right\} \; ;$$

$$\frac{V'}{V} = m \left\{ 1 - (m^2 - 1) \frac{t^2}{6r^3} + (m^3 - 1) \frac{s t^3}{4r^5} \right\} \; ;$$

$$\frac{V''}{V'} = \left(\frac{m-1}{m} \right) \left\{ 1 - \left[(m-1)^2 - m^2 \right] \frac{t^2}{6r^3} + \left[(m-1)^2 (m+1) - m^3 \right] \frac{s t^3}{4r^5} \right\} \; .$$

Actuellement il faut observer que, en plaçant l'origine du temps à

l'instant de la première observation, le rapport $\frac{R''}{R}$ est celui des deux distances géocentriques extrêmes. Alors m devient égal à 2, si l'intervalle entre la première et la seconde observation est égal à l'intervalle entre la seconde et la troisième; et le rayon vecteur r est celui qui répond à la première observation. Dans ce cas le terme multiplié par $\frac{t^2}{6\,r^3}$ devient nul à cause de $(m-1)^2-1=0$: ce qui donne

$$\frac{\Gamma''}{\Gamma}=1+\frac{s\,t^3}{2\,r^5}\ ;$$

$$\frac{R''}{R}=\frac{Q_2}{Q}\left\{1+\frac{s\,t^3}{2\,r^5}\right\}\left\{1-\frac{t\,K''s}{4\,X.r^5}\right\}.$$

Mais en plaçant l'origine du temps à l'instant de la seconde observation, il faut prendre t négativement, ainsi que le coefficient m, afin que l'intervalle $t'=m\,t$ soit positif. Dans ce cas, suivant les dénominations établies, le rapport des distances géocentriques extrêmes est exprimé par $\frac{R''}{R'}$, en observant que les lettres R, r devant répondre à l'instant où $t=0$ sont la distance géocentrique, et la distance héliocentrique intermédiaire.

Si les deux intervalles entre la première et la seconde, et entre la seconde et la troisième observation sont égaux, il faudra prendre $m=-1$; ce qui donne

$$-\frac{\Gamma'}{\Gamma}=1+\frac{s\,t^3}{2\,r^5}\ ;$$

$$\frac{R''}{R'}=\frac{Q_2}{Q_1}\left(1+\frac{s\,t^3}{2\,r^5}\right)\left(1+\frac{t\,K'''s}{4\,X.r^5}\right).$$

Ainsi, dans l'un et l'autre cas, le terme multiplié par ts demeure dans l'expression du rapport des deux distances géocentriques extrêmes. C'est de quoi j'ai voulu donner une démonstration puisée dans l'expression analytique des rapports $\frac{\Gamma''}{\Gamma}$, $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$, $\frac{\Gamma''}{\Gamma'}$, déterminés par les séries de Lagrange, sans employer la signification géométrique, que les trois fonctions du temps Γ, Γ', Γ'' ont, à l'aide des *secteurs* triangulaires inscrits dans les secteurs elliptiques.

Pour mettre en évidence cette signification, remarquons que les formules du N.° 28 du second Volume de la Mécanique Analytique donnent, en désignant par $x_1, y_1, z_1, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dz_1}{dt}$, les valeurs de $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ correspondantes à $t=0$;

$$x = x_1 \; ; \qquad y = y_1 \; ;$$

$$x' = x_1 T + \frac{dx_1}{dt} V \; ; \qquad y' = y_1 T + \frac{dy_1}{dt} V \; ;$$

$$x'' = x_1 T' + \frac{dx_1}{dt} V' \; ; \qquad y'' = y_1 T' + \frac{dy_1}{dt} V' \; ;$$

où en posant

$$T = F(t) \; ; \qquad V = \Phi(t) \; ;$$

l'on a, par le changement de t en t',

$$T' = F(t') \; ; \qquad V' = \Phi(t') \; .$$

Cela posé, il est facile de voir que, en faisant

$$V'' = TV' - T'V \; ,$$

l'on a

$$y\,x' - x\,y' = \left(y_1 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dy_1}{dt}\right) V \; ;$$

$$y\,x'' - x\,y'' = \left(y_1 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dy_1}{dt}\right) V' \; ;$$

$$y'x'' - x'y'' = \left(y_1 \frac{dx_1}{dt} - x_1 \frac{dy_1}{dt}\right) V'' .$$

Mais les formules du N.° 13 du second Volume de la Mécanique Analytique donnent;

$$x = \alpha X + \beta Y \; ; \qquad y = \alpha_1 X + \beta_1 Y \; ;$$

$$x' = \alpha X' + \beta Y' \; ; \qquad y' = \alpha_1 X' + \beta_1 Y' \; ;$$

$$x'' = \alpha X'' + \beta Y'' \; ; \qquad y'' = \alpha_1 X'' + \beta_1 Y'' \; ;$$

où X, Y; X', Y'; X'', Y'' sont les coordonnées correspondantes dans le plan même de l'orbite. Donc l'on a ;

$$y\,x' - x\,y' = (\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)(Y\,X' - X\,Y')\ ;$$

$$y\,x'' - x\,y'' = (\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)(Y\,X'' - X\,Y'')\ ;$$

$$y'x'' - x'y'' = (\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)(Y'X'' - X'Y'')\ ;$$

où le facteur commun $\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = \cos.i$; i étant l'inclinaison de l'orbite au plan fixe de xy. En outre l'on a

$$y_1\frac{dx_1}{dt} - x_1\frac{dy_1}{dt} = -\sqrt{g}.\sqrt{b}\cos.i\ ,$$

b étant le paramètre de l'orbite, et g l'intensité de la force attractive du Soleil à l'unité de distance. Ainsi, en posant $g = 1$, la comparaison de ces doubles expressions donne immédiatement;

$$V = \frac{1}{\sqrt{b}}(X\,Y' - Y\,X') = \frac{r\,r'}{\sqrt{b}}\sin.(v' - v)\ ;$$

$$V' = \frac{1}{\sqrt{b}}(X\,Y'' - Y\,X'') = \frac{r\,r''}{\sqrt{b}}\sin.(v'' - v)\ ;$$

$$V'' = \frac{1}{\sqrt{b}}(X'Y'' - Y'X'') = \frac{r'r''}{\sqrt{b}}\sin.(v'' - v')\ ;$$

et par conséquent

$$\frac{V''}{V} = \frac{X'Y'' - Y'X''}{XY' - YX'}\ ; \qquad \frac{V'}{V} = \frac{XY'' - YX''}{XY' - YX'}\ ;$$

$$\frac{V''}{V'} = \frac{X'Y'' - Y'X''}{XY'' - YX''}\ ; \qquad b = \frac{r\,V'' - r'V' + r''V}{V'' - V' + V}\ ;$$

r, r', r'' étant les trois rayons vecteurs, et v, v', v'' les trois anomalies vraies correspondantes.

De sorte que le rapport $\frac{V''}{V}$ est le même que celui des deux secteurs triangulaires extrêmes si l'origine du temps est placée à l'instant de la première observation: et si cette origine est placée à l'instant de la seconde, le rapport $\frac{V'}{V}$ prendra la place des deux secteurs triangulaires extrêmes. Quels que soient les avantages attachés à cette manière de voir ces rapports (préférée par Gauss), il me paraît que l'introduction des deux fonctions T et V, faite par Lagrange dans ses formules du N.° 28, offre seule les moyens propres à estimer la différence entre les rapports

des *secteurs elliptiques* et ceux des *secteurs triangulaires* par un développement suivant les puissances du temps.

En effet, cette analyse démontre que l'on a les équations;

$$V = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{b}.\cos.i} = \frac{XY' - YX'}{\sqrt{b}} \; ;$$

$$V' = \frac{xy'' - yx''}{\sqrt{b}.\cos.i} = \frac{XY'' - YX''}{\sqrt{b}} \; ;$$

$$V'' = \frac{x'y'' - y'x''}{\sqrt{b}.\cos.i} = \frac{X'Y'' - Y'X''}{\sqrt{b}} \; ;$$

où

$$V = t\left\{1 - \frac{t^2}{6r^3} + \frac{st^3}{4r^5} + \frac{t^4}{40.r^5}\left[3\frac{ds}{dt} - 15\frac{s^2}{r^2} + \frac{1}{3r}\right]\right\} \; ;$$

$$V' = mt\left\{1 - \frac{m^2t^2}{6r^3} + \frac{sm^3t^3}{4r^5} + \frac{m^4t^4}{40.r^5}\left[3\frac{ds}{dt} - 15\frac{s^2}{r^2} + \frac{1}{3r}\right]\right\} \; ;$$

$$V'' = (m-1)t\left\{1 - \frac{(m-1)^2t^2}{6r^3} + \frac{s(m-1)^2(m+1)t^3}{4r^5}\right\}$$

$$+ \frac{(m-1)^5t^5}{40r^5}\left\{\frac{(1+\frac{4}{3}m+m^2)}{(m-1)^2}\left(3\frac{ds}{dt} - 15\frac{s^2}{r^2}\right) + \frac{1}{3r}\right\} \; .$$

En conservant les termes multipliés par t^4 et t^5 on voit mieux que si l'on a

$$V = \Phi(t) \; , \qquad V' = \Phi(mt) \; ,$$

on ne peut pas dire que l'on a $V'' = \Phi\left((m-1)t\right)$ au-delà des termes multipliés par t^3. De sorte que la fonction V'' est différente de la fonction V.

Les deux quantités inconnues s et $\frac{ds}{dt}$, que ces séries renferment, affectent des puissances du temps supérieures à la troisième. En outre, il n'est pas inutile de remarquer, que, d'après leur signification, elles doivent avoir des valeurs peu considérables à l'égard des planètes, et de tout astre ayant une petite excentricité, puisque l'on a;

$$s = \sqrt{2r - b - \frac{r^2}{a}} = \sqrt{2r - a\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right) + ae^2} \; ;$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}} \; .$$

Le paramètre b peut être exprimé par les trois fonctions V, V', V'' à l'aide de la formule que j'ai donné plus haut.

Peut-être la postérité reconnaîtra que cette théorie de LAGRANGE publiée en 1778 et 1783 ne méritait pas d'être passée sous silence par GAUSS, et qu'elle suffisait pour tempérer (en 1809) la phrase *Nihilominus satis mirum videtur, problema generale* .....

.....

usque ad initium hujus saeculi penitus propemodum neglectum esse, vel saltem a nemine serio ac digne tractatum (Theoria motus corporum coelestium etc.; Praefatio, p. VII et VIII) (*).

Cette Note m'offre l'occasion de faire observer que les valeurs approchées des rapports $\frac{R'}{R}$, $\frac{R''}{R}$ peuvent être exactes, quoique déduites d'expressions absolument fautives des trois distances géocentriques R, R', R''. C'est ce qui arrive en prenant pour R, R', R'' les formules données par BOUGUER dans son Mémoire publié dans le Volume de

---

(*) Les trois équations [1], [2], [3], que GAUSS établit à la page 128 de son ouvrage, en disant, avec toute raison, que ces trois équations *ad conclusiones plurimas gravissimas viam sternunt*, sont, dans le fond, les équations mêmes que LAGRANGE avait données à la page 305 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1783. Et l'expression des trois distances géocentriques qu'il y donne à la page 130 par les équations [9], [10], [11] sont les mêmes que celles données par LAGRANGE à la page 306 du Volume que je viens de citer. La propriété géométrique des 19 symboles, énoncée par GAUSS à la page 129, *singulas has expressiones aequales fieri volumini sextuplo pyramidis cujus vertex est in Sole etc.* n'a pas échappé et ne pouvait pas échapper à LAGRANGE [auteur du beau Mémoire *Sur les pyramides triangulaires*, publié dans le Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1773]. Car, à la page 309 de son Mémoire, on y lit cette proposition: « Au reste, il est facile de prouver que cette quantité (qui est l'équivalent de celle de » GAUSS) n'est autre chose, que la solidité prise six fois de la pyramide triangulaire qui a le » sommet au centre du Soleil, etc. » Je ne puis m'empêcher d'ajouter, que les séries f, g, l, fonctions du temps (qui répondent à celles désignées par V, V', V'' au N.° 41 de la Mécanique Analytique), ont été données aux pages 300 et 314 de ce Mémoire de LAGRANGE. Elles offrent (combinées avec les formules qu'il avait données dans son Mémoire de 1778) une solution directe du problème traité par GAUSS aux numéros 84, 85 et 86 de son ouvrage, en intégrant par les formules *des quadratures* l'élément du secteur elliptique.

Le Mémoire de LAGRANGE *Sur une manière particulière d'exprimer le temps dans les sections coniques etc.* publié dans le Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1778 (page 181) est un chef d'œuvre d'analyse qui pouvait obtenir, de la part de GAUSS, une mention spéciale au N.° 106 de son ouvrage. Car, la phrase: *Quamquam hoc argumentum a pluribus geometris jam tractatum sit*, fait un contraste frappant avec celle de LAGRANGE qui a parlé du théorème de LAMBERT en disant (page 119 du Volume de l'Académie de Berlin pour 1778): « qu'il doit être » regardé par sa simplicité et sa généralité comme une des plus ingénieuses découvertes qui aient » été faites dans la théorie du système du Monde ».

l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1733. En effet, les formules données par LAGRANGE au N.° 44 de la Mécanique Analytique sont susceptibles de cette double forme; savoir

$$R=\frac{Qt^2}{6(m-1)G\rho^3}\left(1-\frac{\rho^3}{r^3}\right)=\frac{P}{(m-1)G}\left(1-\frac{\rho^3}{r^3}\right);$$

$$R'=\frac{Q_1t^2}{6mG\rho^3}\left(1-\frac{\rho^3}{r^3}\right)=\frac{P_1}{mG}\left(1-\frac{\rho^3}{r^3}\right);$$

$$R''=\frac{Q_2t^2}{6G\rho^3}\left(1-\frac{\rho^3}{r^3}\right)=\frac{P_2}{G}\left(1-\frac{\rho^3}{r^3}\right);$$

où l'on a

$$P=(m-1)\rho\Gamma-m\rho'\Gamma'+\rho''\Gamma'';$$

et P_1, P_2 ce que devient cette expression de P par le changement de Γ, Γ', Γ'', en Γ_1, Γ_1', Γ_1''; Γ_2, Γ_2', Γ_2'', respectivement.

Or, en supprimant le facteur commun $1-\frac{\rho^3}{r^3}$, on aura les formules fautives

$$R=\frac{P}{(m-1)G};\qquad R'=\frac{P_1}{mG};\qquad R''=\frac{P_2}{G}$$

de BOUGUER, qui donnent cependant des valeurs exactes pour $\frac{R'}{R}$, $\frac{R''}{R}$. Le défaut de ces dernières formules disparaît en quelque sorte lorsque la distance héliocentrique r de la Comète surpasse considérablement la distance ρ de la Terre au Soleil.

LAGRANGE, aux pages 138-41 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1778, trouvait $\frac{1}{\rho^4}-\frac{1}{r^3}$, au lieu du véritable facteur $\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r^3}$. Mais ce résultat inexact a été bientôt rectifié par lui-même, en remplaçant le raisonnement qu'il faisait dans les pages que je viens de citer par un autre, tout-à-fait conforme à la *Théorie du mouvement elliptique de la Terre*. Ce raisonnement est celui qu'il a exposé aux pages 317-19 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1783, et reproduit au N.° 44 du second Volume de la Mécanique Analytique. Pour plus de clarté il avait composé une Note sur ce point qui a été trouvée, après sa mort, parmi ses papiers: c'est celle qu'on lit aux pages 355 et 356 de cet ouvrage. Sur cette même discordance entre les

deux facteurs $\frac{1}{\rho^4}-\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r^3}$, LAPLACE a publié une Note curieuse dans la page 32 du Volume de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1780. Au reste, LAGRANGE remarque, avec raison, en finissant le N.° 44 que je viens de citer, que l'abaissement de l'équation finale du huitième au septième degré n'aurait pas lieu, si les positions du Soleil étaient calculées en ayant égard aux perturbations du mouvement elliptique (*).

2.^DE NOTE

Sur le N.° 44 (page 55) du second Volume de la Mécanique Analytique de LAGRANGE.

Au lieu d'éliminer R entre les deux équations

$$[1] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad R=\frac{K\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r^3}\right)}{1-\frac{(m-1)^2t^2}{6r^3}} \ ;$$

$$[2] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad r^2=R^2-2\rho R\cos.(CS)+\rho^2 \ ;$$

où $K=\frac{Qt^2}{6(m-1)G}$, on peut éliminer r; et alors on obtient cette équation en R du *huitième* degré;

$$[3] \ldots \quad \left\{R^2-2\rho R\cos.(CS)+\rho^2\right\}^3\left(R-\frac{K}{\rho^3}\right)^2-\left\{\frac{R(m-1)^2t^2}{6}-K\right\}^2=0 \ .$$

Mais il est évident que son dernier terme devient nul par la destruction des deux parties qui le composent, ce qui l'abaisse au septième degré. De sorte que, en écrivant seulement le premier et le dernier terme, la valeur de R doit être une racine de l'équation

$$[4] \ldots \quad R^7+\ldots\ldots\ldots+\frac{K}{\rho}\left\{\rho^4-6K.\cos.(CS)+\frac{(m-1)^2t^2}{3}.\rho\right\}=0 \ .$$

(*) Car alors les équations $\frac{6P\rho^3}{Qt^2}=1$; $\frac{6P_1\rho^3}{Q_1t^2}=1$; $\frac{6P_2\rho^3}{Q_2t^2}=1$, établies dans la page 51 n'auraient plus lieu.

Considérons d'abord le cas où la quantité K serait *positive*, abstraction faite de toute influence que les erreurs des observations peuvent avoir sur son évaluation. Alors, on en conclura d'abord, que l'on doit avoir $r > \rho$, afin que, conformément à l'équation [1], la valeur de R puisse être positive. Il ne suffit pas que l'on ait $K > 0$; il faut encore que l'on ait

$$[5] \ldots\ldots\ldots \quad \rho^4 - 6K\cos.(CS) + \frac{(m-1)^2}{3} . t^2 . \rho > 0 \ ,$$

pour que le dernier terme de l'équation [4] soit positif. Or il est clair que cette inégalité sera toujours remplie, si $\cos.(CS) < 0$, et que, dans le cas où ce *cosinus* a une valeur positive, il faudra que l'on ait

$$[6] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6K\cos.(CS) < \rho^4 \ .$$

Ces conditions ayant lieu, l'équation [4], de degré impair, aura nécessairement une racine négative; mais, à l'égard des racines positives, elle pourra n'en admettre *aucune*, ou en avoir *deux*, et pas davantage: la possibilité d'une seule racine positive étant exclue par le signe positif de son dernier terme. Pour démontrer la vérité de ces assertions, je désigne, pour un moment, par $F(R)$ le premier membre de l'équation [3]. En différentiant cette fonction par rapport à R, et posant l'équation

$$\frac{d.F(R)}{dR} = F'(R) = 0 \ ,$$

on pourra lui donner cette forme; savoir

$$[7] \ldots\ldots \quad \left(R - \frac{K}{\rho^3}\right) U^2 . \Pi = \frac{(m-1)^2}{6} t^2 \left\{ R \frac{(m-1)^2}{6} t^2 - K \right\} \ ;$$

en faisant, pour plus de simplicité;

$$H = \frac{3K}{\rho^3} + 5 . \rho \cos.(CS) \ ; \qquad H' = 1 + \frac{3K\cos.(CS)}{\rho^4} \ ;$$

$$U = R^2 - 2\rho R\cos.(CS) + \rho^2 \ ;$$

$$\Pi = R^2 - \frac{H}{4} R + \frac{\rho^2}{4} H' \ .$$

Le facteur $\frac{(m-1)^2}{6} t^2$ rend le second membre de l'équation [7] toujours fort petit (entre les limites que les intervalles des trois observations comportent suivant cette théorie): donc, en supposant nul ce

second membre, on aura immédiatement toutes les racines de l'équation

$$[8] \ldots\ldots\ldots \qquad \left(R - \frac{K}{\rho^3}\right) U^2 . \Pi = 0 \ ,$$

par les équations

$$R - \frac{K}{\rho^3} = 0 \ ; \qquad U = 0 \ ; \qquad \Pi = 0 \ ,$$

qui donnent

$$[9] \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} R = \dfrac{K}{\rho^3} \ ; \\ R = \rho \left\{ \cos.(CS) \pm \sin.(CS) . \sqrt{-1} \right\} \ ; \\ R = \dfrac{H}{8} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{16 \rho^2 H'}{H^2}} \right\} . \end{array} \right.$$

L'équation [8] aura donc une seule racine réelle positive si les conditions

$$[10] \ldots\ldots\ldots \left\{ H' > 0 \ ; \qquad \rho^2 H' > \frac{H^2}{16} \right. \ ,$$

sont satisfaites. Et elle aura trois racines réelles, *deux* positives et *une* négative, si l'on a

$$[11] \ldots\ldots\ldots \qquad H' < 0 \ .$$

Mais si l'on a

$$[12] \ldots\ldots\ldots \left\{ H' > 0 \ ; \qquad \rho^2 H' < \frac{H^2}{16} \right\}$$

l'équation [8] aura ses trois racines *positives*, si $H > 0$; et deux négatives et une positive si $H < 0$. Donc, conformément à la théorie exposée par LAGRANGE dans la Note VIII de son *Traité de la Résolution des Équations Numériques*, le seul de ces trois cas qui soit possible est celui où l'inégalité [11] aura lieu. Alors, l'équation [4], réduite à la forme

$$[13] \ldots\ldots R^8 + \ldots\ldots + R \frac{K}{\rho} \left(\rho^4 - 6 K \cos.(CS) \right) = 0 \ ,$$

pourra avoir (avec les racines $R = 0$ et la racine négative) *deux racines positives*. On décidera *a priori* sur l'existence de ces deux racines positives, en observant que si l'on fait

$$[14] \ldots\ldots\ldots \qquad \beta = \frac{H}{8} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \frac{16 \rho^2 H'}{H^2}} \right\} \ ,$$

les deux quantités

$$F\left(\frac{K}{\rho^3}\right) = -K^2 \; ;$$

$$F(\beta) = (\beta^2 - 2\rho\beta\cos.(CS) + \rho^2)^3 \left(\beta - \frac{K}{\rho^3}\right)^2 - K^2 \, ,$$

doivent être de signe contraire. Alors il y aura une racine positive entre β et $\frac{K}{\rho^3}$; ce qui entraîne l'existence d'une seconde racine positive, puisque le dernier terme de l'équation [4] est positif. Ainsi les conditions requises, pour la certitude de deux solutions de l'équation [4], sont

$$[15] \ldots \left\{ K > 0 \; ; \quad H' < 0 \; ; \quad (\beta^2 - 2\beta\rho\cos.(CS) + \rho^2)^3 \left(\beta - \frac{K}{\rho^3}\right)^2 - K^2 > 0 \right\}.$$

Pour analyser de la même manière le cas où l'on aurait $K < 0$, et $\rho^3 - 6K\cos.(CS) > 0$ qui répond à celui de $r < \rho$, il faut considérer de nouveau l'équation [8] et ses racines déterminées par les formules [9]. Alors, on voit qu'il est impossible que l'équation [13] ait, avec la racine $R = 0$, trois racines positives, puisque, d'après la théorie citée, l'équation [8] devrait avoir quatre et non trois racines réelles seulement. Donc l'équation [4] admettra une seule solution toutes les fois que les deux conditions

$$[16] \ldots\ldots \quad \left\{ K < 0 \, , \qquad \rho^3 - 6K\cos.(CS) > 0 \right\}$$

seront satisfaites.

Cela posé, si l'on remarque que les erreurs des observations ont la plus grande influence sur le dénominateur D de la quantité

$$[17] \ldots\ldots \quad K = \frac{Qt^2}{6(m-1)G} = \frac{Qt^2}{6(m-1)D.\cos.d.\cos.d'.\cos.d''} \; ;$$

où;

$$[18] \ldots \quad D = \sin.(a-a')\tang.d'' - \sin.(a-a'')\tang.d' + \sin.(a'-a'')\tang.d \, ,$$

on en conclura, que, en remplaçant D par $D(1 \pm x)$, on pourra toujours rendre possible les cas qui se présentent avec les caractères de l'impossibilité (en vertu de l'hypothèse que les données sont exactes mathématiquement) par un léger changement fait sur les trois longitudes a, a', a''; et les trois latitudes d, d', d''. Car en remplaçant ces données par $a + \mu y$; $a' + \mu y'$; $a'' + \mu y''$; $d + \mu z$; $d' + \mu z'$; $d'' + \mu z''$;

μ étant la fraction 0,00029089 qui exprime la longueur de l'arc d'une *minute*, on aura, en faisant $D=\mu p$, et négligeant le carré des variations μx, $\mu x'$, etc. ;

$$[19]\ldots\quad 1\pm x=1+\frac{1}{p}\left\{\frac{z''.\sin.(a-a')}{\cos.^2 d''}-\frac{z'.\sin.(a-a'')}{\cos.^2 d'}+\frac{z.\sin.(a'-a'')}{\cos.^2 d}\right\}$$
$$+\frac{1}{p}\left\{\begin{array}{l}(x-x')\tang.d''\cos.(a-a')-(x-x'')\tang.d'\cos.(a-a'')\\+(x'-x'')\tang.d\cos.(a'-a'')\end{array}\right\}.$$

A l'aide de cette formule, et de la connaissance des limites entre lesquelles sont comprises les erreurs probables, on pourra assigner à la quantité $D(1\pm x)$ une valeur convenable pour faire cesser toute impossibilité, et rentrer dans le cas physique qui admet toujours une solution par une section conique. Cela suffit pour faire estimer la petitesse des erreurs capables de produire des altérations considérables sur les positions héliocentriques, et des changemens énormes dans les élémens de l'orbite que l'on cherche. Et cela suffit aussi pour démontrer la nécessité d'exclure l'emploi du diviseur G, à moins que l'on ne soit certain d'une grande précision à l'égard des données de l'observation, ce qui est admissible, en général, pour des observations faites sur des planètes.

En supposant que l'orbite est parabolique, la seule connaissance du rapport $\frac{R''}{R}$ des distances géocentriques extrêmes devient indispensable. Et ce rapport est déterminé avec assez d'exactitude par les formules mêmes de Lagrange, qui donnent

$$[20]\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\dfrac{R''}{R}=(m-1).\dfrac{H''}{H}.\dfrac{\cos.d}{\cos.d''}\ ;\\ H''=\sin.(\alpha'-a)\tang.d'-\sin.(\alpha'-a')\tang.d\ ;\\ H\ =\sin.(\alpha'-a')\tang.d''-\sin.(\alpha'-a'')\tang.d'\ ;\end{array}\right.$$

en négligeant des quantités de l'ordre des secondes différences, lorsque l'observation intermédiaire est à-peu-près également éloignée des deux extrêmes. La lettre m représente le rapport entre l'intervalle de temps écoulé depuis la 1.ère et la 3.ème observation, et l'intervalle compris entre la 1.ère et la 2.ème Par la combinaison de la formule [20] avec le théorème de

LAMBERT on évite la nécessité de faire concourir la connaissance du rapport $\frac{R'}{R}$ à la détermination de l'orbite parabolique. Et par là on évite l'influence, que les erreurs des observations exercent davantage sur la valeur de $\frac{R'}{R}$ que sur celle de $\frac{R''}{R}$: car l'on a

$$[21] \ldots\ldots \begin{cases} \frac{R'}{R} = \frac{(m-1)}{m} \cdot \frac{H'}{H} \cdot \frac{\cos.d}{\cos.d'} \ ; \\ H' = \sin.(\alpha'-a)\,\text{tang.}\,d'' - \sin.(\alpha'-a'')\,\text{tang.}\,d \ , \end{cases}$$

et par conséquent

$$H'-H = \sin.(\alpha'-a'')\,\text{tang.}\,d' - \text{tang.}\,d \Big\{ + \Big\{ \sin.(\alpha'-a) - \sin.(\alpha'-a')\Big\}\text{tang.}\,d'' \ ;$$

tandis que

$$H''-H = -\sin.(\alpha'-a')\Big\{\text{tang.}\,d + \text{tang.}\,d''\Big\} + \Big\{\sin.(\alpha'-a) + \sin.(\alpha'-a'')\Big\}\text{tang.}\,d' \ .$$

C'est à la double exclusion des deux quantités G, $\frac{R'}{R}$, et sur-tout à la circonstance que le théorème de LAMBERT exige la solution d'une équation de la forme $F(R)=A$, dans laquelle la quantité A est toujours connue avec une grande précision qu'est due, en pratique, la préférence de la méthode d'OLBERS sur celle exposée par LAGRANGE au N.° 46 de la Mécanique Analytique où l'influence des petites erreurs inhérentes aux observations, quoique atténuée, peut encore affecter sensiblement les élémens définitifs de l'orbite.

Au reste, après avoir déterminé les deux rayons vecteurs extrêmes r, r'', la corde u qui les joint, et le paramètre b de la parabole; si l'on nomme T' l'intervalle des deux premières observations (exprimé en arc de jours solaires moyens), l'on aura, sans connaître l'anomalie, le rayon vecteur intermédiaire r' par la série ;

$$r'^2 = r^2 \pm \left(2 - \frac{T'^2}{3r^3}\right) T'.\sqrt{2r-b} + \frac{1}{r}T'^2 + \frac{T'^4(5r-3b)}{12.r^5} + \text{etc.} \ ;$$

où l'on prendra le terme ambigu positivement ou négativement, suivant que l'instant de la seconde observation aura eu lieu *après* ou *avant* le passage de la Comète par le périhélie. La valeur de r' étant connue,

on calculera celle de R' à l'aide de l'équation

$$r'^2 = R'^2 - 2\rho' R' \cos.(a' - \alpha') \cos. d' + \rho'^2 \; ;$$

ce qui fournira, en général, un résultat préférable à celui donné par l'équation

$$R' = R. \frac{(m-1)}{m} . \frac{H'}{H} . \frac{\cos. d}{\cos. d'} \; ;$$

ou, autrement, par l'équation entre les trois distances géocentriques R, R', R'' et les quantités observées que l'on obtient par l'élimination de V, V', V'' des trois équations linéaires établies par LAGRANGE au N.° 41 de la Mécanique Analytique.

Les données de l'observation étant souvent illusoires pour en déduire la valeur de la quantité D, on pourrait (en renversant la question) faire servir l'existence de l'équation

$$D = \frac{1}{6m} . \frac{H'.t^2}{R' \cos. d'} \left(\frac{1}{\rho'^3} - \frac{1}{r'^3} \right)$$

au calcul de cette même quantité, sur laquelle la petite erreur $\partial r'$ qui peut affecter r' et l'erreur correspondante

$$\partial R' = \frac{r' \partial r'}{R' - 2\rho' \cos.(a' - \alpha') \cos. d'} \; ,$$

ne peuvent pas exercer une grande influence. Après cela, en reprenant la solution de l'équation du septième degré, on pourra déterminer une autre valeur de la première distance géocentrique R, et essayer de trouver une orbite elliptique qui soit plus conforme à l'ensemble des observations, si toutefois l'hypothèse d'une grande excentricité est admissible.

Et pour faciliter la solution de l'équation [3], remarquons que, en faisant $r = \frac{\rho . \sin.(CS)}{\sin. \varphi}$, l'on a

$$R^2 - 2\rho R \cos.(CS) + \rho^2 = \frac{\rho^2 \sin.^2(CS)}{\sin.^2 \varphi} \; ;$$

d'où l'on tire

$$R = \frac{\rho}{\sin. \varphi} \left\{ \sin. \varphi . \cos.(CS) + \cos. \varphi . \sin.(CS) \right\} .$$

Mais l'équation [3] revient à dire, que (en négligeant le terme multiplié par $\frac{(m-1)^2}{6} t^2$ dans le second membre)

$$\rho^3 \sin.^3(CS)\left\{R - \frac{K\rho}{\rho^4}\right\} = K \sin.^3\varphi \ .$$

Donc, en substituant pour R la valeur précédente, l'on aura

$$\sin.^4\varphi = \frac{\rho^4}{K}\sin.^3(CS)\left\{\left(\cos.(CS) - \frac{K}{\rho^4}\right)\sin.\varphi + \cos.\varphi \,.\, \sin.(CS)\right\} \ .$$

Ainsi, en posant

$$\frac{\rho^4}{K}\cdot \sin.^3(CS)\left\{\cos.(CS) - \frac{K}{\rho^4}\right\} = H\cos.\theta \ ;$$

$$\frac{\rho^4}{K}\cdot \sin.^3(CS)\sin.(CS) = H\sin.\theta \ ;$$

ce qui donne

$$H = \frac{\sin.^3(CS)}{K}\cdot\sqrt{\rho^8 - 2K\rho^4\cos.(CS) + K^2} \ ,$$

l'on aura, au lieu de l'équation [3];

[22] ..... $\sin.^4\varphi = H\sin.(\varphi + \theta)$;

qui est la transformation analogue à celle de Gauss dont nous avons parlé en finissant la première Note sur le N.° 44.

En retenant le terme multiplié par $\frac{(m-1)^2}{6}t^2$, l'on aurait l'équation

$$\rho^3 \sin.^3(CS)\left\{R\sin.\varphi - \frac{K}{\rho^3}\sin.\varphi\right\} = \sin.^4\varphi\left\{K - \frac{(m-1)^2}{6}t^2 R\right\} \ ,$$

qui donne

$$\sin.^3\varphi\left\{\sin.\varphi - \frac{(m-1)^2}{6K}t^2\rho\,.\,\sin.(\varphi + CS)\right\} = H\sin.(\varphi+\theta) \ ;$$

ou bien

[23] ..... $\sin.^3\varphi\,.\,\sin.(\varphi - \theta') = \frac{H}{H'}\sin.(\varphi+\theta)$,

en faisant

$$1 - \frac{(m-1)^2}{6K}t^2\rho\,.\cos.(CS) = H'\cos.\theta' \ ;$$

$$\frac{(m-1)^2}{6K}t^2\rho\,.\,\sin.(CS) = H'\sin.\theta' \ ;$$

d'où l'on tire

$$H' = \sqrt{1 - \frac{2(m-1)^2}{6K} t^2 \rho . \cos.(CS) + \frac{(m-1)^4}{36K^2} t^4 \rho^2} ,$$

en se rappelant que

$$\cos.(CS) = \cos.(a - \alpha) \cos. d .$$

Dans le cas particulier de $CS = 180°$, cette transformation ne pourrait pas avoir lieu ; mais alors il suffit de résoudre l'équation du quatrième degré ;

$$(R+\rho)^3 \left(R - \frac{K}{\rho^3} \right) = K - R \frac{(m-1)^2}{6} t^2 ,$$

par les formules ordinaires.

Lorsque les positions du Soleil sont calculées d'après les Tables, le rapport $\frac{6P\rho^3}{Qt^2}$, qui entre dans l'expression de R, donnée au N.° 43, cesse d'être égal à l'unité ; et il faut remplacer l'équation [1], établie au commencement de cette Note, par l'équation

$$[1]' \ldots\ldots\ldots \qquad R = \frac{K \left\{ \frac{K'}{\rho^3} - \frac{1}{r^3} \right\}}{1 - \frac{(m-1)^2}{6r^3} t^2} ,$$

où $K' = \frac{6P\rho^3}{Qt^2}$. Alors l'élimination de r donne l'équation

$$[3]' \ldots \left\{ R^2 - 2\rho R \cos.(CS) + \rho^2 \right\}^3 \left(R - \frac{KK'}{\rho^3} \right)^2 - \left\{ R \frac{(m-1)^2}{6} t^2 - K \right\}^2 = 0$$

du *huitième*, et non du *septième* degré. On peut la réduire à la forme trigonométrique en y introduisant l'inconnue φ, comme précédemment ; ce qui donnera

$$[23]' \ldots\ldots\ldots \qquad \sin.^3\varphi . \sin.(\varphi - \theta') = \frac{H}{H'} \sin.(\varphi + \theta) ;$$

sans produire aucun changement à l'égard de la valeur de H' et de l'angle θ' ; seulement il faudra remplacer K par KK', *sous le radical*, dans la valeur de H, et remarquer que la valeur de $H \cos.\theta$ doit être écrite ainsi ;

$$\frac{\rho^4}{K} \sin.^3(CS) \left\{ \cos.(CS) - \frac{KK'}{\rho^4} \right\} = H \cos.\theta .$$

En faisant $CS = \psi$, l'on a l'équation

$$\frac{\sin.^4\varphi}{K'\sin.^3\psi}\left\{1-\frac{(m-1)^2}{6K}t^2\rho^2.\sin.(\varphi+\psi)\right\}=\frac{\rho^3}{KK'}\sin.(\varphi+\psi)-\sin.\varphi\ ;$$

où en écrivant $\sin.\psi.\cos.(\varphi+\psi)-\cos.\psi.\sin.(\varphi+\psi)$ au lieu de $\sin.\varphi$ dans le second membre, et posant ensuite

$$\frac{\rho^3}{KK'}-\cos.\psi=\frac{\sin.\psi}{\text{tang.}\,\lambda}\ ,$$

on obtient, sans l'introduction des quantités radicales H et H', la transformée

$$[23]''\ldots\quad \frac{\sin.^4\varphi.\sin.\lambda}{K'\sin.^3\psi}\left\{1-\frac{(m-1)^2}{6K}t^2\rho.\sin.(\varphi+\psi)\right\}=\sin.(\varphi+\psi-\lambda)\ ;$$

qui est un peu plus simple.

Au reste, la solution numérique de l'équation [3]′, quoique du *huitième* degré ne saurait présenter aucune difficulté par elle-même. Mais les observations sur les Comètes ne donnent jamais les deux quantités K et K' avec assez de précision pour pouvoir considérer la distance géocentrique R ainsi trouvée comme suffisamment approchée.

Au contraire, l'équation du 24.^{ème} degré

$$A=(\sqrt{P}+\sqrt{P'}+\sqrt{P''})^{\frac{3}{2}}-(\sqrt{P}+\sqrt{P'}-\sqrt{P''})^{\frac{3}{2}}$$

fournie par le théorème de Lambert; où P, P', P'' sont des trinomes de la forme

$$HR^2+H'R+H''$$

offre toujours une orbite parabolique beaucoup plus approchante de la veritable; parceque le coefficient A est toujours connu avec une grande exactitude; et que les coefficiens H, H', H'' etc. peuvent être calculés avec les données de l'observation, sans que les petites erreurs qui les affectent puissent, en général, produire des changemens inadmissibles sur les résultats définitifs.

NOTE

Sur l'évaluation numérique des quantités

$$\frac{Q}{G}\,,\quad \frac{Q_1}{G}\,,\quad \frac{Q_2}{G}\,,\quad \frac{Q_1}{Q}\,,\quad \frac{Q_2}{Q}\,,$$

nécessaires à la détermination de l'orbite des Comètes par les formules de LAGRANGE, *adaptées au cas où l'on prend l'Écliptique pour le plan fixe de projection* (*Voyez les N.os* 44, 46, 50 *et* 51 *du second Volume de la Mécanique Analytique*).

Conformément au choix de l'écliptique pour le plan fixe de projection; les latitudes δ, δ', δ'' relatives au Soleil sont nulles. Les lettres α, α', α''; ρ, ρ', ρ'' représentent les trois longitudes du Soleil, et ses distances au centre de la Terre.

Les lettres a, d; a', d'; a'', d'', représentent, respectivement, la longitude et la latitude de la Comète aux instans correspondans; à la première; à la seconde, et à la troisième observation, censées disposées suivant l'ordre progressif de leur succession.

Cela posé, si l'on fait

$$[1]\ldots\quad D=\sin.(a-a')\tang.d''-\sin.(a-a'')\tang.d'+\sin.(a'-a'')\tang.d\ ;$$

$$[2]\ldots\quad F(m)=(m-1)^3\rho\sin.(\alpha-a')-m^3\rho'\sin.(\alpha'-a')+\rho''\sin.(\alpha''-a')\ ;$$

$$[3]\ldots\quad F''(m)=(m-1)^3\rho\sin.(\alpha-a'')-m^3\rho'\sin.(\alpha'-a'')+\rho''\sin.(\alpha''-a'')\ ;$$

$$[4]\ldots\quad F'''(m)=(m-1)^3\rho\sin.(\alpha-a)-m^3\rho'\sin.(\alpha'-a)+\rho''\sin.(\alpha''-a)\ ;$$

$$[5]\ldots\ldots\quad H=F(m)\tang.d''-F'(m)\tang.d'\ ;$$

$$[6]\ldots\ldots\quad H'=F''(m)\tang.d''-F'(m)\tang.d\ ;$$

$$[7]\ldots\ldots\quad H''=F''(m)\tang.d'-F(m)\tang.d\ ;$$

l'on aura

$$[8]\ldots\ldots\quad \frac{1}{m-1}\cdot\frac{Q}{G}=\frac{1}{m-1}\cdot\frac{H}{D\cos.d}\ ;$$

$$[9] \ldots\ldots\ldots \quad -\frac{1}{m}\cdot\frac{Q_1}{G}=\frac{1}{m}\cdot\frac{H'}{D\cos.d'}\ ;$$

$$[10] \ldots\ldots\ldots \quad \frac{Q_2}{G}=\frac{H''}{D\cos.d''}\ ;$$

$$[11] \ldots\ldots\ldots \quad \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{Q_1}{Q}=\dfrac{H'}{H}\cdot\dfrac{\cos.d}{\cos.d'}\ ; \\ \dfrac{Q_2}{Q}=\dfrac{H''}{H}\cdot\dfrac{\cos.d}{\cos.d''}\ . \end{array}\right.$$

Ces formules sont écrites en supposant l'origine du temps placée à l'instant de la première observation: alors, la valeur de m, donnée par l'équation $t'=m\,t$ sera positive, ainsi que la valeur de t; intervalle de temps écoulé entre la première et la seconde observation.

Les trois distances correspondantes R, R', R'' de la Comète au centre de la Terre, seront données par les formules;

$$[12] \ldots\ldots\ldots \quad R=\frac{Ht^2}{6(m-1)D\cos.d}\left\{\frac{\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r^3}}{1-\frac{(m-1)^2t^2}{6r^3}}\right\}\ ;$$

$$[13] \ldots\ldots\ldots \quad R'=\frac{H't^2}{6m\,.\,D\cos.d'}\left\{\frac{\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r^3}}{1-\frac{m^2t^2}{6r^3}}\right\}\ ;$$

$$[14] \ldots\ldots\ldots \quad R''=\frac{H''t^2}{6\,.\,D\cos.d''}\left\{\frac{\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{r^3}}{1-\frac{t^2}{6r^3}}\right\}\ ;$$

où r désigne la distance héliocentrique de la Comète à l'instant de la première observation; le temps t étant évalué par le produit de la fraction $\frac{0^\circ.59'.8''.3}{57^\circ.17'.45''}$ par le nombre des jours solaires moyens.

Mais si l'origine du temps est fixée à l'instant de la *seconde* et non à celui de la première observation, alors il est essentiel d'observer, que le seul changement qu'on doit faire dans ces trois dernières formules,

est celui de ρ^3 en ρ'^3; et celui de r^3 en r'^3; r' étant la distance héliocentrique de la Comète à l'instant de la seconde observation.

Pour démontrer clairement qu'on ne doit faire aucun changement dans le premier facteur des expressions précédentes de R, R', R'': remarquons que, dans ce cas, la valeur de t est *zéro* à l'instant de la seconde observation, et négative à l'instant de la première: en outre, que, en faisant $t'=mt$, il faudra prendre négativement la valeur de t ainsi que celle de m, afin que la valeur de t' soit positive. Mais la valeur absolue de m sera $m-1$ dans le second cas; puisque, en désignant par $t_{(1)}$ l'intervalle de temps compris entre la seconde et la troisième observation, l'on a $t'=t+t_{(1)}$ dans le premier cas, et $t'=t_{(1)}$ dans le second. Donc les quantités

$$F(m)\ ,\qquad F'(m)\ ,\qquad F''(m)\ ,$$

deviendront

$$F(-m+1)\ ,\qquad F'(-m+1)\ ,\qquad F''(-m+1)\ .$$

Or, en retenant les mêmes lettres a, d, R, r; a', d', R', r'; a'', d'', R'', r''; α, ρ; α', ρ'; α'', ρ'' pour représenter les trois positions *successives* de la Comète et du Soleil, il faudra remplacer a, d; α, ρ par a', d'; α', ρ'; et réciproquement; ce qui donne

$$F(-m+1)=F''(m)\ ;\qquad F'(-m+1)=F'(m)\ :$$

$$F''(-m+1)=F(m)\ ;$$

et pour D la *même* valeur avec un signe *contraire*.

D'après cela, on conçoit que, en désignant par

$$\left[\frac{1}{m-1}\cdot\frac{Q}{G}\right]\ ,\qquad \left[-\frac{1}{m}\cdot\frac{Q_1}{G}\right]\ ,\qquad \left[\frac{Q_2}{G}\right]\ ,$$

ce que deviennent les quantités primitives

$$\frac{1}{m-1}\cdot\frac{Q}{G}\ ,\qquad -\frac{1}{m}\cdot\frac{Q_1}{G}\ ,\qquad \frac{Q_2}{G}\ ,$$

l'on aura

$$\left[\frac{1}{m-1}\cdot\frac{Q}{G}\right]=\frac{1}{m}\cdot\frac{H'}{D\cos.d'}\ ;\qquad \left[-\frac{1}{m}\cdot\frac{Q_1}{G}\right]=\frac{1}{(m-1)}\cdot\frac{H}{D\cos.d}\ ;$$

$$\left[\frac{Q_2}{G}\right]=\frac{H''}{D\cos.d''}\ .$$

De sorte que, la même théorie donnera pour les distances R', R, R'' de la Comète à la Terre aux instants *zéro*; $-t$; et t' les trois expressions suivantes;

$$[15] \ldots\ldots\ldots R' = \frac{1}{6m} \cdot \frac{H't^2}{D\cos.d'} \left\{ \frac{\frac{1}{\rho'^3} - \frac{1}{r'^3}}{1 - \frac{m^2t^2}{6r'^3}} \right\};$$

$$[16] \ldots\ldots\ldots R = \frac{1}{6(m-1)} \cdot \frac{Ht^2}{D\cos.d} \left\{ \frac{\frac{1}{\rho'^3} - \frac{1}{r'^3}}{1 - \frac{(m-1)^2t^2}{6r'^3}} \right\};$$

$$[17] \ldots\ldots\ldots R'' = \frac{1}{6} \cdot \frac{H''t^2}{D\cos.d''} \left\{ \frac{\frac{1}{\rho'^3} - \frac{1}{r'^3}}{1 - \frac{t^2}{6r'^3}} \right\};$$

où la valeur de m doit être déterminée, comme si l'origine du temps était placée à l'instant de la première observation; c'est-à-dire en posant l'équation $t + t' = mt$, et prenant positivement la valeur de t.

On voit par là, que la même distance R est exprimée par les équations [12] et [16], de manière qu'il n'y a aucun changement à l'égard du premier facteur fourni par les données de l'observation; tandis qu'il y a un changement relativement au second facteur, qui doit en être une conséquence. La contradiction apparente cesse, en observant qu'il s'agit ici d'une méthode d'approximation; et que les termes suivants ont des valeurs différentes dans le second membre des équations [12] et [16]; de sorte que le *reste*, qui leur appartient, doit avoir une valeur différente et convenable pour faire disparaître toute inégalité entre deux distances qui, par leur nature, sont égales.

Il suit de là, que la combinaison de l'équation [12], avec l'équation

$$[18] \ldots\ldots\ldots R^2 - 2R.\rho\cos.(CS) + \rho^2 = r^2;$$

pourra donner des valeurs inadmissibles pour R et r; tandis que l'on pourra obtenir les véritables valeurs de R' et r' par la combinaison de l'équation [15] avec l'équation

$$[19] \ldots\ldots\ldots R'^2 - 2R'\rho'.\cos.(C'S') + \rho'^2 = r'^2.$$

Dans ce cas on déterminera les rapports $-\frac{Q_1}{Q}$, $\frac{Q_2}{Q}$ pour les équations

$$[20] \ldots\ldots \begin{cases} \left[-\frac{Q_1}{Q}\right] = \frac{H}{H'} \cdot \frac{\cos.d'}{\cos.d} \\ \left[\frac{Q_2}{Q}\right] = \frac{H''}{H'} \cdot \frac{\cos.d'}{\cos.d''} \end{cases} .$$

En formant l'équation [3], posée au commencement de la seconde Note sur le N.° 44, il faudra faire

$$K = \frac{Ht^2}{6(m-1)D\cos.d} ,$$

si l'origine du temps est placée à l'instant de la première observation.

Et, après avoir remplacé R, (CS), ρ^2 par R', $(C'S')$, ρ'^2, on y fera

$$K = \frac{H't^2}{6mD\cos.d'} ,$$

si l'origine du temps est placée à l'instant de la seconde observation.

Le diviseur 6 disparaît lorsqu'on prend pour H, H' les valeurs approchées données ci-après par les équations [21].

En appliquant la méthode du N.° 44 et celle du N.° 46 du second Volume de la Mécanique Analytique de Lagrange, avec les distinctions que je viens d'établir, il suffira de se prémunir contre l'influence des petites erreurs, commises en observant les positions de la Comète.

Les expressions de $F(m)$, $F'(m)$, $F''(m)$, par lesquelles on forme les valeurs de H, H', H'', conformément aux formules [5], [6], [7], ont une propriété remarquable, éminemment propre pour établir une comparaison entre les formules de Lagrange, et celles données par Olbers, Legendre, et Ivory pour la solution de ce même problème. Voici en quoi elle consiste.

L'équation [2] peut être écrite ainsi ;

$$\begin{aligned} F(m) = &-6\rho' \sin.(\alpha'-a') \\ &+\rho \sin.(\alpha-a') - 2\rho' \sin.(\alpha'-a') + \rho'' \sin.(\alpha''-a') \\ &+\rho\left[(m-1)^3 - 1\right] \sin.(\alpha'-a) - \rho'(m^3-8)\sin.(\alpha'-a') . \end{aligned}$$

Or, avec une légère réflexion, on reconnaît que le trinome de la seconde

ligne constitue la différence *seconde* de la fonction du temps $\rho \sin.(\alpha - a')$, en y regardant la longitude intermédiaire a' de la Comète comme quantité constante. Mais cette variabilité étant uniquement relative à l'orbite du Soleil, pour laquelle, dans l'intervalle qui comprend les trois observations, les différences secondes sont fort petites, il arrivera que ce trinome aura une valeur beaucoup moins grande que celle du premier terme $-6\rho' \sin.(\alpha' - a')$. Si à cette circonstance on ajoute celle, que le binome qui constitue la troisième ligne est rigoureusement nul pour le cas de $m = 2$; c'est-à-dire des observations équidistantes ; on en conclura qu'il peut être négligé, lorsque les deux intervalles entre les observations extrêmes et l'observation intermédiaire approchent de l'égalité, ainsi que cela a souvent lieu. D'après cela on peut, dans une première approximation, prendre

$$F(m) = -6\rho' \sin.(\alpha' - a') \ .$$

Par la même raison, les valeurs approchées de $F'(m)$, $F''(m)$ seront :

$$F'(m) = -6\rho' \sin.(\alpha' - a'') \ ; \qquad F''(m) = -6\rho' \sin.(\alpha' - a) \ ;$$

ce qui donne pour les valeurs approchées de H, H', H'';

$$[21] \ldots \quad \begin{cases} H = -6\rho' \{ \sin.(\alpha' - a') \tang.d'' - \sin.(\alpha' - a'') \tang.d' \} \ ; \\ H' = -6\rho' \{ \sin.(\alpha' - a) \tang.d'' - \sin.(\alpha' - a'') \tang.d \} \ ; \\ H'' = -6\rho' \{ \sin.(\alpha' - a) \tang.d' - \sin.(\alpha' - a') \tang.d \} \ . \end{cases}$$

En introduisant ces expressions de H, H', H'' dans le second membre des équations [15], [16], [17], et réduisant à l'unité les trois dénominateurs,

$$1 - \frac{m^2 t^2}{6 r'^3} \ , \qquad 1 - \frac{(m-1)^2 t^2}{6 r'^3} \ , \qquad 1 - \frac{t^2}{6 r'^3} \ ,$$

on obtient pour les rapports $\frac{R''}{R}$, $\frac{R'}{R}$;

$$[22] \ldots \quad \begin{cases} \frac{R''}{R} = (m-1) \frac{H''}{H} \cdot \frac{\cos.d}{\cos.d''} \ ; \qquad \frac{R'}{R} = \left(\frac{m-1}{m} \right) \cdot \frac{H'}{H} \cdot \frac{\cos.d}{\cos.d'} \ . \end{cases}$$

Comme $m = \frac{t + t'}{t}$, la première de ces deux équations, en y substituant pour H'', H les valeurs précédentes, devient celle donnée par Olbers à la page 45 de son Mémoire, sur ce sujet, publié en 1797.

L'équation [15], en y faisant $m=2$ et réduisant à l'unité le dénominateur $1-\frac{m^2t^2}{6r'^3}$, devient la première des deux équations [29] données par LEGENDRE à la page 13 de son premier Mémoire, publié en 1806, *Sur la détermination des orbites des Comètes.*

Cette même équation de LEGENDRE est celle publiée en 1814 par M. IVORY à la page 141 de la 1.ère Partie des *Philosophical Transactions de la Société Royale de Londres*). Toutefois, pour en saisir l'identité, il faut observer qu'en posant

$$\text{tang.}\, d = \text{tang.}\, \theta \,.\, \text{sin.}\,(a-\psi)\ ; \qquad \text{tang.}\, d'' = \text{tang.}\, \theta \,.\, \text{sin.}\,(a''-\psi)\ :$$

l'on a;

$$H' = -6\rho' \,.\, \text{tang.}\, \theta \,.\, \text{sin.}\,(a'-\psi) \,.\, \text{sin.}\,(a-a'')\ ;$$

$$D = \text{tang.}\, \theta \,.\, \text{sin.}\,(a-a'') \,\text{sin.}\,(a'-\psi) - \text{sin.}\,(a-a'') \,\text{tang.}\, d'\ .$$

Aux formules précédentes, il faut ajouter celle qui donne le carré u^2 de la corde qui réunit les extrémités des deux rayons vecteurs r et r'': c'est-à-dire la formule

$$[23]\ldots\quad u^2 = N - 2RR''\cos.(CC'') - N'R - N''R'' + R^2 + R''^2\ ,$$

où l'on a

$$[24]\ldots\quad \begin{cases} \cos.\,(S\,S'') = \cos.\,(\alpha-\alpha'')\ ; \\ \cos.\,(C\,S'') = \cos.\,(a-\alpha'')\cos.\,d\ ; \\ \cos.\,(C''\,S) = \cos.\,(a''-\alpha\ )\cos.\,d''\ ; \\ \cos.\,(C\,S) = \cos.\,(a-\alpha\ )\cos.\,d\ ; \\ \cos.\,(C''S'') = \cos.\,(a''-\alpha'')\cos.\,d''\ ; \\ \cos.\,(CC'') = \cos.\,(a-a'')\cos.\,d.\cos.\,d'' + \sin.\,d\,.\,\sin.\,d''\ ; \\ N = \rho^2 + \rho''^2 - 2\rho\rho''\cos.\,(SS'')\ ; \\ N' = 2\rho\ \cos.\,(C\ S\ ) - 2\rho''\cos.\,(CS'')\ ; \\ N'' = 2\rho''\cos.\,(C''S'') - 2\rho\ \cos.\,(C''S)\ . \end{cases}$$

En outre il faut, en exécutant ces calculs, se rappeler que le second membre de l'équation [15] devant être positif, comme le premier, la

seule inspection du signe qui affecte la valeur de $\frac{H'}{mD.\cos.d'}$ suffira pour décider si l'on a $r'>\rho'$ ou $r'<\rho'$, suivant qu'il sera positif ou négatif.

Les rapprochemens que je viens de faire sont utiles pour simplifier autant que possible la solution de ce problème, et faire voir, que LAGRANGE, vers l'année 1812, pouvait avec assez de raison considérer la sienne *comme la plus directe et la plus générale* (Voyez page 42 du second Volume de la Mécanique Analytique).

Je vais faire voir dans la Note suivante, que la cause du jugement défavorable exprimé par PINGRÉ est loin d'avoir été puisée dans le fond même de cette théorie de LAGRANGE. S'il avait pris pour inconnue la distance géocentrique, et non la distance héliocentrique, conformément à l'équation générale donnée par LAGRANGE à la page 140 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1778, il aurait évité la racine *négative* $r''=-1,5208$ qu'il obtient à la page 306 du second Volume de sa Cométographie, et il aurait trouvé la racine positive $r''=1,51294$; ce qui ne présente rien de *singulier*, ni d'*insolite*.

NOTE

Sur l'application des formules de LAGRANGE *à la Comète de l'année 1769, faite par* PINGRÉ *à la page 306 du second Volume de sa* Cométographie.

Pour expliquer à quoi tient la cause du résultat inadmissible obtenu par PINGRÉ, il est essentiel d'exécuter ce calcul avec ses mêmes données, telles qu'il les a rapportées à la page 295.

1769 Jours du mois	Heure de l'observation	Longitude du Soleil	Logarithme de la distance du Soleil à la Terre	Longitude observée de la Comète	Latitude observée de la Comète
	H. M. S.				
Août 14	12. 34. 12	$x=142°.21'.26''$	Log. $\rho=0,0052930$	$a=39°.58'.56''$	$d=-3°.17'.13''$
» 21	13. 1. 55	$x'=149°.6'.28''$	Log $\rho'=0,0045720$	$a'=47°.1'.30''$	$d'=-5°.53'.49''$
» 28	13. 30. 55	$x''=155°.54'.15''$	Log. $\rho''=0,0033510$	$a''=58°.51'.27''$	$d''=-10°.30'.2''$

Ces trois observations étant à fort peu-près équidistantes, on peut employer les formules simplifiées relatives à ce cas particulier. Soit donc

$$[1]\quad \begin{cases} M = \sin.(\alpha' - \alpha)\,\text{tang.}\,d'' - \sin.(\alpha' - \alpha'')\,\text{tang.}\,d\ ; \\ M' = \sin.(\alpha' - \alpha')\,\text{tang.}\,d'' - \sin.(\alpha' - \alpha'')\,\text{tang.}\,d'\ ; \\ M'' = \sin.(\alpha' - \alpha)\,\text{tang.}\,d' - \sin.(\alpha' - \alpha')\,\text{tang.}\,d\ ; \\ D = \sin.(\alpha - \alpha')\,\text{tang.}\,d'' - \sin.(\alpha - \alpha'')\,\text{tang.}\,d' + \sin.(\alpha' - \alpha'')\,\text{tang.}\,d\ ; \end{cases}$$

on trouvera les valeurs numériques suivantes;

$$M = -0,175675 + 0,0574305 = -0,1182445\ ;$$

$$M' = -0,181831 + 0,1032850 = -0,078546\ ;$$

$$M'' = -0,097585 + 0,056157 = -0,041428\ ;$$

$$D = 0,0228353 - 0,033433 + 0,0117763 = 0,0011786\ ;$$

$$\text{Log.}\,M = 9,0727809(-)\ ; \qquad \text{Log.}\,M' = 8,8951224(-)\ ;$$

$$\text{Log.}\,M'' = 8,6172940(-)\ ; \qquad \text{Log.}\,D = 7,0713664\ ;$$

$$\text{Log.}\,2\rho'^2\cos.d' = 0,3078695\ ; \qquad \text{Log.}\frac{2\cos.d'}{\cos.d} = 0,2994407\ ;$$

$$\text{Log.}\frac{2\cos.d'}{\cos.d''} = 0,3061073\ ; \qquad \text{Log.}\frac{2\cos.d'}{\cos.d}\cdot\frac{M'}{M} = 0,1217822\ ;$$

$$\text{Log.}\frac{2\cos.d'}{\cos.d''}\cdot\frac{M''}{M} = 9,8506204\ ; \qquad \text{Log.}\frac{\cos.d}{\cos.d''}\cdot\frac{M''}{M'} = 9,7288382\ .$$

En plaçant l'origine du temps à l'instant de la seconde observation faite le 21 août, nous avons pour le logarithme du temps t, exprimé par l'angle du mouvement moyen du Soleil réduit en parties du rayon :

$$\text{Log.}\,t = 9,0820183\ .$$

Maintenant si l'on fait

$$[2]\quad \ldots\ldots\ldots \qquad A = \frac{Mt^2}{2D.\rho'^2\cos.d'}\ ,$$

l'équation qui détermine la distance R' de la Comète à la Terre à l'instant de la seconde observation est ;

$$[3] \ldots\ldots \quad \left(R'^2 - 2\rho' R' \cos.(C'S') + \rho'^2\right)^3 (R' + A)^2 = (\rho'^3 A)^2 \ ;$$

où l'on a

$$\cos.(C'S') = \cos.(a' - \alpha') \cos.d' \ .$$

Et par le signe de A, qui doit toujours être le même que celui du binome $\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{\rho'^3}$, on décidera que l'on a $r' > \rho'$ où $r' < \rho'$ suivant qu'il sera négatif ou positif.

Dans le cas actuel, nous avons

$$\text{Log.}\, 2\rho' \cos.(C'S') = 9,6241175(-) \ ; \qquad \text{Log.}\, A = 9,8575816(-) \ ;$$

et l'équation [3] devient :

$$[4] \ldots (R'^2 + R' 0,4208450 + 1,021280)^3 (R' - 0,720413)^2 = 0,552835 \ .$$

Il est évident que la valeur positive de R' est comprise entre $0,720413$ et $R' = 1$. Après quelques essais on trouve, que, en posant $R' = 0,935$, le premier membre de l'équation [4] devient égal à $0,552255$. De sorte qu'on peut regarder comme fort approchée la racine $R' = 0,935$, ainsi que la valeur de r'^2 donnée par l'équation

$$[5] \ldots \quad R'^2 + R' 0,4208450 + 1,021280 = r'^2 = 2,288991 \ .$$

Il suit de là que nous avons

$$R' = 0,935 \ ; \qquad r' = 1,51294 \ ;$$

$$\text{Log.}\, R' = 9,9708116 \ ; \qquad \text{Log.}\, r' = 0,1798207 \ .$$

Cela posé, à l'aide des formules

$$[6] \ldots\ldots \begin{cases} R = 2R' . \dfrac{\cos.d'}{\cos.d} \cdot \dfrac{M'}{M} \ ; \qquad R'' = 2R' . \dfrac{\cos.d'}{\cos.d''} \cdot \dfrac{M''}{M} \ ; \\ R'' = R . \dfrac{\cos.d}{\cos.d''} \cdot \dfrac{M''}{M'} \ ; \end{cases}$$

on trouve

$$\text{Log.}\, R = 0,0925936 \ ; \qquad \text{Log.}\, R'' = 9,8214320 \ ;$$

$$R = 1,237640 \ ; \qquad R'' = 0,662876 \ .$$

Et les équations

$$[7]\ \ldots\ldots\quad \begin{cases} r^2 = R^2 - 2\rho R\cos.(CS) + \rho^2 \ ; \\ r''^2 = R''^2 - 2\rho'' R''\cos.(C''S'') + \rho''^2 \ ; \\ \cos.(CS) = \cos.(a - \alpha)\cos.d \ ; \\ \cos.(C''S'') = \cos.(a'' - \alpha'')\cos.d''; \end{cases}$$

donnent;

$$\text{Log.}2\rho\cos.(CS) = 9,6370324(-); \quad \text{Log.}2\rho''\cos.(C''S'') = 9,4062316(-):$$

$$[8]\ \ldots\ldots\quad \begin{cases} r^2 = R^2 + R\,.\,0,433543 + 1,02467 = 3,09299 \ ; \\ r''^2 = R''^2 + R''.0,254819 + 1,017894 = 1,626211 \ : \end{cases}$$

Le résultat de ce calcul est donc que l'on a;

$$[9]\ \ldots\ldots\quad \begin{cases} R = 1,23764 \ ; \quad R' = 0,935 \ ; \quad R'' = 0,662876 \ : \\ r = 1,75870 \ ; \quad r'' = 1,51294 \ ; \quad r'' = 1,27522 \ . \end{cases}$$

Et en cela il n'y a rien d'absurde, tandis que le résultat trouvé par Pingré est inadmissible.

Pour découvrir la source d'une aussi grande divergence il faut observer, que, Pingré, au lieu de déterminer d'abord R' et ensuite r', a transformé l'équation en R', donnée par Lagrange à la page 140 du Volume de l'Académie de Berlin, dans une autre où l'inconnue est la distance héliocentrique r'. Les coefficiens de celle-ci étant susceptibles d'être plus influencés par les petites erreurs inhérentes aux observations, il ne pouvait pas la voir satisfaite par la racine positive $r'' = 1,323$. Mais s'il avait remarqué, que même sa racine négative $r'' = -1,5208$, donnait l'équation

$$R'^2 + R'.0,420845 + 1,02128 = (-1,5208)^2 = 2,31283 \ ,$$

il en aurait tiré

$$R' = -0,210422 + 1,11686 = 0,90644 \ ;$$

et en revenant à l'équation de Lagrange (qui est notre équation [4]), il aurait compris que celle-ci donne pour R' une valeur fort peu différente de 0,906; c'est-à-dire $R' = 0,935$; et qu'en conséquence on avait l'équation

$$(0,935)^2 + (0,935).0,420845 + 1,02128 = 2,388991 = r'^2,$$

qui donne $r' = 1,51294$ suivant nos dénominations, et $r'' = 1,51294$ suivant les dénominations de Pingré. Cette explication suffit pour faire tomber la critique de Pingré publiée en 1784, et l'approbation qui lui a été accordée par Delambre à la page 375 du troisième Volume de son Traité d'Astronomie publié en 1814.

CRYPTOGAMAE VASCULARES LIGUSTICAE

SEU

EQUISETACEARUM, MARSILEACEARUM (ISOETEARUM), LYCOPODIACEARUM AC FILICUM

IN AGRO LIGUSTICO HUCUSQUE DETECTARUM

SYNOPSIS

HUC ACCEDUNT NOTAE QUAEDAM BOTANICO-GEOGRAPHICAE, STIRPIUMQUE ITALICARUM, PRAETER LIGUSTICAS, ENUMERATIO

AUCTORE

PATRITIO GENNARI M. D.

Exhib. die 16 novembris 1856.

CRYPTOGAMAE VASCULARES

Endogenae cryptogamae DC. Theor. elem. 294. — *Pseudocotyledoneae vasculares* Ag. Aphor. 103. — *Acrobrya protophyta* Endl. Gen. p. 58.

Plantae herbaceae, humiles, perennes, nunquam apud nos frutescentes, vel arborescentes e contextu celluloso, vasisque praesertim *scalariformibus* compositae. Caulis apice tantum crescens. Folia fere semper stomatibus donata. *Sporae* intra *sporangia* uni-plurilocularia liberae. *Antheridia* situ varia.

Ord. I. EQUISETACEAE.

DC. Fl. fr. 2. p. 580. K. Syn. ed. 2.ª p. 963. — Gonopterides Willd. Sp. 5. p. 41 et 45.

Sporothecia peltata, squamis margine in orbem dispositis, deflexis praedita, pedicellata in spicam terminalem verticillata, subtus in ambitu

sporangia 4-7 membranacea latere interiori longitudinaliter fissa gerentia: sporae numerosissimae globosae apiculatae, filis binis utrinque apice spathulatis in crucem dispositis, ac circa sporam spiraliter convolutis, siccitate elastice resilientibus fultae. Antheridia hinc prothallii lobulis apice insidentia. — Rhizoma articulatum indefinitum: caulis simplex, vel ramosus ad articulos vaginatus, ramis, ramulisque verticillatis.

Plantae palustres, lacustres, fluviatiles, nec non in locis arenosis, ac ericetosis, dummodo humidiusculi sint, occurrentes. Species omnes, quae ad floram italicam spectant (E. limoso usquehac excepto) floram ligusticam pariter intrant.

EQUISETUM L. Gen. 1169.

Character idem ac ordinis.

Sect. 1.ª *Difformia*: caules fertiles teneri, decolores simplicissimi: steriles duriores, virides, ramosi.

Subsect. 1.ª *Hysteranthia*: caules fertiles praecoces, cito evanescentes; steriles seriores aestatem perdurantes.

E. ARVENSE L.

Caulium fertilium vaginis turbinato-tubulosis, vel turbinato-subcampanulatis, profunde dentatis, dentibus 8-12 acuminatis rigidulis hinc inde cohaerentibus: caulibus sterilibus supra medium verticillato-ramosis, ramis quadrangulis simplicibus; vaginarum primariarum dentibus geminatim coalitis, dentesque quatuor late ovatos abbreviatos efformantibus; vaginis secundariis quadridentatis, dentibus acuminato-setaceis apice reflexis; spica ovato-oblonga, obtusa.

E. arvense L. Sp. 1516. All. Ped. 2. p. 281. Willd. Sp. 5. p. 1. K. Syn. ed. 2.ª p. 964. α. et γ. Loisl. Gall. 2. p. 357.

Ic. Bolt. fil. 62. t. 34. ex Loisl. l. c. — Lam. ill. pl. 862. f. 1.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 3. n. 201!

In arvis et pratis limosis, humentibusque frequens.

Fructif. Apr. Maj. ♃.

Obs. Vaginae caulium sterilium variant discolores, tubo nempe pallide virenti, dentibus fuscis; vel fusco-atro concolores: caulis quoque variat erectus, deflexus, vel omnino decumbens.

E. TELMATEJA Ehrh.

Vaginis caulium fertilium amplis campanulatis internodium laxe am-

bicentibus, basi albido-lutescentibus, superne purpureo-fuscis, multicostatis, costis obsolete striatis, 20-30 dentatis, dentibus lanceolato-subulatis, scariosis, nonnullis passim coalitis: caulibus sterilibus aequaliter verticillato-multiramosis, ramis simplicibus octo-striatis, scabris; vaginis primariis appressis, vaginulisque laxiusculis 4-5-dentatis: spica crassa ovato-oblonga obtusa.

E. Telmateja Ehrh. Beitr. 2. p. 159. K. Syn. ed. 2.ª p. 964. *E. fluviatile* Willd. Sp. 5. p. 2. Guss. Syn. p. 2.ª p. 649. ex specim. sic !

Ic. *E. fluviatile* Vauch. Mon. t. 2.

Exsicc. Mougg. et Nestl. Vog. rhen. 6. n. 301 !

In sylvaticis humidis, ac secus rivulos, torrentesque abunde.

Fruct. April. Maj. ♃.

Obs. E. fluviatile L. Sp. 1517 a nostro diversum videtur vaginis fusco-concoloribus approximatis, ramis magis numerosis etc.: num *E. Telmatejae* varietas ?

E. Telmateja β. ambiguum Genn.

Caule levi profunde sulcato ramis in unoquoque verticillo subsexdecim octogonis scaberrimis; vaginis primariis tubulosis, subappressis fascia ferrugineo-fusca circa oram praeditis, costis superne convexiusculis, canaliculatis, subsexdecim dentatis, dentibus lanceolato-subulatis ferrugineo-lutescentibus, scariosis; vaginulis viridibus, quadridentatis, dentibus setaceis adpressis: spica mediocri oblongo-cylindracea obtusa.

E. Telmateja β. caule fructifero folioso Loisl. Gall. 2. p. 357 ?

In promontorio portus Delphini *al Telegrafo.*

Fruct. Majo ♃.

Obs. Varietas haec nostra quamdam habere videtur affinitatem cum *Equiseto pratensi* Ehrh. l. c. p. 77. et Poir. Suppl. 4. p. 548 ; sed caules in hoc dicuntur scaberrimi, et rami 4-sulcati etc.

Subsect. 2.ª *Synanthia:* caules fertiles sterilesque coactanei.

E. sylvaticum L.

. . . . . ramis caulium sterilium dense verticillatis, elongatis, apice arcuato-nutantibus tetragonis, verticillato-parce ramulosis, ramulis triquetris; vaginis primariis turbinato-tubulosis octo-duodecim dentatis, dentibus subscariosis, costisque (vaginarum) dorso canaliculatis; ramorum vaginis quadridentatis, ramulorumque tridentatis, denticulis acuminato-setaceis, patentibus . . . . . .

E. sylvaticum L. Sp. 1516. All. Ped. 2. p. 281. K. Syn. ed. 2.ª p. 964.

Ic. Bolt. Fil. t. 32 et 33.

Exsicc. Morg. et Nestl. Vog. rhen. 1. n. 1!

In montibus *di Acquafredda*, unde plantam sterilem obtinui a cl. Prof. De Notaris. ♃.

Sect. 2.ª *Conformia:* caules fertiles, sterilesque conformes, semper-virentes.

Subsect. 1.ª *Apiculata:* spica apice mucrone terminata.

E. ramosissimum Desf.

Caulibus fertilibus, sterilibusque inaequaliter verticillato-ramosis, 8-15 costatis, scabris, vaginarum costis convexis, inferioribus subquadristriatis, superioribus unisulcatis albido-cinerascentibus, glandulisque nigricantibus longitudinaliter seriatis utrinque praeditis, dentibus 8-15 ex ovata basi lanceolato-acuminatis, medio purpureo-fuscis, margineque albo-membranaceis; vaginis ramorum 6-8-dentatis laxiusculis, junioribus viridibus eglandulosis, senio, more vaginarum primariarum, albido-cinerascentibus, glandulosisque; spica involucrata, aut exerta oblongo-ovata, mucronata.

E. ramosissimum Desf. Atl. 2. p. 398. Vauch. Mon. p. 359. Guss. Syn. 2. p. 649.

Ic. Vauch. l. c. t. 6.

In alveo torrentis *Sturla* prope Genuam, et in arvis secus *la Scrivia a Busalla.*

Fructif. Maj. Jun. ♃.

Obs. Specimina sicula a cl. Todaro communicata de synonimo Gussoniano me certum faciunt: item de synonimo Desfontainesii, pro auctoritate cl. Gussonii, qui ejus herbarium vidit, dubitare nequeo: figura demum Vaucheri plantae nostrae omnino respondet! — Reliqua synonima, utpote quae mihi adhuc incerta, omittere existimavi.

E. ramosissimum β. subsimplex Genn.

Caule simplici, vel ramo imo, alteroque brevi aucto.

Ic. nulla.

Legi in apennino *alla Scrivia* una cum specie: ex montibus supra *Sestri di Ponente* accepi a cl. De Notaris.

Fructif. eodem tempore, ac typus speciei.

E. PROCERUM GENN.

Caulibus fertilibus, sterilibusque inferne inaequaliter parce ramosis subviginti-costatis, scabriusculis; vaginis viridibus ad oram ampliatis internodium laxe ambientibus subviginti-dentatis, dentibus cuspide longa rubro-fusca, angustissime albo-marginata, caduca terminatis, basi convexiusculis, esulcatis; ramis brevibus hexagonis, vaginis ramorum caulium vaginis conformibus: spica involucrata oblongo-ovata apice in mucronem brevem sensim abeunte.

E. hyemale β. *procerum* POLL. Hort. et Prov. ver. pl. nov. vel min. cogn. p. 28. et Fl. ver. 3. p. 262 ?

Ic. nulla.

In Liguria orientali ad sepes prope *Rapallo*.

Fructif. aestate ♃.

Obs. Affine magis praecedenti, quam *E. hyemali*: attamen ab illo diversum dimensione partium majore, vaginis multidentatis eglandulosis, laxis, ac reliquis expositis.

E. ELONGATUM WILLD.

Caulibus simpliciter, vel duplicato-ramosis, subdecem-costatis, scabriusculis, vaginis appressis 8-12-dentatis, dentibus insigniter 4-striatis, apicem versus purpureo-fusco coloratis, cuspide longa scariosa, margine albo-membranacea, subpersistente praeditis; ramis, ramulisque virgatis solitariis, geminis, ternisve, inaequalibus, sexcostatis, vaginulis sexdentatis, dentibus pariter 4-striatis, cuspidatisque; spica parva subcylindracea, mucronata.

E. elongatum WILLD. Sp. 5. p. 8.

Ic. nulla.

In maritimis Liguriae occiduae ad sepes circa Albingaunum.

Fruct. Aug. Septembr. ♃.

E. CAMPANULATUM POIR.

Caulibus fertilibus, sterilibusque caespitosis simplicissimis 6-10 sulcatis, scabriusculis; vaginis inferioribus appressis cylindraceis, superioribus sensim ampliato-campanulatis 6-10 dentatis, carum costis superne, dentibusque subulato-setaceis nigrescentibus, albmarginatis, vel anguste albo-marginatis, medio unisulcatis, vel obsolete 4-striatis; spica brevi

ovata, mucronata ex nigro, luteoque variegata, vagina suprema maxime ampliata basi tecta.

E. campanulatum Poir. Dict. 5. p. 613 et Suppl. 5. p. 2.ª p. 577. Loisl. Gall. 2. p. 358. Vaucн. Mon. p. 369. — *E. caule sulcato subnudo vaginis aristatis* Hall. Helv. n. 1678.

Ic. Vaucн. l. c. tab. 12.

In alveo torrentium Feritoris, ac *Sturla* haud infrequens.

Fruct. Majo. Junio. ♃.

E. CAMPANULATUM β. RAMOSUM Genn.

Differt a specie caulibus nonnullis parce, breviterque verticillato-ramosis, spica subinde exerta.

Legi in alveo torrentis *Sturla* promiscue cum specie.

E. VARIEGATUM Schleich.

Caulibus caespitosis gracilibus, simplicissimis 6-8 costatis, vaginis medio costarum profunde sulcatis appressis, aut vix superne ampliatis, 6-8 dentatis, dentibus planiusculis scariosis cuspide albo-membranacea tenuissima, decidua terminatis, medio stria nigricante basi continua, vaginamque ad oram cingente exeursis; spica ovata subito apiculato-mucronata; sporotheciis medio nigro-notatis.

E. variegatum Schleich. Cat. pl. helv. 1807. p. 27. Willd. Sp. 5. p. 7. K. Syn ed. 2.ª p. 967. — *E. ramosum* β. Loisl. Gall. 2. p. 358. — *E. limosum* All. Ped. 2. p. 282 ?

Ic. nulla.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 4. n. 301 !

In alveo torrentium *Sturla*, et *Scrivia*.

Fructif. eodem tempore, ac praecedens ♃.

Obs. Magna profecto necessitudo est inter species ad hanc subsectionem spectantes; quinimo eaedem forte non sunt (postrema tantum excepta, quae validioribus, ac stabilioribus notis inniti videtur), nisi varietates unius, ejusdemque typi, uti et alii jam suspicati sunt. Res tamen usque adhuc incerta, eamque ulteriores observationes declarabunt.

Subsect. 2.ª *Mutica:* spica apice obtusa, nec acuminato-mucronata.

E. PALUSTRE L.

Leviusculum: caulibus profunde 6-8 sulcatis, vaginis turbinato-subcampanulatis 6-8 dentatis, ramis simplicibus 5-6 sulcatis, eorumque

vaginis 5-6 dentatis, dentibus vaginarum, vaginularumque conformibus, lanceolatis, medio purpureo-fuscis, margineque late albo-membranaceis; spica longiuscule pedunculata ovato-oblonga obtusa.

E. palustre L. Sp. 1516. Willd. Sp. 5. p. 5. Loisl. Gall. 2. p. 358. K. Syn. ed. 2.ª p. 965.

Ic. Fl. dan. t. 1183. — Bischoff Crypt. h. 1. t. 3. ex K. l. c.

Exsicc. Mougc. et Nestl. Vog. rhen. 3. n. 202!

In aquis stagnantibus sub monte *Cisa* in valle Feritoris, in paludosis planitiei Albingaunensis, ac secus torrentem *la Scrivia* prope pontem *di Savignone*.

Fruct. vere, et per aestatem ♃.

E. palustre β. polystachium Genn.

Ramis omnibus spicigeris, spica primaria deficiente.

E. palustre minus polystachion Bahnin. Pin. 16. prodr. 24. Willd. Sp. 5. p. 5. Loisl. Gall. 2. p. 358.

Ic. Dill. in Raii syn. t. 5. f. 3. ex Loisl. l. c.

In pratis udis prope Segestam Tiguliorum juxta specimen mecum communicatum a cl. De Notaris.

Fruct. aestate ♃.

E. palustre γ. simplex Genn.

Caule crassiusculo simplicissimo, vel ramis paucis, brevissimis subinde praedito.

In arenosis secus *la Scrivia a Busalla*, et prope *la Casella*.

Fruct. aestate ♃.

Obs. Praeter varietates hic allatas formae intermediae occurrunt apud nos, quae transitum unius in alteram, ac ad typum speciei evidenter demonstrant.

Stirps italica nondum in Liguria reperta.

Equisetum limosum L. Sp. 1517. Poll. Ver. 3. p. 261 non All.

In agro veronensi juxta Seguierum et Pollinium, in litoribus venetis ex Zanichellio ♃.

Usus. Nonnulli inter veteres medicos variis Equiseti speciebus, praesertim *E. arvensi* virtutem adstringentem, alii contra diureticam vim tribuerunt. At eorum actio in apparatu urinario nimis valida videtur, cum aliquoties mictum cruentum ex eorum usu prodire observatum sit.

Ord. II. MARSILEACEAE.

R. Br. Prodr. 166. K. Syn. p. 967.

(Cum nulla Marsileacea vera *reperta sit usquehac in Liguria, supervacaneum profecto hic foret hujus ordinis diagnosim exponere, eo potissimum, quod Isoetearum Tribus, forte non immerito, ad ordinem proprium, ac distinctum a recentioribus evecta est).*

Trib. III. ISOETAE

Bartl. Ord. nat. p. 16. K. Syn. ed. 2.ª p. 969. Endl. Gen. p. 69.

Sporothecia membranacea, oblongo-ovata, vaginae foliorum excavatae innata squamula semilunari, cordato-lanceolata, vel cordato-subrotunda imposita terminata, indehiscentia, sporangia duplicis generis includentia: alia majora, quae sporotheciis externis insunt, sphaeroidea, hinc tricostata, costis apice simul confluentibus, inferne horizontaliter productis, ac anulum sporangium suum medio cingens formantibus, alba, vel ex albo leviter caerulescentia, scrobiculata, vel tuberculata: alia minora farinacea in sporotheciis vaginis centralibus passim aphyllis adnatis inclusa, oblonga, plus minusve scabra, hinc planiuscula, sulcoque longitudinaliter excursa, primo albida, demum cinereo-plumbea: utraque tandem in sporothecii cavitate libera. — Rhizoma subrotundum carnosum, foliorum graminiformium vaginis numerosis, latiusculis appressis, extimis, limbo foliaceo elapso, saepius induratis tectum, subtus fibras radicales longas numerosas gerens.

Herbae perennes aquaticae, vel terrestres, australes quamplures.

ISOETES L. Gen. n. 1184.

(Character idem ac Tribus).

I. Duriaei Bory.

Foliis anguste linearibus semiterctibus in orbem recurvatis, vaginis externis, limbo foliaceo elapso, induratis apice truncato breviter tridentatis, ferrugineo-nitentibus: sporotheciis oblongis ligula brevi semilunari terminatis: sporangiis majoribus profunde scrobiculatis, minoribus scabrinsculis.

I. Duriaei Bory in compt. rend. Arad. des Scienc. 18. (Jun. 1844). — *I. Duriaei ligustica* DNtrs. in Kunz. ind. fil. cult. 1850. p. 51 !

Ic. Explor. scientif. de l'Alger. t. 36. f. 2.

In locis hyeme inundatis *ad Capo di Arenzano* copiosa. Fruct. a Februar. in Majum ♃.

MARSILEACEAE ITALICAE

praeter stirpem ligusticam.

Trib. 1.ª MARSILEAE K.

Marsilea quadrifolia L. Sp. 1563. All. Ped. 2. p. 289. Pollin. Veron 3. p. 295.

Ic. Lam. Ill. tab. 863.

Frequens in palustribus, ac oryzetis Italiae superioris: possideo quoque specimen lectum in agro ferrariensi ♃.

Marsilea pubescens Ten. Syll. p. 491!

Ic. Explor. scientif. de l'Alger. planch. 38. f. 21-32 (fragm.).

In paludosis gapygiae (*oliveto di S. Basile, bosco di S. Leonardo tra Taranto e Pisticci*): communicavit clariss. Auctor. ♃.

Pilularia globulifera L. Sp. 1563. All. Ped. 2. p. 289. Pollin. Veron. 3. p. 295. (in calce).

Ic. Lam. Ill. tab. 862.

In paludosis circa Mediolanum juxta specimina lecta a cl. Eq. De Notaris ♃.

Trib. 2.ª SALVINIEAE.

Salvinia natans Hoffm. Germ. 2. p. 1. All. Ped. 2. p. 289. Pollin. Ver. 3. p. 294. — *Marsilea natans* L. Sp. 1562.

Ic. Michel. Gen. tab. 58. Lam. Ill. tab. 863.

Specimen extat in Herb. cel. Viviani lectum a cel. Bertolonio in fossis thermarum pisanarum ♃.

Trib. 3.ª ISOETEAE.

Isoetes lacustris L. Sp. 1563. DNtrs. in Ind. sem. h. Gen. an. 1848. p. 25!

Ic. Lam. l. c. tab. 862.

Ad oras lacus Cusii legit clariss. De Notaris ♃.

I. setacea Delili. Mem. hist. nat. 14. p. 100. Moris et DNtrs. Caprar. p. 161!

Ic. Delile l. c. tab. 6. 7.

In paludosis Sardiniae *a Iglesias*, et in insula Capraria legit cl. Di Notaris ♃.

I. adspersa Al. Br. in Expl. scientif. de l'Alger. planch. 37. f. 3.

Extat specimen in Herb. Vivianii sub nomine *I. lacustris* lectum in Corsica inter *Portovecchio* et *Bonifacio* ♃.

Ord. III. LYCOPODIACEAE.

DC. Fl. fr. 2. p. 257. K. Syn. ed. 2.ª p. 969. *Stachyopterides* Willd. Sp. 5. p. 41 et 45. excl. gen.

Sporangia conformia, aut biformia in axillis foliorum sessilia, vel in spicas terminales disposita, et tunc foliis bracteiformibus fulta, in valvas regulariter dehiscentia: sporae pariter vel conformes farinaceae, antheridiferae, vel biformes; aliae nempe uti praecedentes farinaceae; aliae grandiusculae globosae. — Caulis procumbens, adscendens, erectusve, radiculas accessorias hinc inde emittens, dichotome ramosus: folia alterna distieha, vel tetrastieha, floralia subconformia, interdum ampliora, aut in bracteas diminuta.

Repent humi, ac in arborum truncis, praesertim in locis siccis, et umbrosis: inter tropicos numerosae, ac valde luxuriantes: paucae floram europaeam intrant.

LYCOPODIUM

L. Gen. 1185. ex parte, Spring. Mon. p. 1.ª p. 17. Ledeb. Ross. 4. p. 496. K. Syn. ed. 2.ª p. 969.

Sporangia sessilia, vel brevissime stipitata, subrotunda, vel reniformia, unilocularia, rima dorsali (in *L. clavato*, saltem apud nos, incompleta) dehiscentia. Sporae tenuissimae farinam simulantes trigonae primum quaternatim cohaerentes, demum liberae, antheridiferae. Sporae fertiles seu faemineae adhuc ignotae.

L. Selago L.

Caule subrepente, arcuato-adscendente, erectove, a basi ramoso, ramis dichotomis fastigiatis; foliis confertis, appresso-subpatulis, lineari-lanceolatis, acuminato-pungentibus, coriaceis, integris, denticulatisve; sporangiis axillaribus, sessilibus exacte reniformibus, compressis.

L. Selago L. Sp. 1565. All. Ped. 2. p. 290. Willd. Sp. 5. p. 49. Loisl. Gall. 2. p. 371. K. Syn. ed. 2.ª p. 969.

Ic. Selago vulgaris Abietis rubrae facie Dill. Musc. 435. t. 56. f. 1. — Bischoff Krypt. gew. t. 10. f. 1 et 7. t. 11. f. 22-24 ex K. l. c.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 1. n. 4!

Legi in alpibus Liguriae occiduae *alle Viosenne*. Fruct. Jul. Aug. ♃.

L. Chamaecyparissus A. Br.

Caule late repente, ramis primariis remotis inferne simplicibus erectis, superne dichotome ramosissimis, ramulis compresso-ancipitibus subtriangulis, fastigiatis: foliis adpressis quadrifariis, lanceolato-acuminatis, mucronatis subaequalibus: pedunculis elongatis sparse, remoteque bracteatis, simplicibus, ramosisque, spicas cylindraceas simplices, vel supra medium bifidas gerentibus; bracteis ex basi late ovato-triquetra eroso-crenulata in cuspidem longiusculam reflexam abeuntibus, sporangiis reniformi-subtrigonis.

L. Chamaecyparissus α. Br. ap. Doell. rhein. flor. p. 36. ex K. Syn. ed. 2.ª p. 970. — *L. complanatum* Ledeb. Ross. 4. p. 499. β. — L. complanatum Pollich. Palat. 3. p. 27.

Ic. *L. complanatum* Bischoff l. c. t. 10. f. 5. ex K. l. c.

In arenosis, ericetisque retro arcem *de' Rati* prope Genuam. Fruct. Jun. Jul. ♃.

L. clavatum L.

Caule repente ramoso, ramis adscendentibus, dense foliosis: foliis linearibus incurvatis: pedunculo terminali simplici, aut ramoso dense bracteato, spicas 2-3 cylindraceas bracteis late ovatis, cuspidatis, margine scariosis, eroso-dentatis praeditas gerente: foliis, bracteisque pilo longo terminatis; sporangiis subreniformi-rotundatis, membranaceis.

L. clavatum L. Sp. 1564. All. Ped. 2. p. 290. Willd. Sp. 5. p. 16. Loisl. Gall. 2. p. 371. K. Syn. ed. 2.ª p. 971.

Ic. Dill. Musc. t. 58. f. 1. — Bischoff l. c. t. 10. f. 4 et 11. f. 14. 15. 16. 25.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 3. n. 203!

In montibus Lunensibus, et in montibus *del Sassello* supra Savonam. Fruct. aestate ♃.

SELAGINELLA

Spring. in Regensb. Bot. Zeit. 1838. I. p. 148 et Mon. 2. p. 52. K. Syn. ed. 2.ª p. 971.

Sporangia biformia: alia subreniformia superficie minute scrobiculata,

bivalvia sporis minutissimis trigonis quaternatim cohaerentibus, demum liberis antheridiferis repleta: alia 3-4 valvia 3-4 sporas majores sphaeroideas hinc supra medium costis tribus apice confluentibus praeditas genitalia faeminea (*oophoridia*) continentia.

S. spinosa P. B.

Caule repente ramoso, ramis subsimplicibus adscendentibus, vel erectis; foliis subquadrifariis, sparsisve, lanceolatis, acuminatis, margine spinuloso-dentatis, patulis; ramis fertilibus in spicam crassiusculam bracteis folio caulino latioribus praeditam desinentibus; sporis majoribus in sicco candidis.

S. spinosa Paliss. de Beauv. Prodr. p. 112. ex Ledeb. Ross. 4. p. 501. — *S. spinulosa* R. Br. ex K. Syn. ed. 2.ª p. 971. — *Lycopodium selaginoides* L. Sp. 1565. All. Ped. 2. p. 290. Willd. Sp. 5. p. 28. Loisl. Gall. 2. p. 372.

Ic. Dill. Musc. t. 68. f. 1. — Bischoff l. c. t. 11. f. 17. 19. 35. 38.

Exsicc. Moug. et Nestl. l. c. 4. n. 303!

In alpibus nicaeensibus juxta specimen quod extat in Herb. cel. Viviani a cl. Prof. Gherardi lectum.

Fruct. Jul. Aug. ♃.

S. helvetica Link.

Caule procumbente basi, ramisque sterilibus complanatis radicantibus: foliis quadrifariis, margine obsolete denticulato-scabris, majoribus oblongo-ovatis, subfalcatis, rectangulo-patentibus, mucronatis: ramis fertilibus in spicam gracilem elongatam simplicem, bifidamve transeuntibus, bracteis ovato-acutis, patulis.

S. helvetica Link Fil. hort. Berol. p. 159. Spring. Mon. 2. p. 83. L. Syn. ed. 2.ª p. 971. Ledeb. Ross. 4. p. 501. — *Lycopodium helveticum* L. Sp. 1568. All. Ped. 2. p. 291. Willd. Sp. 5. p. 33. Loisl. Gall. 2. p. 372.

Ic. Jacq. Austr. t. 196.

Legi in sylvis umbrosis montium Liguriae occiduae supra *Nava*.

Fruct. Jul. Aug. ♃.

S. denticulata Link.

Caule late repente, dichotome ramosissimo, filiformi: foliis irregulariter quadrifariis, oblique ovatis, mucronatis, inaequaliter serrato-ciliolatis, binis majoribus erecto-patentibus, minoribus appressis: ramis fertilibus in spicam inferne conformiter foliosam, superne bracteis cuspi-

datis sporangia fulcientibus praeditam abeuntibus; sporis minoribus pulchre croceis.

S. denticulata Link l. c. p. 159. Spring. Mon. p. 82. K. Syn. ed. 2.ª p. 971 (in observ. ad *S. helveticam*). — *Lycopodium denticulatum* L. Sp. 1568. Loisl. Gall. 2. p. 372. Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 650.

Ic. Dill. Musc. t. 66. f. 1. A.

In sylvis ad terram muscosam, arborumque vetustarum truncos per universam Liguriam frequens.

Fruct. Apr. Maj. ♃.

LYCOPODIACEAE ITALICAE

praeter Ligusticas.

Lycopodium inundatum L. Sp. 1565. Birol. Fl. aeon. 2. p. 153. Pollin. Fl. Ver. 3. p. 266.

Ic. Dill. Musc. t. 62. f. 7. — Engl. Bot. t. 239.

Ex spongiosis ad Verbanum communicavit clariss. De Notaris, ex valle Camonica Rota. ♃.

L. annotinum L. Sp. 1566. All. Ped. 2. p. 290. Birol. l. c. p. 153. Pollin. l. c. p. 265.

Ic. Dill. l. c. t. 63. f. 9.

Accepi ex alpibus penninis *in Valsesia* supra *Riva* a Rev. Carestia. ♃.

L. alpinum L. Sp. 1567. All. Ped. 2. p. 291. Pollin. Veron. 3. p. 265.

Ic. Dill. l. c. t. 58. f. 2. — Engl. Bot. t. 234.

Legi in apennino bononiensi *al Corno delle scale*, et in alpibus penninis *al monte Rosa*. ♃.

Usus. Sporis Lycopodiorum (*L. clavati*, *L. selaginis*, etc.) usi sunt Medici sub nomine *pulveris*, vel *farinae Lycopodii sulphuris vegetabilis etc.*: ad vermes intestinales expellendos, menstrua ciendа, emetocatharsim promovendam, nec non contra dysuriam, ac stranguriam, mictum cruentum, renum calculos, hydrophobiam, phthisim pulmonarem, aliosque morbos. Nonnulli etiam fomentationes ex infuso herbae *Lycopodii selaginis* ad sugillationes e lapsu ortas discutiendas commendarunt. Nunc vero vix tantum ad pilulas conspergendas *pulvis Lycopodii* in officinis asservatur.

Ord. IV. FILICES.

L. Gen. p. 484. excl. Gen. Endl., Gen. p. 58. — *Filicales* Lindl., the Veg. Kingd. p. 74. — *Stachyopteridum* pars, et *Filices* Willd. Sp. 5.

Sporangia gregaria (sporothecia, sori) dorso, vel rarissime utrique foliorum (frondium) paginae inserta, interdum secus costam mediam frondium, lamina abortiente, in spicam simplicem, compositamve disposita, unilocularia, saepius anulo elastice dissiliente cincta, pedicellata, aut sessilia, sporis numerosis, liberis repleta, nuda, aut involuero membranaceo, scarioso (indusio) tecta. Antheridia in superficie prothallii sita.

Plantae herbaceae, rhizomate repente, rarius (in regionibus tropicis) trunco arborescente erecto, frondibus utplurimum caespitosis, simplicibus, vel ramosis, conformibus, aut difformibus praeditae: terrestres, saxicolae, arboricolae, in locis umbrosis praesertim habitantes.

Trib. 1ª OPHIOGLOSSACEAE.

Lindl. l. c. p. 77. — *Ophioglosseae* R. Br. Prodr. p. 163. Endl., Gen. 1. p. 65. Koch Syn. ed. 2.ª p. 972. — *Stachyopterides* Willd. Sp. 5. introd. p. 41 et 45 ex parte.

Sporangia globosa, coriacea, opaca, exanulata, evenula, unilocularia, regulariter bivalvia, margini frondis contractae, ac ad costam mediam reductae inserta, sessilia, spicam simplicem, ramosamve referentia: vernatio haud circinalis.

Subtrib. 1.ª OPHIOGLOSSEAE.

Auct. excl. gen.

Sporangia subovata in spicam simplicem secundam distiche disposita lateribus suis connata, transverse bivalvia: sporae globosae, reniformes, muriculatae.

Frondes steriles simplices, nervillis anastomosantibus arcolatae: frondes fertiles immaturae nodoso-articulatae, maturae emarginato-dentatae.

1. OPHIOGLOSSUM.

L. Gen. n. 1171. excl. sp. Endl., Gen. 671.

Herbae humiles terrestres, ericetorum, item humentium incolae.

In insulis praesertim Asiae tropicalis obviae: rarae in Africa australi: haud frequentes intra limites zonae temperatae utriusque terrarum

orbis: binae species in Europa, ac in Italia vigent, una tantum in agro ligustico hucusque reperta est.

Oph. vulgatum L.

Fronde sterili solitaria ovata, vel oblonga, integerrima, sub vitro venoso-areolata, basi breviter decurrente; fronde fertili rachiformi angustissime lineari, simplici, nec unquam apud nos bifida.

Oph. vulgatum L. Sp. 1518. All. Ped. 2. p. 282. Willd. Sp. 5. p. 58. *a.* Loisl. Gall. 2. p. 358. Koch Syn. ed. 2.ª p. 973.

Ic. Fl. Dan. t. 147.

Exsicc. Moug. et Nestl. Crypt. Vogeso-Rhen. 6. n. 502!

Legi in sylvarum locis humentibus montium supra Feritorem prope S.^m^ Eusebium, in montibus supra Porciferam *a Fegino*, in pratis, et secus rivulos apennini Liguriae orientalis circa *Varese*, ac in planitie Vadi Sabatiae. Frnct. ab Aprili in Junium.

Obs. Variat fronde sterili obtusa, et acutiuscula, areolis nervillaribus arctis, vel laxioribus. Forte igitur *O. ovatum* Sw. « fronde ovata, » aucta, laxe reticulata, etc. » ab *O. vulgato* diversum non est.

Usus. Medici olim utebantur *Ophioglosso* ad recentia vulnera glutinanda, item contra morsus serpentum, ac insectorum venenatorum ictus, nec non contra pestem. Laudatum fuit etiam in profluviis sanguineis, et mucosis, uti in dysenteria, leucorrhea etc.: demum adhibitum fuit sub forma unguenti in variis generis tumoribus, ac in gangraena.

Subtrib. 2.ª BOTRYCHIEAE.

Sporangia in spicam compositam secundam distiche disposita, disjuncta, semibivalvia, sporae globosae, vel triangulae, laeves.

Frondes steriles pinnato-pinnatifidae, aut decompositae nervillis liberis, pluries furcatis, flabellatis praeditae.

II. BOTRYCHIUM.

Sw. Fil. p. 171. Endl. l. c. 66. n. 674.

Herbae humiles terrestres in pascuis humidis alpinis, montanisque vigentes. Incolunt praesertim regiones boreales: rarae sunt in zona temperata, rarissimae in calida: species tres in Europa occurrunt, duae in Italia; una tantum Floram ligusticam intrat.

B. LUNARIA Sw.

Fronde sterili solitaria oblonga longitudine sua duplo, triplove angustiore petiolum frondis fertilis ad medium usque, et altius adnato-involvente, pinnati-partita, pinnis transverse latioribus cuneato-semilunaribus, integerrimis crenulatis, flabellatove-incisis (K).

B. lunaria Sw. Fil. 171. WILLD. Sp. 5. p. 61. LOISL. Gall. 2. p. 359. K. Syn. ed. 2.ª p. 977. — *Osmunda lunaria* L. Sp. 1519. ALL. Ped. 2. p. 282.

Ic. Fl. Dan. t. 18.

Exsicc. DESMAZ. Cryptog. de la Franc. 12. n. 595! MOUG. et NESTL. Crypt. vog. rhen. 1. n. 5!

In pratis humentibus alpium maritimarum supra *Rezzo*, in monte *Ariona* apennini Liguriae orientalis loco dicto *il prato molle*. Fruct. Jun. Jul.

Obs. Licet diagnosim a cel. KOCHIO traditam, utpotequae accuratissima est, ad literam exscripserim, animadvertendum tamen est, quod in speciminibus nostris tam in alpibus maritimis, quam in penninis (*monte Rosa*, *col d'Ollen*) lectis laciniae frondis sterilis neutiquam incisae, sed leviter crenatae adsunt.

Usus. Pares virtutes antiqui Medici tribuerunt *Botrychio lunario*, ac *Ophioglosso vulgato*. Jamdiu tamen utraque species, saltem apud nos, desuevit.

Trib. 2.ª OSMUNDACEAE.

R. Br. Prodr. p. 161. K. Syn. ed. 2.ª p. 963. ENDL. Gen. p. 65. — *Osmundeae* LINDL. the Veg. Kingd. p. 81. — *Schismatopterides* WILLD. Sp. 5. introd. p. 42 et 46.

Sporangia reticulato-venosa dorso gibbere striato (annuli rudimento) instructa, unilocularia, regulariter bivalvia.

Frondes steriles bipinnatae, nervillis liberis furcatis praeditae; frondes fertiles contractae rachiformes, pari modo divisae. Vernatio circinalis.

III. OSMUNDA.

L. Gen. 1172. excl. sp. ENDL. Gen. p. 65. n. 665.

Sporangia subglobosa pedicellata reticulata, gibbere parvo obscure articulato instructa, ad marginem frondis seriatim disposita: sporae majusculae reniformes, vel ovoideae muricatae, nigrae.

Filices prae caeteris nostratibus grandes, terrestres, sylvicolae. Fere eandem geographicam tenent distributionem, quam Botrychia. Nulla alia stirps, praeter eam, quae ad Floram etiam nostram spectat in tota Europa, imo in universo terrarum orbe veteri usque adhuc reperta est.

O. REGALIS L.

Frondibus bipinnatis, pinnulis oblongo-lanceolatis leviter crenulato-dentatis, basi oblique cordatis, inferioribus hinc lobulatis obtusis, vel acutiusculis; paniculae fructificantis ramis suboppositis, spiculis alternis dense sporangiferis, sporangiis subrotundis.

O. regalis L. Sp. 1521. WILLD. Sp. 5. p. 97. *a.* ALL. Ped. 2. p. 283. LOISL. Gall. 2. p. 359. GUSS. Syn. 2. p. 2.ª p. 652. K. Syn. ed. 2.ª p. 973. BERTOL. Pl. gen. ed. 1.ª p. 139. et Amoen. Ital. p. 212.

Ic. Encycl. bot. ed. de Pad. 9. t. 865. f. 2.

Exsicc. DESMAZ. Crypt. de la Franc. 22. n. 110! — MOUG. et NESTL. Vog. rhen. 3. n. 204!

In sylvaticis Liguriae occiduae supra *Sestri* et *Pegli*, ac secus torrentem *di Quigliano* supra Vadum Sabatiae. Fruct. Maj. Jun.

Obs. Planta ligustica quidquam diversa videtur ab insubrica, saltem quoad specimina quae in hac novissima regione, ac in vallibus supra Verbanum lecta mihi prae oculis sunt. Pinnulae enim sunt in nostra fere duplo longiores, petiolulatae basi evidenter oblique cordatae, lobulo externo producto, plus minusve discreto, obtusae, vel acutiusculae, nec veluti in illa apice rotundato-obtusissimae, nervis facie magis conspicuis, geminatis, simpliciter furcatis, aut repetito-furcatis; demum rachides secundariae rectae, nec flexuosae, angustissime alatae, juniores piloso-paleaceae. Specimen quod extat in DESMAZ. l. c. plantam insubricam refert, licet longe humilior sit.

Videndum proinde est, utrum differentiae cultura perstent.

Usus. Nostra aetate ill. genevensis Medicus AUBERT existimationem quam *Osmunda regalis* apud veteres Physicos servabat forte non immerito vindicavit. Quin imo contra rachitidem passim nunc, nec frustra, adhibetur. Partem officinalem rizhoma sistit, ex quo extractum paratur.

Trib. 3.ª POLYPODIACEAE.

R. BR. Prodr. p. 145. K. Syn. ed. 2.ª p. 973. ENDL. Gen. p. 59. LINDL. the veg. Kingd. p. 78. excl. subtr. FÉE Gen. fil. famill. Polyp. — *Filices* WILLD. Sp. 5. introd. p. 42 et 47.

Sporangia in receptaculo proprio, aut nervillari, vel (nunquam in polypodiaceis nostratibus) per totum frondis dorsum, rarissime per utramque paginam effusa, unilocularia, reticulato-venosa, annulo articulato, verticali cincta, transversim irregulariter dehiscentia.

Frondes saepius conformes, nervillis simplicibus, aut varie divisis, liberis, vel se se anastomosantibus praeditae. Vernatio circinalis.

Subtrib. 1.ª LOMARIEAE.

Fée Polyp. p. 21 et 65.

Sporotheccia secundum lineam rectam excurrentia submarginalia, vel nervo medio approximata, indusio tecta.

Filices feracissimae, rarissime (exoticae) volubiles, herbaceae, frondibus saepius pinnatis, aut pinnatifidis, diplotaxicis, seu biformibus, nervillis liberis paralellis, furcatis.

IV. LOMARIA.

Willd. in. Mag. de Ges. Naturf. f. z. Berl. 1809. p. 160 et Sp. 5. p. 289. Fée l. c. p. 66. — *Blechnum* L. Gen. n. 1175 ex parte. Endl. Gen. 624 ex parte.

Sporotheccia linearia continua, parallelia marginalia, vel submarginalia pinnulae costam attingentia: indusium verum scariosum, demum reflexum, persistens: anulus 18-24 articulatus sporangio leviter adhaerens: sporae majusculae reniformes, subrotundae, vel ovoideae.

Plantae herbaceae terrestres, sylvicolae locis umbrosis humentibusque delectantes: tropicales plurimae: duae cosmopolitae dici possunt, et extremas regionum polarium plagas pertingunt, quarum altera in Europa viget, et floram simul nostram intrat.

Lomaria Spicant Desv.

Frondibus lanceolatis: sterilibus pinnati-partitis, pinnatisve, laciniis alternis oblongo-linearibus, subfalcatis, acuminulatis, paralelle approximatis, integerrimis; fertilibus longioribus, pinnatis, pinnis anguste linearibus, acuminulatis, remotioribus, semidecurrentibus: foliolis utriusque frondis basim versus sensim decrescentibus, infimis minimis, ramentaceis: stipite basi paleaceo, in fronde sterili breviori.

L. Spicant Desv. Mag. d. naft. z. Berl. 5. 325. — *Blechnum Spicant* Roth. Tent. 3. p. 44. K. Syn. ed. 2.ª p. 984. Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 658. — *B.*

boreale Sw. Syn. fil. p. 115. Willd. Sp. 5. p. 408. Bertol. Amaen. It. p. 212. — *Osmunda Spicant* L. Sp. 1522. Bertol. Pl. Gen. ed. 1.ª p. 139.

Ic. Fl. Dan. t. 99.

Exsicc. Desmaz. Crypt. de la Franc. 12. n. 599! Moug. et Nestl. Vog. rhen. 2. n. 110!

In sylvis collinis, montanisque frequens. Ipse legi in Liguria occidua supra *Sestri*, supra Savonem: ex viciniis portus Lunae communicavit amicissimus Caldesi.

Fruct. Jun. Jul.

Obs. In stirpe nostrate sporotheeia per medium pinnarum laminae utrinque longitudinaliter excurrunt, et aeque fere a nervo medio, et margine distant: hinc illa inter *Eulomarias*, et *Paralomarias* quoad sporotheciorum situm ambigit. Attamen genus proprium (*Spicanta* Presl.) cum ceteroquin *Lomariarum* notas praecipuas, et habitum herba praebeat admittendum non est.

Ceterum nervillae puncto pellucido, in fronde sterili magis conspicuo, uti in *Blechno punctulato* Sw. apice terminantur.

V. ACROPTERIS.

Link Sp. fil. p. 79. *modific.* Fée l. c. p. 76.

Sporotheeia linearia ad latera, ac ad apicem nervillarum inserta, confluentia, ac per totam latitudinem suam paginam frondis proliferam invadentia: indusium spurium, scariosum, tenue, pellucidum: sporangia rotundata: annulus 18-22 articulatus: sporae crassiusculae ovatae, aut trigonae.

Herbae humiles, glabriusculae, monotaxicae, seu frondibus fertilibus, sterilibusque conformibus praeditae, frondibus praeterea caespitoso-fasciculatis, rigidulis, pauci-nervatis; subdichotomo-laciniatis, nervillis parallelis, saepe instar Palmarum foliorum partitis. Crescunt ad saxa regionum tropicarum: una, quae et in flora nostra locum tenet, extratropicalis est.

A. septentrionalis Link.

Frondibus simpliciter, vel repetito-furcatis, canaliculatis, laciniis lineari-lanceolatis, integris, vel superne remote, alternatim lacinulatis, apice inaequaliter inciso-bi-tridentatis, aristulatis; stipite longo ima basi fuscescente, nitido.

A. septentrionalis Link Hort. berol. 2. p. 56. *Acrostichum septentrionale*

L. Sp. 1524. All. Ped. 2. p. 288. — *Asplenium septentrionale* Sw. Syn. fil. 75. Willd. Sp. 5. p. 307. K. Syn. ed. 2.ª p. 983. Loisl. Gall. 2. p. 361. — *Scolopendrium septentrionale* Roth. Tent. 3. p. 49. — *Blechnum septentrionale* Wall.. Roth. in comp. fl. germ. 3. p. 24.

Ic. Fl. Dan. t. 60.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 1. n. 8!

Ad fissuras rupium, ac ad muros campestres Alpium maritimarum, Apennini, montiumque humiliorum in universa Liguria frequens. Legi supra *Rezzo* in provincia Unelliensi, a *Struppa* supra Feritorem, et in monte *Gottro* ditioni parmensi contermino.

Fruct. vere et aestate.

Subtrib. 2.ª ADIANTEAE.

Fée l. c. p. 23. 36. 112.

Sporothecia nervillarum ramulos plures sub anthesi valde auctos invadentia, submarginalia, indusio carnoso, introrsum dehiscente tecta.

Filices erectae glaberrimae, frondibus saepe dimidiatis, teneris pellucidis, stipitibus nitidis, fragilibus.

VI. ADIANTUM.

L. Sp. 1180. Endl. Gen. 620. Fée l. c. p. 112.

Sporothecia interrupta, rarissime (in stirpibus exoticis) continua: indusium marginale transverse oblongum subreniforme: receptaculum crassum marginale: anulus sporangiorum ovalium 14-20 articulatus: sporae obtusae, trigonae.

Frondes glaucescentes simplices, vel decompositae, pinnulis saepe dimidiatis, flabelliformibus, nervillis repetito-furcatis, tenuibus, stipitibus fusco-badiis, nitentibus fragilibus.

Plantae terrestres, rupestres, parietinae in locis humidis, fontibus, ac stillicidiis passim occurrentes: tropicos, et praesertim Brasiliam, Guyanam, Jamaicam, C. Bonae Spei etc. incolunt: stirps unica in Europa late crescit, quae in Italia pariter ac in Liguria vulgatissima est.

A. Capillus Veneris L.

Frondibus ambitu ovato-oblongis, bi-tripinnatis, pinnulis obovato-cuneatis, subflabellatis, petiolulatis; fertilibus antice lobato-laciniatis, laciniis apice sporothecium indusio transverse lineari, sublunato, denti-

culato tectum gerentibus: stipite, rachideque ecanaliculatis, atro-purpureis, nitidissimis.

A. Capillus Veneris L. Sp. 1558. All. Ped. 2. p. 288.

Ic. Jacq. Misc. 2. p. 77. t. 7.

Exsicc. Mouc. et Nesti.. Vog. rhen. 8. n. 702 !

Legi Gennae in muro aquaeductus publici extra portam S.ti Bartholomaei, in stillicidiis secus rivulos montanos ad Feritorem, et Porciferam alibique.

Fruct. vere, et aestate.

Usus. Notorius, ac apud mulieres familiaris est usus Capilli Veneris ad menstrua et lochia promovenda. Reapse autem practici vim ejus medicam parvi faciunt.

Subtrib. 3.ª PTERIDEAE.

Fée l. c. 23. 124.

Sporotheccia nervillas plures invadentia, marginalia, indusio tenui membranaceo introrsum dehiscente tecta.

Filices amplae, erectae, varie divisae, saepissime glabrae.

VII. PTERIS.

L. Gen. 1174. excl. sp. Endl. Gen. 622. Fée l. c. p. 124.

Sporotheccia linearia, marginalia, continua: indusium verum, membranaceum, integre dehiscens: sporangia subrotunda, vel obscure trigona ad axillam indusii nascentia: anulus latus, sub 20-articulatus; sporae ovoideae, aut trigonae.

Frondes monotaxicae 1-2-3 pinnatifido-pinnatae, segmentis fertilibus passim angustioribus, nervillis paralellis furcatis, hinc inde simplicibus. Herbae mediocres, vel grandes terrestres, rupicolae, per universum terrarum orbem diffusae, frequentiores vero in regionibus tropicis, et finitimis. Species tres in Europa occurrunt, atque in Italia, duae in Liguria, quarum altera communissima est.

P. cretica L.

Glaberrima: frondibus impari-pinnatis, bi-tri-jugis, pinnis subopppositis, lanceolatis acutis, acuminatisve, argute cartilagineo-serrulatis subsessilibus, infimis geminatis (nunquam apud nos ternatis), superioribus hinc basi productis, connatis, impari petiolulato, pinnis fertilibus elongatis, margine fructifero, revoluto integris.

P. cretica L. Mant. 130. Willd. Sp. 5. p. 374. Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 657. Bertol. Amaen. It. p. 430. — *P. oligophylla* Viv. Ann. bot. 2. p. 189.

Ic. Lingua cervina foliis costae innascentibus Tourn. instit. 544. t. 321.

Legi in umbrosis sylvarum supra Porciferam *a Fegino, a Teirolo,* in valle Feritoris prope *Fontaneggi,* et ad promontorium portus Delphini.

Fruct. Maj. Jun.

Obs. Pinnae frondis fertilis per totum marginem, vel tantum per tractum marginis intermedium fructiferae sunt; et tunc margo infra fructificationem omnino integer est, superior vero argute serrulatus pinnarum sterilium more.

P. aquilina L.

Frondibus tripinnatis, pinnulis oblongo-lanceolatis, vel lanceolato-linearibus, obtusis, vel acutiusculis margine revolutis, integris, dorso, rachidibusque sparse pilosis, infimis pinnatifidis; stipitibus, rachidibusque primariis, et secundariis utrinque glaberrimis.

P. aquilina L. Sp. 1533. All. Ped. 2. p. 283. K. Syn. ed. 2.ª p. 984. — *Allosorus aquilinus* Presl. Pterid. p. 153.

Ic. Bolt. fil. 16. t. 10.

Exsicc. Desmaz. Crypt. de la Franc. 12. n. 600! Morc. et Nestl. Vog. rhen. 2. n. 109!

In sylvaticis collinis, ericetis, dumetisque sterilem, in alpibus maritimis *alle Viosenne, al Tauarello,* ac in apennino genuensi supra *Valtereggia* late fructificantem legi.

Fruct. a Jul. in Septembr.

Usus. Rizhoma *Pteridis Aquilinae* inter remedia *Filici Mari* succedanea contra vermes intestinales, et praecipue contra taeniam adnumeratur.

VIII. PHOROLOBUS.

Desv. in Ann. Soc. Linn. 6. p. 291. Fée l. c. p. 130. — *Allosurus* Bernh. in Schrad. Journ. 1. 2. p. 36. Endl. Gen. 608.

Sporothecia linearia, nervillaria, continua pinnularum margine reflexo loco indusii tecta: annulus latus, 20-22 articulatus: sporae trigonae, vel reniformi-ovoideae.

Frondes diplotaxicae, multifidae, sterilium segmentis dilatatis, lacinulato-dentatis, fertilium angustioribus oblongo-linearibus, integris, parce nervillosae. Herbae terrestres, monticolae, alpigenae: unica stirps, quae et floram nostram intrat in universa Europa usque adhuc reperta est:

reliquae, quae binae sunt, ad floram Americae septentrionalis pertinent.

Ph. crispus Desv.

Frondibus ambitu ovatis, tripinnatis, pinnulis frondium fertilium oblongo-linearibus, integris, sterilium oblongo-cuneatis, brevioribus, latioribusque pinnatifidis, laciniis apice incisodentatis, integrisve, stipite tenero, fragili, glabro.

Ph. crispus Desv. l. c. — *Allosorus crispus* Bernh. l. c. K. Syn. ed. 2.ª p. 985. — *Pteris crispa* All. Ped. 2. p. 284. Loisl. Gall. 2. p. 361. — *Osmunda crispa* L. Sp. 1522. — *Acrostichum crispum* Vill. Dauph. 4. p. 838. — *Blechnum crispum* Hartm. Scand. ed. 3.ª p. 255. *Cryptogramma crispa* R. Br. — *Struthiopteris crispa* Wallr. in Comp. fl. germ. 3. p. 27.

Ic. fl. Dan. t. 496. — Fée l. c. tab. VII. *D.* (fragmenta).

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 3. n. 208!

Ad saxa secus rivulos montium Liguriae occiduae *alle Viosenne*, et supra *Nava* frequens: occurrit quoque in apennino Liguriae orientalis *al monte Gottro*. Fruct. aestate.

Subtrib. 4.ª CHEILANTHEAE.

Fée l. c. p. 23. 145.

Sporotheccia nervillam unicam occupantia, marginalia, nuda, aut indusio spurio tecta.

Filices erectae dense squamatae, lanatae, multidivisae lobulis rotundatis.

IX. CHEILANTHES.

Sw. Syn. t. 3. f. 5-7. Endl. Gen. 618. Fée l. c. p. 155.

Sporotheccia subglobosa in pinnularum margine sita, totam paginam demum tegentia: indusium spurium membranaceum vel nullum: sporangia ovoidea: anulus latus sub-22-articulatus: sporae rotundato-ovatae, vel angulatae.

Frondes bi-tri-quadripinnatae, ambitu triangulares, vel (uti in stirpibus nostratibus) oblongo-lanceolatae, pinnulis, lobisque parvulis, rotundis, siccitate involutis, stipitibus rachidibusque fuscis, paleaceis, aut lanatis, nervillis liberis vix conspicuis. Plantae humiles terrestres, rupicolae: tropicos fere omnes incolunt: binae species in Europa occurrunt, unica in Italia, ac in Liguria.

Ch. odora Sw.

Frondibus ambitu oblongo-lanceolatis, tripinnatis, pinnulis ovatis,

rotundisve, repando-crenatis, sublobulatis; indusio scarioso, fimbriato-ciliato; stipite, rachidibusque primariis, et secundariis paleaceis, demum glabratis.

Ch. odora Sw. Syn. fil. p. 127 et 317. Willd. Sp. 5. p. 457. Loisl. Gall. 2. p. 369. Guss. Syn. 2. part. 2.ª p. 660. — *Polypodium fragrans* L. Mantiss. 2. p. 307. — *Pteris acrosticha* Balb. add. ad Fl. ped. et Misc. alt. p. 46.

Ic. Desf. Fl. atl. 2. t. 257.

Ad rupes calcareas montium Liguriae occiduae, et praesertim ditionis Nicaeensis. Ex montibus *di Triora* misit egregius Panizzi: in comitatu Nicaeensi legit R. De-la-Croix juxta specimen, quod obtinui a cl. De Notaris. Fruct. vere, et aestate.

X. NOTHOLAENA (lege NOTHOCHLAENA).

R. Br. Prodr. p. 145. Endl. Gen. 614. Fée l. c. p. 158.

Sporotheeia ad apicem nervillarum sub-uniseriata: indusium nullum: sporangia elliptica: annulus sub-22-articulatus: sporae globosae, crassiusculae, laeves, aut rugulosae.

Frondes 1-2-pinnatae, lanceolatae, subtus dense piloso-paleaceae, pinnulis approximatis oblongo-linearibus, nervillis inconspicuis, stipite tenacissimo, rachidibusque rufo-fuscis. Herbae saxicolae, rupicolae americanae praesertim, et australianae. Species duae in Europa australi, ac in Italia crescunt, una in agro ligustico.

N. Marantae R. Br.

Frondibus ambitu late lanceolatis, bipinnatis, pinnis oblongo-lanceolatis, breviter acuminatis, pinnulis linearibus subfalcatis obtusiusculis, sessilibus, coadunatis, rachidique adnatis, vel inferioribus petiolulatis, basi lobulatis, oppositis, alternisve, omnibus subtus densissime paleaceis; stipite, rachidibusque obsolete paleaceis, scabris, rufescentibus.

N. Marantae R. Br. Prodr. 1. K. Syn. ed. 2.ª p. 985. — *Acrostichum Marantae* All. Ped. 2. p. 288. Willd. Sp. 5. p. 121. Loisl. Gall. 2. p. 359.

Ic. Spreng. Anleit. 3. p. 81. t. 2. f. 18. ex Willd. l. c.

Exsicc. Desmaz. Crypt. de la Franc. 22. n. 1099!

Frequens inter saxa, ad rupes, ac in muris campestribus utrinsque Liguriae maritimae. Legi supra *Sestri*, *al Capo d'Arenzano*, in collibus Albinganensibus, et prope Segestam Tiguliorum.

Fruct. Maj. Jun.

Subtrib. 5.ª LEPTOGRAMMEAE.

Fée l. c. p. 25 et 178.

Sporothecia tot quot nervillae ad costam oblique currentia, oblongo-linearia, nuda.

Filices glabrae, aut piloso-glandulosae, frondibus simplicibus, aut varie divisis praeditae.

XI. ANOGRAMME.

Link Sp. fil. p. 137. Fée l. c. p. 183. *Gymnogramme* Desv. Journ. Bot. I. 25. Endl. Gen. 606. excl. sp.

Sporothecia crassa elliptica: sporangia superficialia laxe congesta, globosa: anulus angustus in planta nostra 18-20-articulatus, sed et 28-articulatus (Fée l. c.): sporae majusculae exacte trigonae, laeves nigrae.

Frondes tenerrimae, pellucidae, glabrae, tripinnatae, juniores flabellatae, segmentis bidentato-bifidis: stipes, rachisque primaria inferne fusco-rubelli. Herbae terrestres, rupicolae, arboricolae in America meridionali abunde crescentes: una, quae sequitur, europaea est, tum cosmopolita.

A. LEPTOPHYLLA Link.

Glaberrima: frondibus subdifformibus, aliis (junioribus) horizontalibus latioribus, brevioribusque bipinnatis, pinnulis flabellato-cuneatis, incisolobatis, aliis erectis longe stipitatis, pinnulis angustioribus, subrhombeo-ovatis, cuneatis, incisoque-lobatis.

A. leptophylla Link l. c. — *Grammitis leptophylla* Sw. Syn. fil. p. 3 et 218. Willd. Sp. 5. p. 143. Loisl. Gall. 2. p. 363. Bertol. Amaen. It. p. 426. Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 654. — *Gymnogramme leptophylla* Spr. Syst. 4. p. 40. — *Polypodium leptophyllum* L. Sp. 1553.

Ic. Gasparr. Osserv. sulla *Grammitis* t. 1.ª

Legi in herbidis collium Liguriae occiduae supra *Sestri*, et *al Capo d'Arenzano*. Accepi quoque ex promontorio portus Delphini a cl. De Notaris. Fruct. vere, et aestate.

Obs. Frons *sporangiastris*, seu sporangiis imperfectis huc illuc sparsa saepius occurrit.

Subtrib. 6.ª ASPLENIEAE.

Fée l. c. p. 25 et 185.

Sporothecia tot quot nervillae, elongata ad costam oblique currentia indusio laterali angusto tecta.

Filices multiformes, frondibus divisis, raro simplicibus, fere semper glabris.

XII. ATHYRIUM.

Roth. Tent. 3. p. 60. Fée l. c. p. 185.

Sporotheeia supra nervillam intumescentem sita, ovato-oblonga: indusium laterale, aut dorsale persistens; sporangia subrotunda: annulus latus 14-18 articulatus: sporae semiovatae, subreniformes laeves, aut (in A. Halleri ex stirpibus nostratibus) papillosae.

Frondes divisae, laciniis dentatis, nervillis liberis, marginem non attingentibus. Plantae sylvicolae terrestres, rupestres, regionum temperatarum utriusque terrarum orbis incolae, ac in Europa late crescentes. Ex septem circiter, quae in Europa enumerantur species, duae cum nonnullis varietatibus, ad Floram ligusticam pertinent.

Ath. Halleri Roth.

Frondibus ambitu lineari-lanceolatis, vel oblongo-lanceolatis, pinnatis, bipinnatis, pinnis inferioribus minimis distantibus deltoideis, superioribus ovatis; pinnulis subrotundo-ovatis, vel rhombeo-ovatis, cuneatis, petiolulatis; apice profunde dentatis, dentibus divaricatis, mucronatis; sporotheciis ovato-oblongis in unaquaque pinnula confluentibus; indusiis transverse ovalibus, integerrimis rectis, subcurvatisve; sporis subrotundis, hinc planiusculis, papilloso-echinatis.

Ath. Halleri Roth. Tent. 3. p. 60. — *Asplenium Halleri* R. Br. ex K. Syn. ed. 2.ª p. 982. α. et β. — *Aspidium Halleri* Willd. Sp. 5. p. 274. Loisl. Gall. 2. p. 365. — *A. fontanum* Willd. l. c. p. 272. Loisl. l. c.

Ic. Bolt. Fil. 38. t. 21.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 6. n. 504!

Legi in alpibus Liguriae occiduae ad rupes et muros campestres supra *Rezzo*, circa *Nava* et *alle Viosenne*, ubi frequens. Fruct. aestate.

Obs. Transitus ab *Ath. Halleri α. pedicularifolio* K. ad quod procul dubio spectat *Aspidium Halleri* Willd. in formam β. *angustatum* K. cum certissimo synonimo *Aspidii fontani* Willd. per plurimas formas intermedias, insensibiliter fit, eorumque limites statui tuto nequeunt, ideireo ne in varietates quidem speciem discindere existimavi.

Ath. filix foemina Roth.

Stipite basi paleaceo, superne, rachidibusque subglabris: frondibus

ambitu oblongo-lanceolatis, ovatisve, bipinnatis, pinnis oblongis acuminatis, basin, ac apicem versus sensim decrescentibus, pinnulisque oblongo-linearibus, acute serrato-serratis, subincisisve, decurrentibus; sporotheciis oblongis, vel subrotundis; indusio crenato-lacero.

Ath. filix foemina Roth. Tent. 3. p. 681. Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 663. DC. Fl. fr. 2. p. 556. — *Asplenium filix foemina* K. Syn. ed. 2.ª p. 981. — *Aspidium filix foemina* Willd. Sp. 5. p. 276. Loisl. Gall. 2. p. 367.

Ic. Bolt. Fil. 46. t. 25.

Exsicc. Desmaz. Crypt. de la Franc. 12. n. 597 ! Moug. et Nestl. Vog. rhen. 2. n. 105!

In sylvaticis umbrosis, humentibusque tam collium, quam montium editiorum frequens. Fruct. Maj. Jun. Jul. secundum loca.

Obs. Stirps maxime ludibunda tam statura, quam colore, frondis forma, pinnularumque divisionibus etc. Insigniores varietates, quae mihi in agro ligustico occurrerunt, sequentes sunt.

Ath. f. foemina α. verum Genn.

Major; intense virens: fronde late ovata, utrinque angustata, pinnulis ad basin usque pinnatipartitis, laciniis anguste oblongo-linearibus, vel linearibus, inferioribus ambitu incisodentatis, dentibus lanceolatis acutis, vel obtusiusculis, porrectis, pinnarum rachide inferne non alata: sporotheciis oblongis.

Ath. filix foemina Roth. l. c. p. 65. — *Ath. ovatum* Roth. l. c. p. 64.

Legi in sylvis montanis Liguriae occiduae supra *Nava* loco dicto *Cantalupo*, et in apennino genuensi supra *Voltaggio*.

Ath. f. foemina β. rigidulum Genn.

Statura mediocris; laete virens: frondibus ambitu oblongo-lanceolatis, pinnulis approximatis, pinnatifidis, lobis lanceolato-linearibus, infimis apice subinaequaliter bi-tridentatis, dentibus acutis, vel acuminulatis, superioribus integris; rachide pinnarum inferne non alata; sporotheciis subrotundis. — Tota planta punctis glandulaeformibus, paleisque plerumque sparsa observatur.

Frequens in alpibus maritimis, et in apennino. Legi in sylvis fagineis *di Rezzo*, in monte *Gallè* supra *Garessio*, et in montibus *alla Vittoria* supra Genuam. Accepi quoque ex apennino Liguriae orientalis supra *Borzonasca* ab egregio Caldesi.

Ath. f. foemina γ. molle Genn.

Minor, laete, vel pallide virens: frondibus ambitu exacte lanceolatis, pinnulis oblongis, obtusis, quam praecedentium latioribus, ac brevioribus rachide foliacea conjunctis, lobis parum productis, inferioribus apice bidentatis, vel interdum tridentatis, superioribus integris, dentibus subito acuminulatis, rectis, sporotheciis elliptico-oblongis. — Herba mollis stipite tenui, fragili.

Ath. molle Roth. l. c. p. 61. — *Aspidium irriguum* Smith Engl. fl. 4. p. 283?

Ic. *Polypodium dentatum* St. fl. h. l.

Occurrit in sylvaticis apennini gemensis *alle capanne di Marcarolo.*

Obs. Praeter varietates superius descriptas aliae quidem dantur formae, quae tam uni, quam alteri quidquam ablndunt. Omnes vero, illae saltem, quae mihi hactenus occurrerunt, unius vel alterius ex tribus allatis formis insignioribus faciem quam maxime praebent, ita ut unicuique *typo* facile sit eas referre. Cave attamen, ne eas pro distinctis speciebus habeas, uti quidam proposuerunt.

Usus. Rhizoma hujus stirpis eadem virtute praeditum videtur, qua *Aspidium filix mas* in helminthiasi, et praecipue contra taeniam pollet, uti infra videbimus.

XIII. ASPLENIUM.

L. Sp. 1538 et Auctor. exclus. sp. Fée l. c. p. 189.

Sporothecia linearia, elongata, ad latera nervillae specialis adnata: indusium tenue membranaceum, persistens, intus dehiscens: sporangia rotunda, vel ovoidea, parvula: annlus 18-22-articulatus: sporae ovoideae, subreniformes laeves, aut papillosae.

Frondes 1-2-3-pinnatae, glabrae, laciniis dentatis, nervillis liberis pinnatis, subparalellis. Herbae terrestres, rupicolae, saxicolae per universum terrarum orbem diffusae. Species duodecim ad floram europaeam spectant, quarum plures in Italia (10), paucae in Liguria (6) occurrunt.

A. Adiantum nigrum L.

Frondibus ambitu ovato-oblongis, vel triangulo-deltoides stipite glabro, nitidulo subaequilongis, bipinnatis, pinnis, pinnulisque acuminatis, una alteraque ex inferioribus basi pinnatipartita, reliquis pinnatifidis, lobis obtusiusculis, acuteque dentato-mucronulatis: sporotheciis oblongo-linearibus demum confluentibus.

A. adiantum nigrum L. Sp. 1541 ex parte. — *A. adiantum nigrum* β. *vulgare* Guss. Syn. 2. p. 2. p. 2.ª p. 662.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 1. n. 9!

In sylvaticis Liguriae orientalis supra portum Delphini, et circa *Varese* frequens. Fruct. vere, et aestate.

Obs. Diu multumque haesi, utrum pro distinctis speciebus sequentes insignes formas haberem; ast cum omnes faciem communem quodammodo servent, nec specimina intermedia desint, quibus una in alteram transire videtur; illas uti varietates interim proponere operae pretium existimavi.

A. A. nigrum β. acutum Genn.

Frondibus ambitu subtriangulo-ovatis, stipite elato, ferrugineo-nitente, rigidoque dimidio brevioribus, acuminatis, tripinnatis, pinnis primariis, et secundariis longissime acuminatis, pinnulis profunde, acuteque dentatis, mucronatis, supremis confluentibus; sporotheciis linearibus, confluentibus, ac fere totum pinnulae dorsum occupantibus, sporis parvis, subpapillosis.

Asplenium acutum Bory apud Willd. Sp. 5. p. 317. Poll. Veron. 3. p. 288. — *A. virgilii* Bory Exped. Mor. 3. p. 289. Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 662.

Ic. Poll. l. c. t. 2. f. 2.

In Liguria occidua *al Capo d'Arenzano* ad rupes, et muros.

A. A. nigrum γ. sublanceolatum Genn.

Bi-quatuor-pollicare: frondibus ambitu oblongo-lanceolatis, acutis, vel obtusiusculis, bipinnatis stipitem aequantibus, longioribusve, pinnulis ovatis obtusissimis, basi breviter cuneatis, infimis in pinnis inferioribus lobatis, pinnatifidisque, dentatis, dentibus obtusiusculis mucronatis, sporotheciis oblongo-ellipticis confluentibus.

A. adiantum nigrum δ. Bertol. Amaen. It. p. 430 ex parte.

Ad rupes calcareas montium prope *Voltri*, et in collibus supra Feritorem ad S.^m^ Eusebium.

A. A. nigrum δ. virens Genn.

Bipollicare, vix longior: differt praeterea a varietate γ. praecedenti, stipitibus, rachidibusque viridibus, fronde oblongo-lanceolata angustiore longe acuminata, pinnulis parcius dentatis, sporotheciis maxime confluentibus, pinnularumque marginem demum subexcedentibus.

Ad rupes calcareas montium inter *Ormea*, et *Nava*, ac in monte *della Guardia* prope Genuam.

A. A. NIGRUM ε. CUNEIFOLIUM Guss.

Frondibus ambitu triangularibus, vel triangulo-ovatis, obtusis, stipite gracili, elongato dimidio, vel tertio brevioribus, bi-tripinnatis, pinnis secundariis, pinnulisque obovato-longe cuneatis apice rotundato, truncatove obtuse dentatis, distantibus, sporotheciis linearibus elongatis demum confluentibus.

A. adiantum nigrum α. cuneifolium Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 662. — *A. adiantum nigrum δ.* Bertol. Amaen. It. p. 438 (ex loco). — *A. cuneifolium* Viv. Fl. it. fragm. fasc. 1. p. 16!

Ic. Viv. l. c. t. 18.

In monte *Ramazzo* supra *Sestri di Ponente*, ubi cel. Vivianus legit, inter saxa, locis aridis apertis, et in Apennino gennensi *alle capanne di Marcarolo*.

A. Ruta muraria L.

Frondibus ambitu triangulari-ovatis bi-tripinnatis (rarius simpliciter pinnatis), pinnulis obovato-cuneatis, subrotundis, aut deltoideis, integris, lobatisve, antice crenato-denticulatis, sporotheciis oblongo-linearibus confluentibus, ac totam pinnulae inferiorem paginam demum tegentibus, indusio margine lacero-fimbriato.

A. Ruta muraria L. Sp. 1541. Willd. Sp. 5. p. 341. Loisl. Gall. 2. p. 362. K. Syn. ed. 2.ª p. 983.

Ic. Fl. Dan t. 190.

Exsicc. Desmaz. Crypt. de la Franc. 8. n. 396! Moug. et Nestl. Vog. rhen. 3. n. 207!

Ad muros, et saxa in universa Liguria frequens. Fruct. a vere ad totam aestatem.

Obs. Stirps valde ludibunda. Sequentes varietates ad floram nostram spectantes, utpote quae insigniores sunt, propono.

A. R. muraria α. commune Genn.

Fronde bi-tripinnata, pinnulis inferioribus praesertim in frondibus sterilibus subrotundatis, superioribus ovato-deltoideis supra medium cartilagineo-denticulatis, dentibus passim mucronulatis; sporotheciis totam pinnulae inferiorem paginam demum occupantibus.

A. Matthioli Gasparr. Notiz. di alcune piante della Lucan. ! Gr.ss. Syn. 2. p. 2.ª p. 663.

Ad muros urbanos, et campestres, ac ad rupes calcareas a regione maritima ad apennini, alpiumque maritimarum jugum adscendens.

A. R. muraria β. latifolium Genn.

Fronde simpliciter pinnata, vel bipinnata, pinnulis infimis pinnarum inferiorum ternato-pinnatifidis, laciniis, pinnulisque latis, subrotundis, obovatis, vel obovato-deltoideis, basi breviter cuneatis, obtuse dentatis, crenatisve, sporotheciis paucis fere semper discretis.

In Liguria transapennina supra *Voltaggio*, ad montes *della Guardia* supra Genuam, et in Liguria occidua *al monte Gallè*.

A. R. muraria γ. lacinulatum Genn.

Fronde bipinnata, pinnis ambitu deltoideis, longe cuneatis, trifidis, laciniis lincaribus, obtusis, integerrimis, interdum coalitis; sporotheciis demum confluentibus, ac fere totam pinnulae inferiorem paginam tegentibus.

In Liguria transapennina *a Busalla* ad muros inter muscos.

Usus. Ob principium adstringens, quod *A. Rutam murariam*, uti omnes Filicum species, intrat, veteres Medici interdum ejusdem frondes contra affectus catarrhales adhibuerunt: at nunc apud nos prorsus obsoletae.

A. germanicum Weiss.

Frondibus ambitu lanceolatis, sparsim, remoteque pinnatis, stipitibus canaliculato-subcompressis fuscis subdimidio brevioribus, pinnis oblongo-cuneatis, petiolulatis, apice dentatis, una alteraque inferiori bifida, sporotheciis lincaribus elongatis, indusiis margine integerrimis.

A. germanicum Weiss. Crypt. 299. Willd. Sp. 5. p. 330. — *A. alternifolium* Wulf. in Jacq. Misc. 2. p. 51. — *A. Breynii* Retz. Obs. 1. p. 32. K. Syn. ed. 2.ª p. 983.

Ic. Breyn. Exot. etc. Cent. 1.ª p. 189. t. 97.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 2. n. 106 !

Rara civis Liguriae. Ipse legi supra *i molini di Voltaggio:* accepi a cl. Eq. De Notaris ex montibus retro *la Guardia* loco dicto *Lago-scuro* ubi legit A. Chiappori. Fruct. Maj. Jun.

Obs. Pinnae inferiores caeteris altius bifidae, nunquam vero bitripartito-pinnatifidae, nec longiores, veluti passim in planta germanica, et insubrica observantur.

A. glandulosum Loisl.

Frondibus ambitu lanceolatis, obtusis, pinnatis, pinnis oblongo-ovatis, obtusis, profunde lobatis, basi pinnatifidis, remotiusculis, petiolulatis; stipitibus cylindraceis, rachidibusque fusco-splendentibus, subpubescenti-glandulosis, sporotheciis rotundato-ovatis demum confluentibus, totamque pinnulae inferiorem paginam occupantibus; indusiis evanidis.

A. glandulosum Loisl. Gall. 2. p. 362. — *A. vallisclausae* Req. in Descr. de Vaclus. ed. 2.ª p. 240. — *Polypodium Petrarchae* Guer. Descr. de Vaucl. ex Loisl. l. c.

Obtinui ex viciniis *di Mentone* a cl. De Notaris. Vidi quoque specimen ex comitatu nicaeensi in herbario cel. Viviani.

Fruct. vere, et aestate.

A. Trichomanes L.

Frondibus ambitu lincaribus, vel lanceolato-lincaribus, pinnatis, pinnis subrotundo-ovatis, subaequaliter crenatis, basi cuneatis, stipite glabro, rachideque angustissime scarioso-marginatis, fuscis, splendentibus; sporotheciis ovalibus confluentibus demum totam paginam inferiorem pinnulae obtegentibus, indusiis integris.

A. Trichomanes L. Sp. 1540. K. Syn. ed. 2.ª p. 982. Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 661. Bertol. Amaen. it. p. 429. — *A. trichomanoides* All. Ped. 2. p. 284.

Ic. Fuchs. Hist. 796.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 2. n. 107!

Ad muros rupesque in locis umbrosis urbanis, et campestribus vulgatissimum. Fruct. hyem. et vere.

A. viride Huds.

Frondibus ambitu lincaribus, vel lanceolato-lincaribus, pinnatis, pinnis rhombeo-subrotundis, infimis reniformibus, crenatis, stipite pilis articulatis adsperso (ima basi tantum fusco-splendente), rachide nuda; sporotheciis ovato-oblongis, confluentibus; indusiis integris.

A. viride Huds. Angl. ed. 2.ª p. 453. K. Syn. ed. 2.ª p. 982. Loisl. Gall. 2. p. 362. — *A. Trichomanes umbrosum* Vill. Dauph. 3. p. 853.

Ic. Bolt. Fil. 24. t. 14.

Exsicc. Desmaz. Crypt. de la Franc. 22. n. 1096! Moug. et Nestl. Vog. rhen. 4. n. 305!

In alpibus maritimis supra *Rezzo*, et in sylvaticis umbrosis *ai ponti di Nava*. Fruct. aestate.

XIV. CETERACH

Willd. Sp. 5. p. 136. Fée l. c. p. 205. — *Gymnogramme* Desv. Journ. bot. 1. 25. Endl. Gen. p. 59. excl. sp.

Sporotheccia linearia: indusium (ex Fée) tenue angustum, lateri exteriori nervillarum adhaerens: sporangia breviter stipitata: annulus 22-24 articulatus: sporae majusculae ovoideae papillosae.

Frons coriacea, pinnatifida, in quibusdam exoticis bi-tripinnatifida. segmentis obtusis, subtus, stipitesque rigidi dense palcacei, nervillis pone marginem anastomosantibus vix conspicuis. Plantae parietinae, ac rupestres inter continentem africanum, et Europam distributae. Unica, cum infradescripta varietate floram ligusticam intrat.

C. officinarum Willd.

Frondibus lineari-lanceolatis, pinnatifidis, laciniis alternis ovato-oblongis, apice rotundatis, dorso dense paleaceis, paleis ovato-lanceolatis, acuminatis, margine denticulatis, areolatis, areolis subrotundis; stipitibus, rachidibusque palcaceis.

C. officinarum Willd. l. c. Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 653. — *Grammitis Ceterach* K. Syn. ed. 2.ª p. 974. — *Gymnogramme Ceterach* Spr. Syst. 4. p. 38. — *Asplenium Ceterach* L. Sp. 1538. All. Ped. 2. p. 284.

Ic. Bolt. Fil. t. 12.

Exsicc. Desmaz. Crypt. de la Franc. 12. n. 596! Moug. et Nestl. Vog. rhen. 5. n. 401!

In muris urbanis, et campestribus frequentissima. Fruct. autumno, et hyeme.

Obs. Planta sicula, cujus specimen praestat in hoc Archigymnasii genuensis herbario a cl. Todaro missum palcas praebet, ut nostra, denticulatas, nec integerrimas, uti tradunt Gussone, et Willdenov ll. cc., quae postrema forma mihi adhuc in Liguria non obvenit. — Forma ligustica memoratu digna sequens potius videtur.

C. officinarum β. lobatum Genn.

Major: frondis laciniis productis inaequaliter crenato-lobatis.

Ex valle Feritoris l. d. *la Doria* obtinui a cl. De Notaris: in muris campestribus apennini genuensis prope *Carosio* legi ipse.

Usus. Laudata fuit herba in profluviis mucosis, praesertim in catarrho vesicali: nunc prorsus neglecta.

Subtrib. VII. SCOLOPENDRIEAE.

Fée l. c. p. 26 et 209.

Sporothecia tot quot nervillae, elongata, indusiis oppositis nervillas duas sejunctas occupantibus donata.

Filices frondibus saepius simplicibus, cordatis, vel sagittatis, ac indusio duplici ab aliis omnibus facile dignoscendae.

XV. SCOLOPENDRIUM.

Sm. Tent. bot. de Fil. gen. dorsif. in Act. Ac. Taur. 5. p. 40. Endl. Gen. p. 62. Fée l. c. p. 209.

Sporothecia linearia subopposita supra venulas binas, seu supra alterutriusque nervillae ramulum proximum sita, binatim confluentia, ac sporothecium aspectu unicum indusio veluti duplici tectum efficientia: indusium proprium persistens indusio proximo margine libero contiguum, dein disjunctum: sporangia ovoidea pedicello praelongo suffulta: anulus 20-22 articulatus: sporae subrotundae, vel reniformi-ovoideae, rugulosae.

Frondes coriaceae, simplices, lanceolatae, rarius (in sp. exoticis) pinnatae, basi cordato-auriculatae, nervillis liberis simpliciter, vel repetito-bifurcatis, marginem non attingentibus praeditae. Herbae terrestres, rupestres in locis umbrosis, humidis praesertim habitantes. Europeae species tres sunt, italicae binae, ligustica unica; reliquae in continenti americano, et asiatico occurrunt.

S. officinarum Sw.

Frondibus late lanceolatis, vel oblongo-lanceolatis, basi, profunde aequaliter, vel oblique cordatis: stipitibus, praesertim ad basim, rachidibusque piloso-paleaceis.

S. officinarum Sw. Syn. fil. p. 89. Willd. Sp. 5. p. 348. Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 625. — *Asplenium scolopendrium* L. Sp. 1537. All. Ped. 2. p. 284.

Ic. Bolt. Fil. 18. t. 11. — Sm. l. c. t. 9. f. 2. (fragm.).

Exsicc. Desmaz. Crypt. de la Franc. 12. n. 598! Moug. et Nestl. Vog. rhen. 2. n. 108!

In umbrosis, humentibus, secus rivulos, ad puteos, ac fontes frequens. Legi prope torrentem *Sturla*, et supra *Sestri di Ponente ai Molinacci*. Fruct. vere.

Obs. Nervus medius interdum infra apicem in duos dividitur, et tunc frons apice inaequaliter bifida, ac veluti auriculata evadit: monstrositas

haec non infrequens occurrit in collibus supra Feritorem, praesertim prope *Molassana*.

Usus. Sub nomine *Linguae cervinae* decantatum fuit olim *Scolopendrium* uti remedium lithontriticum, atque ad profluvia cohibenda maxime idoneum.

Subtrib. XI.ª POLYPODIEAE.

Fée l. c. p. 27 et 229. Lindl. the Veg. Kingd. p. 79. excl. gen.

Sporotheccia tot quot nervillae ovoidea, aut subrotunda prope marginem, vel disco piunularum, receptaculo nervillari, saepius colorato, glandulaeformi insidentia: indusium nullum.

Filices multiformes herbaceae, raro (tropicales) arborescentes.

XVI. POLYPODIUM.

L. Gen. 1179. excl. sp. Endl. Gen. p. 60. excl. sp. Fée l. c. p. 234.

Sporotheccia rotunda, vel ovoidea ad apicem ramuli primarii, aut secundarii nervillarum superioris, tunc dilatatum, atque translucidum sita: sporangia globosa, pedicello longo praedita: anulus 10-12 articulatus: sporae ovoideae, reniformes, senio nigrescentes.

Frondes pinnatifidae, rarissime (in stirpibus exoticis) pinnatae, laciniis lato-lincaribus obtusis, nervillarum ramis simplicibus, furcatisve longe ante marginem desinentibus, apice dilatatis saepe translucidis. Plantae praesertim arboricolae, tropicales. Tres tantum species in Europa, ac in Italia vigent, una, quae et cosmopolita est, in Liguria late crescit.

P. VULGARE L.

Frondibus ambitu lanceolatis, pinnatipartitis, longe acuminatis, stipiteque glaberrimis, laciniis alternis, lanceolato-lincaribus, obtusiusculis, acutisve, integris, vel sursum repando-denticulatis, sporotheciis maximis, biserialibus numerosis.

P. vulgare L. Sp. 1544. All. Ped. 2. p. 285. Willd. Sp. 5. p. 173. *a.* Loisl. Gall. 2. p. 363. *a.* Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 655. *a.*

Ic. Bull. Herb. t. 191.

Exsicc. Desmaz. Crypt. de la Franc. 20. n. 999! Moug. et Nestl. Vog. rhen. 2. n. 103!

In sylvaticis ad pedes arborum, ad muros campestres frequens. Legi in collibus supra Feritorem *a Serino*, *all'Olmo*, etc.

Fruct. hyeme, ac vere.

P. VULGARE β. SERRATUM Willd. Sp. 5. p. 173.

Major: frondium latiorum laciniis acuminatis profunde sinuato-lobatis.

Ic. *P. majus serrato-folio* Barrel. Ic. tab. 38.

Repertum est in Liguria occidua *al castello d'Andora*, unde obtinui a cl. Eq. De Notaris.

XVII. PHEGOPTERIS.

Fée l. c. p. 242.

Sporotheeia rotundata, aut ovoidea in medio dorso utriusque nervillarum ramuli sita: pars nervillarum proligera nec dilatata, nec translucida: sporangia globosa, vel ovoidea: annulus (in *P. oreopteride*) etiam 14-articulatus: sporae ut in *Polypodio*.

Filices potius tenerae, licet statura grandes frondibus bi-tripinnato-pinnatifidis, sporotheciis semper parvulis donatae. Plantae terrestres, ac rupicolae Americae australis praesertim incolae. Species quatuor in Europa, totidem in Italia, ac in Liguria occurrunt.

Ph. polypodioides Fée.

Frondibus ambitu subtriangulo-ovatis longe acuminatis, utrinque in nervis, venis, margineque subreflexo sparse setosis, pinnatis, pinnis pinnatifidis, vel pinnatipartitis, duabus infimis deflexis, pinnulis oblongo-linearibus obtusis, obsolete crenatis, pari infimo pinnularum (infimis pinnis exceptis) rachidi primariae connatis, figuramque quadrangulam cum eodem pari lateris oppositi efformantibus; sporotheciis rotundatis prope marginem seriatis, distinctis; rhizomate abbreviato hinc fibris radicalibus tortuosis ramosissimis praedito.

Ph. polypodioides Fée l. c. p. 243. — *Polypodium Phegopteris* L. Sp. 1550. Willd. Sp. 5. p. 199. Loisl. Gall. 2. p. 364. K. Syn. ed. 2.ª p. 974.

Ic. Schkur. Crypt. t. 20.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 2. n. 104!

Rara in Liguria. In sylvis umbrosis apenninii Liguriae orientalis *al Gottro* mihi hactenus tantum occurrit. Fruct. Jun. Jul.

Ph. oreopteris Fée.

Frondibus ambitu lato-lanceolatis, subtus resinoso-glandulosis, pinnatis, pinnis infimis minimis subtriangulis, distantibus, mediis elongatis oblongo-lanceolatis, acuminatis, pinnatipartitis, laciniis oblongis, obtusis, repandis,

sub vitro ciliolatis: sporotheciis rotundatis ad marginem seriatis discretis: rhizomate caespitoso fibris radicalibus numerosis flexuosis dense glomeratis vestito.

Ph. oreopteris Fée l. c. p. 243. — *Polypodium oreopteris* Ehrh. Crypt. n. 22. — *P. pterioides* Vill. Dauph. 3. p. 841. — *P. limbospermum* All. Anct. p. 49. — *Polystichum oreopteris* DC. et Duby Bot. gall. 1. p. 538. K. Syn. ed. 2.ª p. 978. — *Aspidium oreopteris* Sw. Syn. fil. 50. Willd. Sp. 5. p. 247. Loisl. Gall. 2. p. 366.

Ic. Bolt. Fil. 40. t. 22. f. 1. 2.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 1. n. 6!

Et haec quidem apud nos rara. Legi in sylvis castaneis Apennini genuensis inter *Voltaggio*, et *Fiaccone*. Fruct. aestate.

Ph. Dryopteris Fée.

Frondibus ternato-bipinnatis, vel tripinnatis, inclinatis, glabris, vel ad divisiones puberulis, pinnis secundariis pinnatifidis, aut pinnatipartitis, laciniis obtusis, majoribus repando-sublobulatis, minoribus apice tantum dentatis; stipite basi parce paleaceo; sporotheciis semper disjunctis.

Ph. dryopteris Fée l. c. p. 243. — *Polypodium dryopteris* L. Sp. 1555. Willd. Sp. 5. p. 209. Loisl. Gall. 2. p. 364. K. Syn. ed. 2.ª p. 974.

Ic. Bolt. Fil. 52. t. 28.

Exsicc. Moug. et Nestl. l. c. 3. n. 205!

In alpibus maritimis *alle Viosenne* supra *Nava* locis umbrosis ad rupes, ac inter saxa haud infrequens. Fruct. aestate.

Ph. calcarea Fée.

Frondibus ambitu deltoideis ternato-bipinnatis rectis una cum stipite rigidulo, ac basi paleaceo glanduloso-pubescentibus; pinnulis infimis pinnatipartitis, laciniis crenatis, superioribus integris obtusis, retusisve: sporotheciis biserialibus submarginalibus demum confluentibus.

Ph. calcarea Fée l. c. p. 243. — *Polypodium Robertianum* Hoffm. D. fl. crypt. in add. p. 10 ex K. Syn. ed. 2.ª p. 974. — *P. calcareum* Sm. Brit. 3. p. 1117. Willd. Sp. 5. p. 210. Loisl. Gall. 2. p. 364.

Ic. Bolt. Fil. 53. t. 1.

Exsicc. Desmaz. Crypt. de la Franc. 20. n. 1000! Moug. et Nestl. Vog. rhen. 6. n. 503!

Ad radices montis *Bertrand*, et ad rupes calcareas montium supra *Nava* non infrequens. Fruct. aestate.

Subtrib. XII. CYCLODIEAE.

Fée l. c. p. 27 et 277.

Sporothecia tot, quot nervillae, rotundata, aut ellipsoidea, indusio supero peltato, seu centro affixo, ambitu libero tecta.

Filices robustae, frondibus simplicibus, aut parum divisis, lobis apice passim spinulosis, saepius dense paleaceis.

XVIII. POLYSTICHUM.

Roth. Tent. 3. p. 69. emend. Fée l. c. p. 277. — *Aspidium* Sw. Syn. 51. excl. sp. Endl. Gen. p. 62. excl. sp.

Sporothecia orbicularia inter marginem, et costam pinnularum seriata nervillarum ramulo superiori parte prolifera turgidulo insidentia: indusium puncto centrali, vel (in *P. spinuloso*) ferme eccentrico, ac fere marginali, atque in stipitulum angustato affixum: sporangia longe pedicellata: annulus 14-20 articulatus: sporae ovoideae saepe papillatae.

Frondes pinnatae, vel pinnato-bi-tripinnatifidae, segmentis mucronato-aristulatis, nervillarum ramulis evidenter excurrentibus: stipites rigidi, saepius dense squamati: rhizoma crassum. Plantae terrestres, sylvicolae, cosmopolitae. Species quatuor in Europa, ac in Italia, pariterque in Liguria crescunt.

P. Lonchitis Roth.

Frondibus ambitu elongato-lanceolatis, simpliciter pinnatis, pinnis approximatis, oblongo-lanceolatis, falcatis, basi oblique cuneatis hinc superne auriculatis, margine duplicato-serratis, dentibus majoribus apice spinulosis: stipitibus, rachidibusque dense paleaceis.

P. Lonchitis Roth. Tent. 3. p. 71. DC. et Duby Gall. 1. p. 537. — *Aspidium Lonchitis* Sw. Syn. 43. Willd. Sp. 5. p. 224. Loisl. Gall. 2. p. 364. K. Syn. ed. 2.ª p. 976. Bertol. Amaen. It. p. 427. — *Polypodium Lonchitis* L. Sp. 1548. All. Ped. p. 285.

Ic. Fl. Dan. t. 497.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 4. n. 304!

Ad oras sylvarum apennini *al Gottro*, *al monte Gallè*, et in sylvis laricinis alpium maritimarum ad radices montis *Bertraud* supra *Lupega*. Fruct. aestate.

P. aculeatum Roth.

Frondibus ambitu lato-lanceolatis, bipinnatis, pinnis inferioribus sensim

decrescentibus, infimis minimis, subtriangulo-ovatis, reliquis oblongo-lanceolatis acutis, aut acuminatis, pinnulis oblique ovato-oblongis, cuneatis, hinc sursum angulato-auriculatis, inaequaliter dentatis, dentibus saepius alternatim majoribus, apice spinulosis in pedicellum angustatis, supremis sessilibus, confluentibus, infima superiori rachidi primariae accumbente, caeteris majore: sporotheciis pone costam pinnularum in serie longitudinali digestis, demum confluentibus, ac fere totam paginam tegentibus; indusio margine dentato-lacero; sporis ovoideis fortiter papillosis.

P. aculeatum Roth. Tent. 3. p. 79. DC. et Duby Bot. gall. 1. p. 537. — *Aspidium aculeatum* K. Syn. ed. 2.ª p. 976. — *Polypodium aculeatum* L. Sp. 1552.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 3. n. 206 !

In sylvis montanis Liguriae occiduae supra Albingaunum. Fruct. aestate.

P. aculeatum β. lobatum Genn.

Minor: pari infimo pinnularum in pinnis inferioribus, ac interdum in mediis quoque disjunctis, subpetiolulatis, reliquis confluentibus, pinnis superioribus omnino simplicibus, lobatoque-dentatis. Reliqua ut in specie.

P. Plukenetii DC. et Duby Bot. gall. 1. p. 538. Loisl. Gall. 2. p. 365.

Ic. *Filix aculeata Lonchitidis aemula nostras.* Plukenet. Phyt. t. 180. f. 3.

In apennino Liguriae mediae supra *il borgo de' Fornari.*

Obs. In memorata statione plantam tam sterilem, quo casu *P. Lonchitidem*, juxta diagnosim Plukenetianam, aemulatur, quam late fructificantem legi, et tunc *A. aculeato vero* magis appropinquat. Hae autem binae formae, utpotequae ab aetate dependent, in eodem caespite saepe observantur.

Caeterum puto ad varietatem hic descriptam spectare, saltem ex parte, *A. lobatum* Sw. et Auctorum; quod tamen defectu speciminum authenticorum affirmare tuto nescio.

P. hastulatum Genn.

Frondibus oblongo-lanceolatis, bipinnatis, stipitibus, rachidibusque primariis, et secundariis densissime palcaceo-pilosis, pinnis oblongo-linearibus acuminatis, inferioribus parum brevioribus, pinnulis oblongo-ovatis, hinc sursum auriculatis, infima superiori caeteris sublongiori, basi pinnatifida, subaequaliter spinuloso-dentatis omnibus, petiolulatis, petiolo gracili non decurrente; sporotheciis demum confluentibus, ac fere totam

pinnulae inferiorem paginam tegentibus; sporis ovoideis, minute papillosis.

A. hastulatum Ten. Fl. nap. 5. p. 304! — *Aspidium aculeatum* Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 664 ex parte. — *A. aculeatum* β. *Swartzianum* K. Syn. ed. 2.ª p. 976.

Ic. Ten. l. c. t. 232.

In sylvis montium orientalis Liguriae ad promontorium portus Delphini, in apennino centrali *alla Vittoria*, et in montibus supra Albingaunum. Fruct. vere, et aestate.

Obs. Verum hoc est *Aspidium hastulatum* Ten. juxta specimen autopticum, quod mihi prae oculis est; nec ullo modo confundendum cum *Polypodio aculeato* L. (*A. aculeato* K. l. c.) cum *Polystichum hastulatum* frondes habeat tenues, molles, rachide hirsutissima, paleis nempe attenuatis per totam ejus longitudinem stipatis praedita, ambitu oblongo-lanceolatas basi parum angustiores, pinnulis subaequalibus, lobulatis, antice auriculatis, pedicello gracili, longiusculo minime decurrente fultis; dum contra *P. aculeatum* herbam sistit robustiorem, rigidam, frondibus basi valde angustatis, seu pinnis a medio frondis ad basim sensim magnitudine decrescentibus, infimis brevissimis praeditam, pinnulisque tantum inferioribus breviter pedicellatis; pedicello decurrente, pinnulis superioribus basi longe coalitis, etc.

A *Polysticho hastulato* nostro forte non diversum *Aspidium angulare* Kit. apud Willd. Sp. 5. p. 257; ast illustr. Bory de S.ⁿᵗ Vincent, qui utriusque plantae specimina authentica possedit, earundem identitatem negat, uti apparet in scheda, qua plantam suam cl. Tenore comitatus est. Insuper et eas inter se diversas esse arbitrari videtur cl. Fée l. c. p. 278 dummodo *A. angulare* Kit. idem sit ac *Polystichum angulare* Presl. quod mihi non clare patet. Interim in tanta incertitudine synoninorum, et pro auctoritate clarissimorum Virorum, qui contra sentiunt, cum plantam de qua sermo est a *P. aculeato* K. (id quod magis intererat) penitus distinxerim, quaestionem circa synonimum Kitabelianum ad authoptas remandare pro meliori studio existimavi.

P. spinulosum β. dilatatum K.

Frondibus ambitu late ovatis, bipinnatis, pari infimo pinnarum primariarum tantum caeteris breviore, pinnulis pinnatipartitis, laciniis oblongo-linearibus obtusis, simpliciter, dupliciterque dentatis, dentibus cuspidato-spinulosis, laciniis superioribus confluentibus: sporotheciis paucis,

subbiseriatis semper disjunctis, sporis ovatis, laevibus, indusio demum contracto, oculo nudo vix conspicuo; stipite, rachide, costaque pinnarum subtus paleaceis, subnudisve.

P. spinulosum β. *dilatatum* K. Syn. ed. 2.ª p. 979. — *P. spinulosum* DC. Fl. gall. 2. p. 561 ex parte. — *Aspidium dilatatum* Willd. Sp. 5. p. 263. — *Lastrea dilatata* Presl. Pterid. p. 77. — *Nephrodium spinulosum* Stremp. Fil. berol. 30 ex parte.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 5. n. 403!

In alpibus maritimis ad radices montis *Bertrand* prope *Lupegu*, et in sylvis umbrosis apennini Liguriae orientalis *al Gottro*. Fruct. aestate.

Obs. In speciminibus nostris glandulae pedicellatae, quae interdum indusia juniora coronant omnino desunt. Caeterum indusium nec reapse centro affixum, uti in reliquis gentis, nec sinu affixum ut in *Aspidio*: evidenter autem pone basim angustior fit, ac in distinctum pedicellum transit, ideoque planta melius *Polystichum*, quam *Aspidium* refert.

Subtrib. XIII. ASPIDIEAE.

Fée l. c. p. 28. et 299.

Sporotheca tot quot nervillae ad costam oblique currentia, rotundata, aut ellipsoidea, indusio supero in ambitu libero, reniformi, planiusculo, sinu affixo, subsessili tecta.

Filices grandes, vel mediocres, varie divisae, fere semper monotaxicae, flexibiles, nervillis apud nos liberis, sed et conniventibus, aut anastomosantibus donatae.

XIX. ASPIDIUM.

Sw. Syn. fil. p. 51. emend. Endl. Gen. p. 62. excl. sp. Fée l. c. p. 291. excl. sp.

Sporotheca subrotunda in dorso, rarissime in apice nervillarum sita: indusium planum, reniforme sinu, vel pone sinum adhaerens: sporangia rotundata, vel ovoidea annulus in stirpibus nostratibus 18-20-articulatus, in nonnullis exoticis etiam 30-articulatus: sporae subrotundae, reniformi-ovoideae, vel irregulariter angulosae, muricatae.

Frondes pinnatae, vel bi-tripinnatae, pinnis, pinnulisque lobato-pinnatifidis, laciniis saepius muticis, nervillis liberis praeditae, nudae, vel plus minus dense squamigerae. Terrestres, cosmopolitae. Una, ac altera ex stirpibus europaeis nondum in agro ligustico repertae sunt, quas easdem suspicor delitescere in editis sylvis alpium maritimarum. Pedemontio et provincia conterminis.

A. Filix mas Sw.

Frondibus ambitu elliptico-oblongis, acuminatis, subbipinnatis, pinnis oblongo-lanceolatis, pinnulis binis infimis sejunctis, reliquis basi confluentibus, subtus nervis, margineque piloso-paleaceis, glabratisve, superne, vel apice tantum obtuso, subtruncatove appresse denticulatis, dentibus muticis: sporotheciis biserialibus pinnulae inferiorem paginam ultra medium occupantibus, indusiis reniformibus ambitu crispatis; stipite brevi, rachideque primaria, et secundariis paleaceis.

A. Filix mas Sw. Syn. fil. p. 55. Willd. Sp. 5. p. 259. Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 665. — *Polystichum filix mas* Roth. Tent. 3. p. 82. K. Syn. ed. 2.ª p. 978. — *Polypodium filix mas* L. Sp. 1551.

Ic. Ten. in *Atti dell'Istit. d'incoragg. di Napoli* t. 1. f. 1.

Exsicc. Desmaz. Crypt. de la Franc. 17. n. 848! Moug. et Nestl. Vog. rhen. 1. n. 7!

In sylvaticis montanis universae Liguriae frequens. Legi in montibus *di Lerca* supra *Arenzano*, in Apennino *alla Vittoria* et in alpibus maritimis *alle Viosenne*. Fruct. Maj. Jun.

Obs. Insignis forma *A. F. maris* est sequens, quam tamen pro distincta specie minime restituendam esse puto, cum plurimae occurrant formae intermediae quibus illa in typum speciei manifeste transitum facit.

A. F. mas β. carthusianum Genn.

Pinnulis pinnatifido-lobatis, lobis subfalcatis integris, vel bidentatis, plurimis inferioribus disjunctis, superioribus ima basi confluentibus.

A. Filix mas β. Loisl. Gall. 2. p. 366. — *Polypodium chartusianum* Vill. Dauph. 3. p. 842.

Ex sylvis apennini mecum communicavit cl. De Notaris.

Usus. Rhizoma Filicis maris magno in pretio fere semper fuit in curatione helmintiasis, ac contra taeniam. Intrat specificum Nufferianum, cujus efficaciam praesertim adversus *Botriocephalum latum* numerosa experimenta testantur. Alicubi adhibita insuper est in conficienda cerevisia.

A. rigidum Sw.

Frondibus ambitu oblongo-lanceolatis, bipinnatis, pinnis oblongo-lanceolatis, obtusiusculis, pinnulis oblongo lincaribus, sublobulatis, lobis obtusis, dentato-mucronulatis: sporotheciis biserialibus inferiorem pinnulae

paginam ultra medium, vel per totam longitudinem occupantibus: stipite, rachide, costisque pinnarum paleaceis. Tota herba subtus, et interdum utrinque glandulosa.

A. rigidum Sw. Syn. fil. 53. Willd. Sp. 5. p. 265. Loisl. Gall. 2. p. 367. Bertol. Amaen. It. p. 428. Ten. *in Atti dell'Ist. d'incoragg. di Nap.* 5. p. 144. α. et β. — *A. pallidum* Bory Exp. Mor. 3. p. 287 ex Ten. sched. ! — *Polystichum rigidum* DC. Fl. fr. 2. p. 560. K. Syn. ed. 2.ª p. 979.

Ic. Ten. l. c. t. 2.

In sylvaticis alpium maritimarum ad radices montis *Bertrand*, et in alpe *di Cantalupo* supra *Nava* haud frequens. Fruct. a Jul. in Sept.

XX. CYSTOPTERIS.

Bernh. in Schrad. Journ. 1806. p. 49. Endl. Gen. p. 62. Fée l. c. p. 299.

Sporotheca subrotunda in serie simplici ad lacinias pinnularum supra nervillae ramulo superiori disposita: indusium tenue, fornicatum, striato-lacerum, basi rotundata affixum: sporangia subrotunda: anulus 14-articulatus: sporae ovales, semiovales, subreniformes, in specie nostrate muricatae.

Frondes decompositae, apud nos bipinnatae, tenerae, facile marcescentes, nervillis liberis praeditae, glabriusculae. Herbae rupicolae, ac in locis humidis praesertim vigentes, cosmopolitae. Species europaeae simul ac italicae tres sunt, una tantum ligustica.

C. fragilis β. pinnatipartita K.

Frondibus ambitu lanceolatis, bipinnatis, pinnis ovato-lanceolatis, infimis duabus quam proxime sequentes brevioribus, pinnulis lobato-pinnatifidis, vel pinnatipartitis, laciniis obtuse, vel acutiuscule apice dentatis, truncatisve: stipite juniori parce paleaceo, demum glabro: sporotheciis numerosis subseriatis, rotundatis, indusio acuminato, margine ciliato, nudove.

C. fragilis β. *pinnatipartita* K. Syn. ed. 2.ª p. 980. — *Cyathea fragilis* Bertol. Amaen. It. p. 428. — *Aspidium fragile* Sw. Syn. 58. Willd. Sp. 5. p. 280. — *Cyathea anthriscifolia*, *C. cynapifolia*, *C. regia* Roth. Tent. 3. p. 94. 98. 96.

Ic. Bolt. Fil. 50. t. 27. et 46.

Exsicc. Moug. et Nestl. Vog. rhen. 5. n. 404 !

In sylvaticis umbrosis ad rupes alpium maritimarum *a Frontiero*,

Lupega, *Viosenne*, ad muros campestres apennini genuensis *alle Capanne di Marcarolo*, et in apennino Liguriae orientalis supra *Borzonasca*. Fruct. aestate.

Obs. Cystopteris fragilis quammaxime ludibunda stirps est; idcirco a Botanicis licet magni nominis in falsas species fuit lacerata. Cel.r Koch rem sensit, et formas omnes ad binas insigniores varietates traxit; quarum altera (*a lobulato-dentata*) a memetipso magna manu lecta in apennino Italiae mediae *al Subasio*, et in alpibus penninis *al Rosa* nondum in agro ligustico reperta est.

FILICES ITALICAE

praeter Ligusticas.

OPHIOGLOSSACEAE.

1. *Ophioglossum lusitanicum* L. Sp. 1518. Ten. Syll. p. 485! Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 651.

Ic. Lam. Ill. gen. t. 864. f. 3.

Ex arenosis maritimis prope Neapolim communicavit clariss. Tenore. In Corsica *a Bonifacio* (Viv. herb.).

2. *Botrychium matricariaefolium* Alex. Br. ex K Syn. ed. 2.ª p. 972.

Ic. Brevn. Cent. t. 94.

In alpibus Helvetiae conterminis *al San Bernardino* leg. Advoc. Franzoni.

POLYPODIACEAE.

PTERIDEAE.

3. *Pteris longifolia* Ten. Syll. p. 490! Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 657.

In vaporariis insulae Inarimes (Tenore juxta herb. Gen.).

Specimen *Pteridis longifoliae*, quod nuperrime accepimus ex Konghong a cl. Hoenacher faciem ab iis, quae misit ab Inarime clariss. Tenore longe diversam profert. Frons enim in planta chinensi elatior est, pinnarum jugis etiam 46 praedita a medio frondis basim versus longitudine decrescentibus, infimis minimis, mediis, superioribusque suboppositis, pinna suprema longe petiolata, reliquis omnibus sessilibus: stipes, rachisque primaria praesertim inferne paleaceo-hirsutissimi sunt.

Valde dubito quin planta nostra eadem sit ac asiatica!

CHEILANTHEAE.

4. *Nothochlaena lanuginosa* Desv. Journ. bot. an. 1815. p. 92. Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 654. — *Aspidium catanense* Cosent. in Act. soc. Goien! ex Guss. l. c.

Ic. Desf. Atl. 2. t. 256.

Ad rupes vulcanicas prope Cataniam (Cosentini in Viv. Herb. et Balsamo in Herb. DNtrs.), ad rupes *di Catalfano* prope *Bagheria* (Huet), circa Panormum (Todaro): in Sardinia (Moris, et DNtrs. in Herb. Viv.).

ASPLENIEAE.

5. *Asplenium marinum* L. Sp. 1540. Guss. Syn. 2. p. 2.ª in add. et emend. p. 884.

Ic. Engl. Bot. t. 392.

β. *trapeziforme* Willd. Sp. 5. p. 318. Guss. Syn. l. c.

In Corsica (Viv. Herb.), in Capraria (DNtrs.). Varietas β. occurrit in Corsica *alla Trinità* promiscue cum specie, cum qua confusa extat in Herb. Viv.

6. *Asplenium obovatum* Viv. Nov. sp. diagn. ad calc. fl. Lyb. p. 68! Ten. Syll. p. 490 inter *Aspidia* ob err. typogr.! Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 662.

Ic. Guss. rar. t. 64.

Ex Corsica *a Bonifacio*, *Tempio*, *Loco Santo*, *Ajaccio* (Serafini, Requien in Herb. Viv.); ex promontorio *di Cuma*, *Squillace*, *Reggio* ad rupes maritimas (Tenore in Herb. gen.).

7. *Asplenium angustifolium* Guss. var. p. 376. — *Aspidium tenuifolium* Ten. Syll. p. 489!

Ic. Guss. l. c. tab. 65.

In rupibus montium editiorum Aprutii, *Majella*, *Valle dell'Inferno*, *Grotta Caprara*, *Monte Corno* (Tenore ex Herb. gen.).

8. *Asplenium brachyphyllum* Gasparr. *in Rend. della R. Accad. delle Sc. di Nap.* 4. p. 108! Guss. Syn. 2. p. 2.ª in add. p. 885.

In rupestribus calcareis Lucaniae prope *Castelgrande* juxta specimina ab auctore commissa.

Obs. Asplenium microphyllum Tin. in Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 884, cujus specimen vivum clariss. Auctor nuperrime misit nil aliud, me judice, est, nisi forma pumila *A. Trichomanis*, uti jam ipse ex diagnosi a cl. Gussonio tradita suspicatus eram.

Idem dicendum de *Aspl. piloso* Guss. l. c. p. 661, cujus specimen vivum a laud. Tineo pariter communicatum *Asplenio glanduloso* nostro omnino respondet.

9. *Woodwardia radicans* Sw. Syn. p. 117. Ten. Syll. p. 490! Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 659..

Ic. Till. Pis. p. 62. t. 24.

Ex vallibus maritimis *di Sorrento* communicavit clariss. Tenore.

SCOLOPENDRIEAE.

10. *Scolopendrium Hemionitis* Sw. Syn. p. 90. Ten. Syll. p. 490! Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 656.

Ic. Cav. in Ann. de Sc. nat. 5. t. 41. f. 2.

In Corsica *a Bonifacio* (Serafini in Herb. Viv.), in Sardinia *a Cagliari* (DNtrs.) in locis paludosis, muris humidis, ac ad gulas puteorum prope Neapolim (Tenore in Herb. gen.).

β. *sagittatum*.

Minor: auriculis frondis (in speciminibus nostris) repando-crenatae mediocribus obtusis.

S. sagittatum DC. Fl. fr. 5. p. 238. Duby Bot. gall. 1. p. 540.

Ic. Clus. Hist. 2. p. 214. f. 1.

In Corsica *a Bonifacio* (Viv. Herb.).

Allata figura Clusii frondes margine integerrimas ostendit.

γ. *Tenoreanum*.

Monstrosa progenies? fronde irregulariter divisa, laciniis iterum, iterumque partitis.

S. Hemionitis β. Ten. Syll. p. 490!

In muris humidis *alla Cava* prope Salernum (Tenore in Herb. gen.).

STRUTHIOPTERIDEAE.

11. *Struthiopteris germanica* Willd. En. h. ber. p. 1071. K. Syn. ed. 2.ª p. 986.

In alpibus pedemontanis leg. egreg. Rostan, secus Aconiam in agro Novariensi clariss. DNtrs.

POLYPODIEAE.

12. *Polypodium cambricum* L. Sp. 1546. Gouan. Monsp. ed. Lugd. p. 442. — *P. vulgare* var. *cambricum* Willd. Sp. 5. p. 173. Guss. Syn. 2. p. 2.ª p. 655.

In Corsica *ad Ajaccio* (Requien in Viv. Herb.).

A *P. vulgari* differt non tam statura majori, laciniisque mediis pinnatifidis, sed etiam forma sporotheciorum, quae perfecte ovalia sunt, nec ut in illo rotunda etc., attamen dum speciem restituere propono, id dubitanter facio. — *P. australe* Fée Polyp. p. 236 huc quam probabiliter spectat.

ASPIDIEAE.

13. *Aspidium Thelypteris* Sw. Syn. 50. Willd. Sp. 5. p. 249. — *Polystichum Thelypteris* K. Syn. ed. 2.ª p. 977.

Ic. Bolt. Fil. t. 43-44.

In provincia veronensi *a Rivalonga* (Bracht in herb. DNtrs.) (*).

14. *Cystopteris alpina* Link H. ber. 2. p. 130. — *C. regia* b. *alpina* K. Syn. ed. 2.ª p. 980. — *Aspidium alpinum* Willd. Sp. 5. p. 282.

Ic. Jacq. ic. rar. t. 642. ex K. l. c.

In monte *Resegone?* (DNtrs. Herb.).

DICKSONIEAE.

15. *Woodsia hyperborea* K. Syn. ed. 2.ª p. 975.

α. *Arvonica* K. l. c.

Legi in summo vertice montis *di Ornavasso* ad vallem ossulanam.

β. *Rufidula* K. l. c.

Legi ad radices montis *Rosa* prope *Alagna*, ubi copiosa. Misit ex Insubria laud. Franzoni. Extat ex Gothardo in Herb. Viv.

γ. *Ramentacea.*

Tenuis: pinnis remotis late obovato-cuneatis, decurrentibus, lobato-crenatis, sporotheciis paucis disjunctis.

In alpibus penninis *al Tagliaferro* supra *Alagna.*

HYMENOPHYLLACEAE.

16. *Hymenophyllum Tundbridgense* Sw. Syn. 147. Willd. Sp. 5. p. 520. Loisl. Gall. 2. p. 369. — *Trichomanes Tundbridgense* L. Sp. 1561.

Ic. Bolt. Fil. 58. t. 31.

Repertum fuit in Etruria prope *Montignoso* a Prof. Puccinelli f. m. juxta DNtrs. Herb.

(*) Haec quoque pulchra species inter divitias Florae ligusticae jam nunc adnumeranda; nam ipse postquam Commentarium hoc de Cryptogamis vascularibus R. Academiae Scientiarum Taurinensi exhibueram, eam in palustribus montis *il Bricco dell'uomo* supra *Arenzano* detexi. Hinc itaque expungenda est, ac post *Aspidium rigidum* (pag. 181) locum sumat oportet.

Sequentes species tam in herbario meo, quam in herbario R. Archigymnasii genuensis adhuc desiderantur.

1. *Polysticum Tanacetifolium* DC. Fl. fr. 5. p. 241. Duby Bot. Gall. 1. p. 538.

In montibus Corsicae.

2. *Aspidium cristatum* Poll. Veron. 3. p. 278. All. Ped. 2. p. 286 (sub *Polypodio*).

In dumetis umbrosis montium Bolcae, Civillinae, etc. (Pollini) in sylvis umbrosis Pedemontii (Allioni).

3. *Cystopteris montana* Link. H. ber. 2. p. 131? — *Aspidium montanum* Sav. Bot. etr. 3. p. 20.

Lecta « prope Montieri in summitate altissimi montis inter Fagos » Savi l. c.

SOPRA ALCUNI PESCI

NUOVI O POCO NOTI

DEL MEDITERRANEO

NOTA

DI

F. DE FILIPPI E G. B. VERANY

Approvata nell'adunanza del 20 aprile 1856.

Notacanthus mediterraneus Nob.

N. regione nasali gibba obtusa. Dentibus superioribus triangularibus, inferioribus compresso-subulatis: palatinis serie unica. Limbo infero-operculari utroque latere poris septem. Pinnis pectoralibus aperturae branchiali approximatis: ventralibus coniugatis: caudali cum anali ad basim coniuncta, parva, truncata.

D. 5—1/1. A. 12/132. V. 1/8.

Il genere de' Notacanti è rimasto costituito fino a questi ultimi anni da un'unica e rarissima specie, passata ne' cataloghi sistematici col nome di *N. nasus* di Bloch, primamente descritta da Fabricius col nome generico di *Kampylodon*. Essa è propria dei mari boreali, ed a quanto sembra, de' paraggi della Groenlandia: e si fu soltanto sulla mal sicura fede altrui, che Bloch le assegnò per patria il mare delle Indie orientali.

Questa specie è tuttora una rarità ittiologica, non essendone conosciuti che tre soli esemplari ripartiti ne' Musei di Coopenaghen, di Berlino e di Parigi. Quest'ultimo non ne venne in possesso che da pochi anni per

opera del tanto zelante ed intrepido navigatore sig. Gaymard, che lo ebbe a raccogliere nel suo viaggio al polo Nord. La descrizione e la figura di questo pesce che veggonsi nel vol. 8.° dell'opera di Cuvier e Valenciennes, sono desunte ancora dall'unico e malconcio esemplare del Museo di Berlino, da quello stesso che servì a Bloch. Una figura assai migliore comparve più tardi nella nuova edizione illustrata del Regno animale di Cuvier (Poissons, Pl. 15), presa appunto dall'individuo perfettamente conservato, raccolto dal sig. Gaymard.

Nell'anno 1840 Risso fece conoscere, negli archivi di Wiegmann, una seconda specie di questo genere, intitolandola all'illustre autore dell'Iconografia della Fauna italica: se non che la figura e la descrizione data dal naturalista nizzardo sono in tale disaccordo, da non sapersi su quale di esse far fondamento per riconoscere la specie. Se la figura è esatta, il pesce cui si riferisce, munito di sette raggi ossei dorsali tutti congiunti da una membrana in modo da formare un'unica pinna, non apparterrebbe neppure al genere dei Notacanti, al quale invece deve legittimamente essere ascritto pe' raggi spinosi liberi, di cui si parla nella descrizione.

Rivoltici al sig. Risso nipote per avere ulteriori ragguagli su questa specie mediterranea di Notacanto, fummo cortesemente informati dell'esistenza nell'antica collezione e ne' manoscritti inediti dello zio non di una, ma di due distinte specie di questo genere, una delle quali col nome primitivo di *Notacanthus Bonaparte*, l'altra indeterminata; e di entrambi ci fu comunicata una buona figura copiata dall'atlante postumo inedito del medesimo Risso. La descrizione pubblicata da questo autore nell'archivio di Wiegmann si trova dunque in presenza di due figure, fra loro assai diverse. In questa descrizione si accenna ad un lungo tubo sporgente dall'ano, e giudicato per un prolungamento dell'ovidutto. Or questo tubo è rappresentato nella figura pubblicata, manca nella figura inedita, mentre per tutto il rimanente questa va perfettamente d'accordo colla dianzi citata descrizione, eccettuandone ancora le dimensioni che sono nella figura inedita maggiori. Tutto induce a credere che Risso abbia avuto sott'occhio in epoche successive due esemplari del suo *N. Bonaparte:* cioè un individuo più piccolo munito del lungo tubo anale, ed un altro maggiore privo di questo tubo; e che nel mentre il naturalista nizzardo descriveva abbastanza bene il primo individuo, l'artista non lo ritraesse fedelmente.

Per compiere la storia del genere Notacanto dobbiamo far cenno di un'altra specie descritta da Richardson nella parte zoologica del viaggio ai mari australi dell'*Erebus and Terror*. Questa specie benissimo distinta, e dall'ittiologo inglese trattata di confronto con quella primitivamente nota del *N. nasus*, fu chiamata *N. sexpinnis*.

Il mare di Nizza ha posto nelle nostre mani un altro individuo perfettamente conservato di questo singolare genere. Il confronto fatto con ogni maggior cura colle tre specie summentovate ci ha convinti facilmente non spettar esso ad alcuna di queste. Infatti il nostro Notacanto ha il muso sporgente, rotondato, compresso. La bocca inferiore assai piccola. I denti della mascella superiore, in numero di 24, sono triangolari, alquanto incurvati verso l'esterno, e come falcati, di grandezza crescente dal mezzo della bocca verso i lati: quelli della mandibola sono più numerosi, fini, uguali, allungati, cilindrici. Sul palato s'osserva un'unica serie di denti conici, formante un arco parallelo a quello de' denti mascellari. Le aperture nasali, confuse assieme, sono alquanto più prossime all'occhio che all'estremità del muso. L'occhio è mediocre, e l'orbita di forma allungata, coll'asse maggiore parallelo a quello del corpo.

Le aperture branchiali sono grandissime. Nella membrana branchiostega grossa, stipata, non potemmo contare che oscuramente tre raggi per lato. I pezzi opercolari non sono distinti. I lembi membranosi dell'opercolo, quasi rettilinei, formano un angolo presso che retto. Nella regione della gola su ciascun margine opercolare si veggono sette pori.

Il capo ed il corpo tutto sono ricoperti da minutissime squamme cicloidi. La linea laterale quasi diritta finisce poco oltre la metà della coda.

L'altezza del corpo è compresa 9 volte nella lunghezza totale. Il capo forma la sesta parte del corpo intiero.

La pinna dorsale è decomposta in sei pinnule, formata ciascuna da un sol raggio robusto spinoso, ad eccezione dell'ultima che porta anche un raggio molle. La caudale piccolissima, di soli 5 raggi, e troncata, si connette alla base colla terminazione dell'anale. Le ventrali sono congiunte per gran tratto al loro lato interno, e presentano al lato opposto quattro raggi spinosi compresi nella stessa membrana che sostiene i susseguenti raggi molli.

Il colore generale del corpo è carneo con riflessi argentei. Il lembo dell'opercolo, il contorno dell'orbita e della bocca sono di color scuro. Pinne incolori.

Le dimensioni dell'esemplare che si conserva ora nel R. Museo zoologico di Torino sono le seguenti: lunghezza totale — $0^m,203$: lunghezza del capo $0^m,043$: distanza dall'apice del muso all'apertura anale $0^m,08$.

Il genere dei Notacanti sarebbe quindi composto delle seguenti specie:

N. *NISUS* Bl.. *Fronte gibbo: dentibus subulatis parum compressis, palatinis serie triplici vel quadruplici. Pinnae pectorales ab apertura branchiali distantes.*

D. 10. A. 13/116. V. 1/8.

N. *SEXPINNIS* Richard. *Capite conico: rostro obtuso: apicibus dentium lanceolatis. Pinnae pectorales ad aperturam branchialem approximatae.*

D. 6/1. A. 14/...? V. 2/7.

N. *MEDITERRANEUS* Nob.

N. *BONAPARTE* Risso (specie da rivedersi). *Praecedenti similis: dentibus palatinis serie duplici. Fronte acutiori. Pinna anali nigra. Cauda acuminata.*

D. 9. A. 15/120.

A queste quattro specie deve essere aggiunta una quinta, parimenti mediterranea, segnalata pel muso prolungato ed acuto, e pel grande numero di spine dorsali. Il nostro amico Cr. Bellotti, ittiologo distintissimo, ne constatò l'esistenza dall'esemplare che potè esaminare nella collezione *Risso* a Nizza. Il sig. Risso nipote poi ebbe la compiacenza di spedire ad uno di noi una copia fedele di questa specie presa dall'atlante inedito dello zio, dal cui nome è giustizia venga la specie stessa intitolata.

N. *RISSOANUS* Nob. *Regione nasali valde elongata, proboscidiformi. Pinnulae spinosae dorsales triginta et ultra.*

NAVARCHUS n. gen.

Fig. 1.

Habitus Seriolae.

Caput undique squamosum: poris nonnullis in regione nasali.

Dentes intermaxillares et mandibulares gracili, elongati, serie unica pectinatim dispositi. Palatini et linguales minimi, conferti.

Pinna dorsalis radiis spinosis numerosis: pectorales elongatae: caudalis a basi perfecte divisa, lobis aequalibus.

N. SULCATUS Nob.

N. argenteo-plumbeus. Pinna dorsali profunde sinuata. Sulco longitudinali supra, et alio minori subtus lineam lateralem.

D. 11/20. A. 3/20. Squam. ser. 66. $\frac{9}{9}$.

Ecco un altro fra i più rari tributi del Mediterraneo: raro al punto da non possedersene che un unico individuo pervenuto non ha guari nelle nostre mani, e deposto nella collezione ittiologica del R. Museo di Torino. Già ad un primo esame scorgesi come esso non possa riferirsi ad alcuno de' generi conosciuti, come non sia tampoco agevol cosa lo stabilire la famiglia naturale che lo debba accogliere. Solo dopo aver preso in considerazione il complesso de' suoi caratteri ci determiniamo a collocarlo nella grande e poco omogenea famiglia degli Scomberoidi, in un posto intermedio fra le Seriole ed i Centrolofi; e come tipo di un nuovo genere distinto facilmente pel capo tutto coperto di squamme, pei denti fitti e minuti che rendono scabro il palato e la lingua, per le grandi pettorali, per la dorsale unica, ma in special modo per la completa divisione della pinna caudale. Altri caratteri da considerarsi come generici sono i seguenti: denti in un sol rango, disposti a pettine, sottili, cilindrici, allungati, terminanti in punta piuttosto ottusa, e formanti arco regolare sulle ossa intermascellari e sulla mandibola: alcuni pori (detti impropriamente mucipari) disposti in serie trasversa sull'arcata nasale, e longitudinale sopra le narici e sopra l'orbita: lembi del preopercolo e dell'opercolo molli, quasi membranosi: membrana branchiostega sostenuta da 5 raggi: appendici branchiali interne allungate, subprismatiche, con gruppi

di papille acuminate sul lato interno. Ventrali piccole, inserite al disotto della base delle pettorali. Squamme cicloidi, facilmente deciduc. Alcune squamme più grandi formano il margine di un profondo solco ascellare rivolto in alto alla parte superiore della base delle pettorali.

Come caratteri della specie sarebbero da ritenersi: il profilo convesso del capo; l'occhio grandicello; la pinna dorsale così profondamente intagliata da sembrar quasi divisa in due, delle quali l'anteriore portante tutti i raggi spinosi: la linea laterale diritta dalla region scapolare all'estremità della coda nel bel mezzo de' fianchi: al di sopra ed al di sotto di essa due solchi arcuati equidistanti, quello più completo e parallelo alla curva del dorso, questo breve e poco distinto, parallelo al profilo del ventre. Oltre di ciò nella region inferiore, fra le piccole ventrali ed il principio dell'anale, veggonsi altri due solchi paralleli, rettilinei e ravvicinati. Il colore dovrebbe essere un piombino scuro sul dorso, chiaro sul ventre, nella qual regione soltanto si sono conservate alcune squamme: in tutto il rimanente del corpo le squamme sono cadute, e non scorgonsi che le loro borsette cutanee. La figura rappresenta appunto al vero questa condizione del tipo originale. Quanto al numero de' raggi delle natatoie e delle serie delle squamme sul corpo, vedasi la formola posta in capo al presente articolo.

Sulle branchie di questo pesce trovammo una dozzina di parassiti spettanti senza dubbio ad un genere non per anco conosciuto. Essi hanno la forma di corpi elissoidi, colla faccia ventrale di color biancastro ed alquanto concava, la dorsale di color più scuro e convessa. Il loro maggior diametro misura da 1,5 a 2^{mm}: sulla faccia ventrale vedesi a un terzo circa del diametro longitudinale un tubo molle assai sporgente; la quale circostanza, congiunta colla forma del corpo, ci sembrò costituire un'analogia co' Mizostomi. Ma l'esame microscopico non tardò a rettificare questa prima impressione. Manca infatti ne' parassiti in discorso ogni benchè menoma traccia di estremità, ed il tubo anzidetto non corrisponde alla bocca, dovendo la porzione del capo esser determinata da due piccoli occhi situati presso al lembo opposto a quello da cui sporge il tubo stesso. Però non ci fu dato rinvenire altra apertura che possa rappresentar la bocca, forse in grazia dell'alterazione prodotta dall'alcool. Sotto la compressione si resero evidenti due branche laterali ramificate del sistema gastrico.

Piuttosto che a' Trematodi questi parassiti dovrebbero appartenere a'

Turbellarj: 1.° per la presenza di due occhi; 2.° per trovarsi insieme ad individui dell'indicata lunghezza altri assai più piccoli; 3.° infine pel colore del dorso differente da quello del ventre. Ognun vede per altro come questa quistione non possa esser decisa che dall'esame di individui viventi, onde constatare la presenza di ciglia vibratili sulla superficie del corpo.

Clinus Veranyi De Fil.

Fig. 3.

C. Pinna dorsali et anali cum caudali coniunctis.

D. 30. A. 22. C. 5.

Questa specie che si potrebbe facilmente confondere col *Cl. variabilis* Bp. è subito distinta dal carattere delle natatoie dorsale ed anale continue colla caudale. Fu rinvenuta nel golfo di Cagliari.

Scyllium acanthonotum Nob.

Fig. 2.

S. aculeorum in regione dorsali seriebus duabus.

Questa specie del pari che l'antecedente fu già descritta nella *Revue et magasin de zoologie* di Guérin 1853 n.° 4. Il redattore di questo periodico, che appose alla descrizione una sua nota, sarà facilmente convinto dall'ispezione della figura che ora pubblichiamo, mancar affatto di fondamento il dubbio espresso circa l'essersi scambiato per uno *Scyllium* un giovane *Echinorhinus*. Posteriormente fummo assicurati dal sig. Denegri figlio, naturalista preparatore di Genova, avere egli rinvenuto sul mercato di questa città un gattuccio adulto presentante una doppia serie di aculei dorsali. Questa circostanza ci conferma sempre più sull'esistenza reale di una specie distinta da questo singolare carattere.

L'esemplare dal quale è presa la qui annessa figura, fu pescato presso Albenga. In * è rappresentato uno degli aculei dorsali strappato dalla cute nella quale si trovano questi come tanti pugnaletti impiantati pel manico.

Pelamys Bonaparte Nob.

Fig. 4.

Cybium Bonaparti Verany. Atti dell'ottava riunione degli Scienziati italiani. Genova, 1846, pag. 493.

P. corpore compresso, unicolori, fasciis nullis.

D. 13—13. A. 13. Pinnulis sup. 8. infer. 7.

Questa bellissima Palamita che uno di noi ebbe ad incontrare per la prima volta sul mercato di Genova nel maggio del 1841, non è tra le più rare specie del Mediterraneo, quantunque non abbastanza frequente per essersi guadagnata un nome nel vocabolario de' pescivendoli. Quasi ogni anno, durante l'estate, ne compare qualche raro individuo sul mercato di Genova e di Nizza.

Essa si distingue subito dalla Palamita comune (*P. sarda*), pel corpo molto più elevato e compresso, di color glauco uniforme superiormente, argenteo nella region ventrale, senza traccia alcuna di fascie dorsali. L'altezza massima di questo corpo è compresa 5 volte nella distanza fra l'apice del muso e l'estremità de' lobi caudali: la lunghezza del capo è un po' meno di questa altezza. La linea laterale alquanto ondulata è fiancheggiata in tutta la sua lunghezza da minutissime squamme formanti una striscia che si allarga verso la regione scapolare ove forma il corsetto, il quale è pochissimo sviluppato, ed ai lati della nuca si congiunge con una zona squamosa che scorre lungo la base delle dorsali fino alle prime pinnule. La prima natatoia dorsale è di un color violaceo scuro: le altre sono assai più pallide: le ventrali, l'anale e le pinnule inferiori vanno prendendo verso il loro margine una sfumatura giallo-ranciata.

La carne di questo pesce è buona, sebbene alquanto oleosa.

Exocetus (Cypsilurus) procne Nob.

Fig. 5.

E. lobis membranaceis pendulis in mento. Pinnis ventralibus nigris, fascia transversa alba.

D. 12. A. 9.

Questa specie è molto affine all'*E. Rondeleti* Val, dalla quale appena si distingue per una larga fascia bianca che attraversa le ventrali, e pe'

due lobi membranosi brevi, dilatati e fimbriati al margine, che pendono dalla sinfisi della mandibola. Per questi lobi il nostro Esoceto dovrebbe spettare al gen. *Cypsilurus* di Swainson, se l'affinità grandissima in tutto il rimanente colla specie di confronto non togliesse ogni valore al carattere unico ed isolato sul quale Swainson ha stabilito il suo genere. Appena per la comodità della classificazione si potrà conservare questo gruppo sceso di grado, cioè limitato all'importanza di un sottogenere.

Probabilmente deve riferirsi a questa specie l'*Exocetus fasciatus* di Cocco, specie nominale non mai descritta, e che in ogni modo non potrebbe conservare un nome già previamente adoperato da Lesueur per una specie dell'America settentrionale.

Parecchi individui di questo Esoceto furono presi nel mare di Nizza, tutti di piccolissime dimensioni. Fra quanti pervennero nelle nostre mani il maggiore giunse appena alla lunghezza di $0^{m},105$.

Pteridium atrum Swains.

Fig. 6.

Oligopus ater Risso. Ichthyologie de Nice, pag. 142.
» *niger* » Hist. natur. Europ. mérid., pag. 338.
Gadopsis ..... De Filippi. Siebold und Koelliker Zeitschrift d. wissenschaft. Zoologie, 1855.

Risso pel primo ha fatto conoscere questo pesce chiamato *Fanfré negré* nel dialetto nizzardo, e del quale non si trova ulteriore menzione negli autori che trattarono in seguito l'Ittiologia del Mediterraneo. Appena vediamo ricomparire i nomi di Risso nell'eccellente *Catalogo metodico de' pesci europei*, del Principe Carlo L. Bonaparte, fra i sinonimi del *Centrolophus niger* di Lacepède. Al qual silenzio su di una specie delle più distinte, anzi diremo delle più singolari, ha contribuito senz'altro la sua rarità, la poca fiducia colla quale erano accolte sovente le descrizioni e le figure stesse di Risso, e l'error suo di riferirlo al genere *Oligopus* di Lacepède, e presso i Centrolofi.

Due individui di questa specie pervenuti nelle nostre mani ci hanno dato occasione di meglio studiarla. Essa è perfettamente riconoscibile nelle due descrizioni di Risso e nella figura 41, tav. XI della sua *Ichthyologie de Nice*, dalle quali scorgesi già abbastanza come il nostro pesce non abbia alcuna affinità co' Centrolofi, molto meno poi col genere *Oligopus* di Lacepède, presso i quali Risso voleva mantenerlo, anche nell'intenzione espressa di farne il tipo di un genere nuovo.

Questo pesce ha una forma allungata, compressa, colla coda acuminata; la pinna dorsale, la caudale e l'anale continue, e tutte con raggi molli. Le ventrali contigue alla loro base, composta ciascuna di due soli raggi, sono brevi, filiformi, ed inserite al davanti delle pettorali come ne' Gadidi. Il corpo è ricoperto di squamme grandicelle, e negli esemplari conservati nell'alcool di color bruno, non nero d'ebano come, stando alla descrizione di Risso, in istato fresco.

La linea laterale appare doppia, e come decomposta in serie irregolari di punti distanti, l'una delle quali parallela al profilo del dorso, l'altra a quello del ventre, ma non è chiaramente discernibile che ove queste due serie si congiungono in una più regolare nella region caudale, ove segue la direzione della linea mediana. L'ano è collocato alla metà della lunghezza del corpo.

L'osso intermascellare e la mandibola portano denti assai distinti, acuti, rari, in un solo ordine, sorgenti da uno strato di denticoli minutissimi e stipati. Altri due denti per parte, lunghetti e ricurvi verso le fauci, si trovano alla parte anteriore del vomere, con altri piccolissimi denticoli alla loro base. La lingua è liscia.

Ai contorni delle labbra si veggono alcune fossette che ricordano quelle delle Accrine. La membrana branchiostega non conta che soli quattro raggi per lato. Le appendici marginali degli archetti branchiali sono subcilindriche, e, del pari che gli ossicini dell'apparato linguale, presentano alla superficie una fitta e minutissima scabrosità.

I visceri della digestione e della generazione sono chiusi in un sacco la cui parete è assai grossa robusta e lucente per un fitto tessuto aponeurotico che s'aggiunge al sottilissimo inviluppo peritoneale. Lo stomaco è poco ampio: l'intestino breve: due piccole appendici piloriche guerniscono il principio del tenue.

Un organo che si attrae particolar attenzione è in questo pesce la vescica natatoria, la quale è ben circoscritta, non aderisce in alcun punto all'indicato sacco aponeurotico, e non occupa che un piccolo spazio, il 3.° anteriore all'incirca, della cavità addominale. La sua forma è semplice, ovoidea; nè vi scorge alcuna traccia di un condotto esofageo. Anche la parete di questa vescica è rafforzata da una tonaca aponeurotica propria, che la rende grossa, opaca e resistente. Ma del maggior interesse sono i suoi rapporti collo scheletro.

Questa vescica presenta infatti alla parte anteriore due sporgenze o

corna laterali, assai resistenti per un maggior addensamento di fibre aponeurotiche; e da ciascuna di esse partono tre fascetti muscolari. Il superiore si porta in alto, alla base del cranio, e va ad attaccarsi all'occipitale laterale, senza che ci sia stato concesso di verificare un rapporto cogli organi auditivi, analogo a quelli scoperti dall'illustre E. E. Weber: il secondo fascetto, espandendosi alquanto verso la sua estremità, va ad attaccarsi alla parte superiore interna dell'osso scapolare: il terzo discende in basso, e s'attacca alla parte interna dell'osso del bacino. Tutti questi fascetti sono composti di fibre volontarie o rigate, ed è evidente come per la loro contrazione tendano a tirar in avanti la vescica aerea.

Questo apparecchio è ancora complicato da due piccoli archetti ossei, uno per lato, che mediante legamenti elastici si articolano mobilmente alla colonna vertebrale, fra la 3.ª e la 4.ª vertebra, mentre per l'altra estremità, e col mezzo dell'inviluppo sieroso che involge sì essi che la vescica aerea, si attaccano a questa, al luogo stesso d'onde si dipartono i tre mentovati fascetti muscolari.

Aperta la vescica scorgesi alla sua parte inferiore o ventrale la glandola sanguigna (corpo rosso) assai sviluppata relativamente alla capacità della vescica stessa. I vasi si distribuiscono alla periferia di questa glandola in modo particolare, formando grandi raggi divergenti spiccanti lateralmente grossi rami anastomotici che si interpongono fra le cellule di questo apparato.

Come la natura siasi compiaciuta di variare le condizioni di sviluppo, forma, struttura, rapporti della vescica natatoria de' pesci, a tutti è noto; senza che siano egualmente note le ragioni fisiologiche di queste variazioni. Quanto ora abbiamo riferito della vescica aerea del nostro pesce, costituisce un caso finora unico nella classe. Però facendoci a ricercare le analogie con altri fatti già noti, non ci sarà dato rinvenirne che nelle famiglie degli Ofididi (1) e de' Gadidi. Da prima osserviamo che in molte specie di queste famiglie si riscontra un apparato muscolare destinato a tirar avanti la vescica aerea. Le parti solide dello scheletro alle quali i muscoli di questo apparato si attaccano sono però assai diverse: così p. e. mentre negli *Ophidium barbatum* e *Broussoneti* (Müll.) questi muscoli partono dalla region posteriore del cranio, nell'*Oph. Vassalli* partono dal

(1) Muller, Abhandl d. k. Akademie zu Berlin 1843. pag 150

vomere, e nel *Gadus morrhua* (1) dalle apofisi trasverse delle prime vertebre.

Oltre gli accennati muscoli trovasi negli Ofididi un altro apparato costituito di due lamine ossee (lamine pennate), le quali, partendo una per lato dalla colonna vertebrale, si portano ad abbracciar la parte anteriore della vescica aerea: di modo che, secondo l'espressione di G. Müller, l'azione combinata di detti muscoli e delle lamine è paragonabile a quella di chi prendendo con una mano il collo di una bottiglia tenti coll'altra di estrarne il turacciolo. Nel nostro pesce abbiamo pure un rappresentante di queste lamine pennate ne' due archetti ossei mentovati più sopra: se non che l'azione di questi archetti è ben diversa: essi possono al più, in grazia della loro elasticità, far retrocedere e rimettere al suo posto la vescica aerea, una volta che sia cessata l'azione de' muscoli che la tirano verso il capo. Per una disposizione siffatta questo pesce può trasportare ad arbitrio il suo centro di gravità, e giovarsi di questo artifizio per dirigere i suoi movimenti.

Dalle cose dette risulta sempre più evidente che l'*Oligopus ater* di Risso non ha alcun rapporto co' Centrolofi; che il suo posto naturale non potrebbe essere che presso i due antichi generi *Ophidium* e *Gadus*, anzi precisamente fra entrambi, in modo da connetterli in una sola famiglia naturale.

Swainson (2) ha benissimo veduto una parte di questi rapporti, ed applicando a questo pesce il nome generico di *Pteridium* (3), preso da Scopoli, lo dispone nel suo sistema presso il gen. *Brotula* nella famiglia de' Gadidi. La presenza di due pinne ventrali piccolissime e poste nella regione giugulare, farebbe realmente del nostro pesce un membro di quella famiglia: la dorsale e l'anale continue colla caudale costituiscono un carattere di affinità col gen. *Brotula*, e specialmente colla specie descritta da Schlegel nella *Fauna iaponica*, col nome di *B. imberbis*. In questa Brotula la vescica aerea è di un sol pezzo, e congiunta anteriormente alle vertebre, se per legamenti o per muscoli Schlegel non dice.

Se non che il *Pteridium atrum* cogli anzidetti caratteri altro ne con-

---

(1) De la Roche, Annales du Muséum d'hist. natur. T. 14, pag. 279.

(2) The natural history of Fishes, Amphibians and Reptiles. Vol. 11, pag. 302.

(3) Noi avevamo proposto un nome generico nuovo *Gadopsis*, senza accorgerci che questo nome era già stato introdotto nell'Ittiologia da Richardson per un altro pesce della famiglia de' Blennioidi.

giunge che tenderebbe a separarlo da' Gadidi, e consiste nella presenza degli archetti cartilaginei mentovati più sopra come ricordanti le lamine pennate degli *Ophidium*, presso i quali dovrebbe il nostro pesce collocarsi nel sistema, quando non fosse munito delle due piccole natatoie ventrali. Questo carattere, di nessuna importanza, rimarrebbe ormai il solo che valga a separare le due famiglie de' Gadidi e degli Ofididi, se questa separazione fosse realmente indicata dalla natura. A torto, noi crediamo siansi distinte quelle due famiglie: a maggior torto ancora siansi disgiunte per un tratto più o men grande da tutti gli Ittiologi, come Cuvier, il citato Swainson, il Principe C. Bonaparte e lo stesso G. Müller.

Spiegazione della tavola.

Fig. 1. *Navarchus sulcatus.*
» 2. *Scyllium acanthonotum.*
* Un aculeo isolato.
» 3. *Clinus Veranyi.*
» 4. *Pelamys Bonaparte.*
» 5. *Exocetus (Cypsilurus) procne.*
» 6. *Pteridium atrum.*

a. Vescica natatoria. *b.* Archetto osseo. *c.* Muscolo che va all'osso occipitale. *d.* Muscolo che s'attacca all'osso scapolare. *e.* Muscolo che si porta all'osso del bacino. *f.* Sacco aponeurotico peritoneale che racchiude tutti i visceri della digestione e della generazione.



Torino, Lit.ª F.lli Degea 1857


BRITISH
MUSEUM
NATURAL HISTORY

TROISIÈME MÉMOIRE

POUR SERVIR À L'HISTOIRE GÉNÉTIQUE

DES TRÉMATODES

PAR

LE DOCTEUR PH. DE FILIPPI

Lu dans la séance du 19 avril 1857.

Cercaria triloba (fig. 1). — Je donnerais ce nom provisoire à une espèce assez rare près de Turin dans le *Lymnaeus stagnalis*, et que j'ai trouvée une fois aussi dans le *Planorbis carinatus*. Elle est armée, et se distingue tout de suite par ses dimensions plus fortes que d'ordinaire parmi les espèces de cette catégorie: car son diamètre longitudinal mesure de $0^{mm},5$ à $0^{mm},6$, la queue non comprise. En rapport avec ces dimensions le dard est très-mince et effilé. La ventouse buccale est plus petite que la ventrale. Les deux vaisseaux qui de chaque côté du corps remontent jusqu'à la bourse du dard, sont très-fins et déliés: et on peut voir aisément qu'ils forment les conduits communs d'une très-belle grappe de cellules nuclées transparentes disséminées en grand nombre dans le parenchyme du corps. L'organe excrétoire bien développé est caractéristique pour sa forme à trois renflements ou lobes égaux. Quant aux Sporocystes ils sont comme ceux de la *C. armata* très-grands et à double contour. C'est à un jeune individu de cette espèce qu'il faut rapporter la fig. 1 de mon travail précédent (1).

(1) Deuxième Mémoire pour servir à l'hist. génétique des Trématodes. Turin, 1855.

Cercaria agilis (fig. 2). — Par un beau jour de juillet j'ai pêché dans un mare près de Turin un grand nombre de *Lymnaeus stagnalis* qui presque tous avaient le corps gorgé de grandes Rédies rappelant si bien celles que j'ai déjà fait connaître à propos de la *C. coronata*, que je puis me passer d'en donner ici une description détaillée. Les Cercaires, par contre, appartiennent à une espèce très-différente, analogue plutôt, quant'à la forme générale et à quelques détails d'organisation, à la *C. echinatoides*. Le corps a une longueur moyenne de $0^{mm},52$: la ventouse antérieure un peu plus petite que la ventrale, et dont le diamètre mesure $0^{mm},1$, ne laisse voir aucune trace de piquants à son bord. La queue est assez longue et effilée, très-agile dans ses mouvements. Mais le caractère qui fait reconnaître tout de suite cette espèce, consiste dans un amas de globules très-refringents, à double contour, quelques-uns sphériques, d'autres bi- ou trilobés, contenus dans des dilatations des deux vaisseaux latéraux, et qui ont un aspect blanc de craie à la lumière directe. Il est inutile de faire remarquer ici la ressemblance parfaite de ces globules avec ceux qu'on trouve très-souvent dans l'organe excrétoir de plusieurs Trématodes (1). L'acide acétique fond ces globules en une masse transparente coagulée, et finit même par les dissoudre entièrement sans dégagement de bulles d'air; ce qui ferait penser à une substance albuminoïde. L'action de ce réactif met en évidence la continuité de ces vaisseaux avec l'organe excrétoire, précisément comme M. De la Vallette l'a vu dans le *C. echinata* (2). L'opinion de Van Beneden qui rapporte les soidisants vaisseaux latéraux des Trématodes à un appareil excrétoire est donc complètement confirmée.

Les tissus de ces Cercaires, aussi bien que de leurs Rédies, sont si délicats, que la moindre compression suffit pour les écraser. Pourtant les unes et les autres sont très-vivaces. Les Cercaires surtout nagent des jours entiers et en très-grand nombre, autour des Lymnées, et transférées sur le porte-objet du microscope rampent à la manière des sangsues avec une grande agilité. Je ne puis rien avancer sur les phases ultérieures de cette espèce; mais l'analogie me porte à croire qu'à l'instant de l'enkystement une couronne de piquants poussera au bord de la ven-

---

1) Voyez ceux figurés par J. Müller dans l'ouvrage de M. De la Vallette *Symbolae ad trematodum evolut. hist.* Pl. 2, fig. 1.

2) Op. cit. Pl. 1, fig. 1.

touse antérieure, et que ces Cercaires deviendront par conséquent des Echinostomes.

Cercaria lophocerca (fig. 3-4). — C'est la *Paludina impura* qui m'a donné jusqu'à présent la plus grande variété de Cercaires, et dans le nombre une espèce des plus rares et des plus intéressantes, parcequ'elle représente l'état larvaire d'un *Monostomum*. Elle est caractérisée par un bulbe pharyngien assez fort, par la présence de deux yeux ou taches pigmentaires semilunaires avec une petite lentille dans la concavité, et par une queue munie d'une crête membraneuse longitudinale. Dans l'intérieur du corps on voit des rudiments d'organes sexuels sous la forme de trois masses vésiculaires.

La Rédie manque d'appendices latéraux: son estomac est court et globeux. Elle se fait remarquer surtout par sa forme très-allongée, de telle manière que les germes contenus dans sa cavité sont même quelquefois disposés l'un après l'autre suivant la direction de l'axe longitudinal du corps, et séparés par des étranglements plus ou moins prononcés.

Cercaria micrura (fig. 5-6). — M. Moulinié a fait l'intéressante découverte d'une nouvelle forme de Sporocystes qui logent dans les limaçons (1), ils sont bien caractérisés par les mouvements très-actifs qu'ils présentent, remarquables surtout à la partie antérieure effilée, qui s'allonge et se raccourcit à l'instar d'un cou rétractile. J'ai trouvé aussi dans la *Paludina impura* des nourrices tout-à-fait analogues, mais à forme plus allongée, cylindrique, et longues de 1^{mm} à $1^{mm},5$. La partie antérieure ou la tête, qui est petite relativement au reste du corps, ne laisse apercevoir aucune trace de système digestif, pas même d'ouverture buccale. Cette partie est mobile comme une trompe, se torde de tout côté, et sort et rentre dans une espèce de cou. Effectivement ces nourrices se rangeraient, quant à la forme et à la simplicité d'organisation, dans la catégorie des Sporocystes, tout en s'en écartant par leurs propriétés physiologiques; mais je ferais remarquer tout-à-l'heure une condition organique qui doit les ériger en type tout-à-fait distinct et particulier.

Les Cercaires, dont la longueur mesure $0^{mm},31$, présentent un dard conique très-court et comme tronqué à sa base: les deux ventouses égales en diamètre; l'organe excrétoire de forme tantôt pyriforme allongée, tantôt

(1) De la reproduction des Trématodes endo-parasites. Genève, 1856

sphérique, environné par une couche de cellules. La queue est très-petite, d'une seule venue avec la partie postérieure du corps. L'analogie avec les Cercaires décrites par Moulinié n'est donc pas moins frappante: ce qui contribue à faire de ces parasites un groupe naturel dont il reste à connaître les formes parfaites des individus à terme.

Mais revenons aux nourrices. Moulinié a déjà fait remarquer que le sac extérieur contractile contient un second sac ou boyau à parois minces, qui renferme à son tour les Cercaires. Or c'est précisément ce qui se passe aussi pour les nourrices correspondantes de la Paludine impure. Cette circonstance avait déjà fixé mon attention, lorsque le hasard me fit découvrir d'autres corps analogues dans un *Lymnaeus pereger*, c'est-à-dire des boyaux à tissu granulaire; doués de mouvements lents mais appréciables, et renfermants dans l'intérieur un sac plein de germes non développés de Cercaire (fig. 7). Or dans quelques individus non-seulement ce sac avait sa paroi propre bien distincte, mais il présentait un étranglement plus ou moins prononcé, tout-à-fait analogue à celui des Sporocystes en train de se diviser (fig. 8), tandis que l'enveloppe extérieure ne participait nullement à cette scission. Il en suivrait que cette enveloppe est quelque chose de plus qu'une nourrice, ou un simple Sporocyste, que ce nom devrait être réservé au sac intérieur qui produit les Cercaires, de telle manière que l'enveloppe extérieure, ou corps proprement dit, deviendrait une pronourrice ou un Sporocystophore. C'est peut-être aussi de cette manière qu'il faut interpréter les observations faites par Siebold et V. Carus de grands Sporocystes qui en contiennent d'autres plus petits (1).

Bien qu'il nous manque des observations directes sur le développement de ces Sporocystophores, il est rationnel de croire que probablement on trouvera aussi de ce côté de bonnes raisons pour les considérer comme une espèce organique tout-à-fait particulière. En effet les Sporocystes résultent de la transformation directe d'un embryon infusoriforme de Distome; les Rédies sont procréés par un embryon dans cet état qui bientôt après meurt et se décompose; les Sporocystophores pourraient correspondre à l'embryon primitif, qui, après avoir subi une transformation, persisterait avec le Sporocyste qu'il procrée.

Cercaria virgula. — J'ai fait connaître cette espèce, parasite de la Pa-

(1) V. Carus, Zur naheren Kenntniss d. Generationswechsels. Leipzig, 1849, pag. 12.

ludine impure, dans mon Mémoire précédent, où j'ai établi ses rapports avec la *C. microcotyla* de la Paludine vivipare (1). Maintenant je dois ajouter que ces rapports sont encore plus frappants en présence du fait qu'il y a aussi pour la *C. virgula* deux sortes de Sporocystes. En effet dans quelques Paludines impures on n'en trouve que de grands, allongés, contenant un assez grand nombre de Cercaires: dans d'autres individus, au contraire, on ne trouve que des Sporocystes petits, presque sphériques, sur lesquels on peut voir une sorte de cicatrice ou d'ombilic plus ou moins apparent; et qui ne contiennent qu'un très-petit nombre de Cercaires, de 3 à 4. Ces Cercaires sont tout-à-fait identiques, quant'à la forme et à l'organisation, à celles qui sont engendrées dans les grands Sporocystes, seulement leurs dimensions sont beaucoup moindres, étant réduites à la moitié. Or en examinant un grand nombre de ces petits Sporocystes, on arrive bientôt à voir qu'ils sont le résultat d'une scission d'autres plus grands, de manière que ce que je viens d'appeler ombilic mérite réellement ce nom, parcequ'il correspond à l'endroit où la séparation s'est faite (fig. 9-10). La même différence entre grands et petits Sporocystes se voit pour la *C. microcotyla*, ainsi que je l'ai fait remarquer ailleurs (2); et cette différence reçoit maintenant son explication.

Il y a donc dans ce cas une multiplication numérique de Sporocystes par scission; mais il est intéressant d'observer que la puissance génétique de l'espèce n'y gagne rien, parceque le produit en Cercaires reste toujours le même, que les Sporocystes se divisent ou non; car chacun des petits Sporocystes secondaires reste toujours correspondant à une fraction du Sporocyste primitif.

On chercherait vainement la cause pour laquelle les Sporocystes de *C. virgula* et de *C. microcotyla* quelquefois se multiplient ainsi par scission, tandis que d'autres fois ils persistent dans leur intégrité primitive. Doit-on penser dans ces cas à une différence spécifique?

Ordinairement la scission est simple, c'est-à-dire qu'un seul Sporocyste se partage en deux de dimensions presque égales, mais quelquefois elle est plus compliquée; en effet j'ai trouvé de ces Sporocystes secondaires avec un ombilic aux deux extrémités opposées.

Cercaria cristata (fig. 11). — C'est à M. De la Vallette qu'on doit

(1) V. pag. 6.

(2) V. Premier Mémoire, pag. 9, fig. 5-6.

la connaissance de cette nouvelle forme assez singulière, si elle n'est pas la même décrite par Abildgaard, sous le nom de *C. varicans*, et dont M. Diesing a fait le genre *Cheilostomum* (1). Quoique elle appartienne au nombre des espèces plus rares, je l'ai rencontrée plusieurs fois dans différentes espèces de Mollusques, telles que les *Valvata piscinalis*, *Paludina impura*, *Planorbis submarginatus*, *Lymnæus stagnalis*, *L. palustris*; mais toujours en petit nombre d'individus, fréquemment associés à d'autres espèces de Cercaires. Ces circonstances suffisent déjà pour lui créer une position à part, car en général les autres Cercaires ne se trouvent que dans une ou deux espèces déterminées de Mollusques, presque toujours seules, c'est-à-dire sans mélange de Cercaires d'espèce différente, et toujours en très-grand nombre jusqu'à engorger les viscères du Mollusque. J'ajouterai que j'ai cherché inutilement les nourrices de cette espèce, même lorsque je voyais dans le champ du microscope des germes à tous les degrés de développement, reconnaissables au rudiment de la queue fourchue. Néanmoins M. De la Vallette dit que cette nourrice est allongée, filiforme.

Cette espèce a un corps conique, très-finement annelé; l'extrémité antérieure terminée par une sorte de trompe aiguë rétractile. On n'y voit pas de dard ni de ventouses ni de bulbe pharyngien, et dans l'intérieur du corps on ne remarque que des globules confus. La queue est longue et fourchue à son extrémité. Ce qui contribue surtout à caractériser cette espèce et à lui donner le nom provisoire qu'elle porte, c'est une crête repliée très-transparente qui surgit sur tout le long du corps.

Le résumé de tout ceci fait de la *C. cristata* un animal tout-à-fait problématique. S'il représente réellement l'état larvaire d'un Trématode, ce serait aux Monostomes qu'il faudrait le rapporter. Pourtant les larves connues de ce genre, ont une organisation bien plus compliquée, et proviennent toutes d'une Rédie.

Cercaria tuberculata (fig. 19-20). — C'est une espèce des mieux caractérisée bien qu'assez rare, et qui m'a été fournie encore par la *Paludina impura*. Son corps est parsemé de gros tubercules qui dans l'état de contraction le font paraître comme framboisé: et seulement dans l'état de distension se disposent en rangs réguliers. La masse interne du corps

(1) Systema Helminthum. Vol. I, pag. 293.

est opaque: et ce n'est que sous la compression qu'elle laisse voir distinctement les ventouses, dont la ventrale très-petite est portée en arrière. L'organe excrétoire est très-caractéristique pour sa forme de deux branches repliées très-longues, qui remontent de chaque côté jusqu'à la ventouse antérieure. Cette espèce s'enkyste avec la plus grande facilité, même sous le porte-objet du microscope. Elle m'a fait voir clairement qu'à la formation du kyste, après les couches concentriques de mucosité exsudées par le corps de la Cercaire, concourt la peau de celle-ci, qui se détache, et forme la paroi intérieure du kyste lui-même.

La Rédie procréatrice est munie des quatre appendices latéraux, dont deux antérieures aux côtés du cou, deux postérieures à la base du prolongement caudal. Le bulbe pharyngien est très-fort; l'estomac est long et plein d'un contenu jaune clair.

Distoma Paludinae impurae inerme et armatum (fig. 14-18). — Je dois revenir une troisième fois sur ce sujet. Il n'y a plus aucun doute que c'est à ces Distomes qu'il faut rapporter le genre *Heterostomum* que j'ai fondé en 1837, et qui, malgré l'honneur de l'adoption qu'il a reçu de M. Diesing, doit être définitivement rayé des catalogues. Les figures et la description que j'en ai donné la première fois se ressentent trop de l'âge auquel j'ai fait mes premières recherches, et de l'imperfection des instruments dont je faisais usage. Dans mon Mémoire de 1854 j'ai décrit et figuré de nouveau le petit Distome et sa Rédie, mais j'ai commis encore une inexactitude, très-excusable d'ailleurs, en confondant deux espèces qui sont parfaitement distinctes par des caractères sûrs et constants, mais difficilement saisissables. Ainsi l'espèce à laquelle j'ai donné le nom provisoire de *D. Paludinae impurae* doit être décomposée en deux: l'une inerme, l'autre armée.

Les traits de ressemblance entre ces deux espèces sont en si grand nombre, qu'il faut réellement une attention toute particulière pour les distinguer. Elles ont la même forme, les mêmes dimensions, $0^{mm},67$ en longueur: la même proportion dans le diamètre des deux ventouses, dont l'une, la buccale, mesure $0^{mm},13$, l'autre, la ventrale, $0^{mm},16$. Celle-ci est très-saillante, et s'attache à l'abdomen par une base plus étroite, par une sorte de pédoncule, ce qui fait rapporter les deux Distomes au sous-genre *Podocotyle* de Dujardin.

L'organisation intérieure est à-peu-près la même. A un pharynx très-court muni de son bulbe musculeux, fait suite un œsophage assez long.

Les branches de l'intestin sont simples. Le système vasculaire présente des ramifications latérales souvent variqueuses, qui remontent vers la ventouse antérieure, se divisant en ramuscules qui vont jusqu'au bord de celle-ci. C'est à ces vaisseaux que vont s'attacher par un pédoncule les cellules transparentes contenues en grand nombre dans le parenchyme du corps.

La peau est couverte d'aspérités disposées en rangs réguliers transversaux.

La Rédie procréatrice adulte de ces Distomes a tout-à-fait les mêmes caractères dans les deux espèces. Elle est simple, c'est-à-dire sans appendices latéraux: l'estomac est très-dilaté, de forme presque sphérique ou ovoïde, et dans son contenu jaune, formé par la substance du foie et du testicule de la Paludine, on voit très-souvent des spermatozoïdes altérés.

Les Distomes qui ont atteint leur développement complet dans la Rédie, en sortent pour s'enkyster immédiatement dans le corps de la Paludine, et pour être immédiatement aussi évacués dans cet état; ce qui fait qu'on en trouve souvent mais jamais en très-grand nombre dans la cavité acquifère de la Paludine. Le kyste n'a qu'une paroi très-simple, formée par l'ancienne cuticule du Distome, et celui-ci, contrairement à ce qui a lieu dans les autres espèces, reste toujours très-remuant dans sa prison, sans absorber aucune nourriture, ce qui fait croire que cet état ne doit être que très-passager.

Tout ce que je viens de dire s'applique également bien aux deux espèces. Maintenant voici les différences.

Le Distome armé présente au bord supérieur de la ventouse buccale un dard très-petit et conique; mais on ne voit pas des canaux particuliers se porter à cet organe, comme dans les Cercaires armées; pourtant, ainsi que je l'ai remarqué plus haut, de nombreuses cellules nucléées, évidemment secrétoires, s'attachent par un pédoncule aux vaisseaux qui serpentent aux côtés du corps pour remonter à la région céphalique (fig. 18). Je ne passerais pas sous silence que j'ai réussi une fois à voir très-distinctement des deux côtés sur le croissant de la ventouse antérieure, à la terminaison d'une petite branche vasculaire, quelques cils vibratiles: ce qui pourrait faire croire à l'existence dans ce Distome d'un système acquifère.

L'organe excrétoire, qui est très-développé, est constitué par un boyau qui fait quelques inflexions, et autour duquel sont groupées en grand nombre des cellules à contenu presque opaque, et qu'on distingue très-bien à la lumière réfléchie, à sa couleur blanche. C'est à ce caractère qu'on peut

reconnaître tout de suite l'espèce actuelle, même à l'aide d'une simple loupe.

Les aspérités des téguments sont des simples tubercules émoussés.

Les caractères particuliers de la Rédie adulte de cette espèce sont: le bulbe pharyngien très-petit, de $0^{mm},08$, et le tégument lisse, sans rides transversales. Malgré de nombreuses recherches, la génération endogène de Rédies filiales que j'ai cru voir une fois n'a pas été confirmée. J'ai trouvé, quoique rarement, des jeunes Rédies tout-à-fait libres dans le foie de la Paludine. Elles sont alors constituées par un tissu homogène dans lequel se forment d'abord un, puis deux vacuoles pleines d'un liquide diaphane, dont la première correspond au futur estomac, la seconde au bulbe pharyngien (fig. 14-15). Le bulbe musculaire de celui-ci ne se développe que plus tard. Mais ce qui est bien remarquable dans cette Rédie c'est la précocité de sa puissance procréatrice: elle n'est pas sortie de l'état embryonnaire, elle ne donne pas encore des symptomes de vie active, qu'elle présente déjà une cavité viscérale pleine de germes de Distomes (fig. 15).

Cette espèce dérange un peu la généralité de la loi, selon laquelle les larves armées des Trématodes sont le produit de simples Sporocystes, tandis que les Rédies ne donnent le jour qu'à des larves de la catégorie des non-armées (V. *Deuxième Mémoire etc. pag.* 20). Pourtant si on réfléchit un instant on trouvera que l'exception n'est pas si capitale qu'elle le paraît au premier abord; en effet la Rédie qui commence à engendrer les germes du Distome armé de la Paludine impure est à un état si arriéré d'organisation et de vie, qu'elle a à-peu-près la valeur d'un simple Sporocyste.

D'ailleurs ce Distome ne possède en commun avec les autres larves armées des Trématodes que le dard: les canaux particuliers qui vont y aboutir manquent: de manière que même pour ce caractère cette espèce ne rentre pas tout-à-fait dans la catégorie des larves armées, et sert plutôt à établir un passage de cette catégorie à celle des larves non-armées.

Passons maintenant à l'espèce voisine du Distome inerme. Elle se distingue très-bien par l'absence du dard, et parceque les aspérités de la peau sont de véritables épines. C'est à cette espèce qu'il faut rapporter les descriptions et les figures de mes travaux antécédents, auxquelles il faut faire les corrections suivantes. Ce que j'ai représenté comme des piquants au bord de la ventouse antérieure doit être entendu pour des papilles ou des lobes décidues. L'organe excrétoire a la forme d'une ca-

vité arrondie, simple, sans amas de cellules périphériques, caractère qui est propre à l'espèce armée. La figure 31 de mon premier Mémoire (1854) doit être corrigée à cet égard.

La Rédie (fig. 16) se distingue de la précédente par un bulbe pharyngien un peu plus fort, par des téguments plus épais, avec des rugosités transversales qu'on voit mieux qu'ailleurs à la région du cou. Les germes des Distomes ne s'y développent que tard, lorsque la Rédie a déjà commencé à manger, et qu'elle est douée de toute son activité locomotrice. J'y ai vu une fois bien distinctement l'ouverture qui donne issue aux Distomes: elle est située tout-à-fait à côté de la bouche. C'est à M. De la Vallette qu'on doit la découverte de cette ouverture qui complique l'organisation des Rédies, mais qui est très-difficilement visible.

Dans quelques-unes de ces Rédies j'ai remarqué quelques plaques revêtues de cils immobiles, parsemées en différentes régions du corps. Elles sont sans doute des résidus de l'embryon primitif qui a engendré les Rédies. Je cite avec satisfaction cette circonstance, n'ayant jamais été assez heureux jusqu'à présent, pour saisir les premières phases de la procréation des Rédies, telles qu'elles ont été vues par Siebold dans le *Monostomum mutabile*.

L'analogie frappante de ce Distome inerme avec le *D. perlatum* des Tanches décrit pour la première fois par Nordmann, m'a engagé à chercher la preuve matérielle de leur identité spécifique. A cet effet j'ai pris des Tanches pêchées dans les marais où ledit parasite abonde, et j'en ai examiné soigneusement le contenu intestinal. J'y ai toujours trouvé des individus de *D. perlatum*, quelquefois même en grand nombre; et avec un peu de persévérance j'ai enfin trouvé des individus de cette espèce dont les organes sexuels n'étaient pas encore entièrement développés, et que personne n'aurait sû distinguer des Distomes inermes de la Paludine impure sortis à l'instant même de leur kyste. J'ai pensé alors à confirmer le résultat de cette observation par l'expérience. J'ai placé deux Carpes dorées dans un bassin dans lequel j'ai laissé tomber des fragments de Paludines impures pleins de Distomes inermes, dont plusieurs déjà enkystés. Après une quinzaine de jours j'ai fait passer au microscope le contenu intestinal des mes deux Carpes. Malheureusement le zèle mal placé de l'aide de mon laboratoire avait dans l'interval changé l'eau aux Carpes, et jeté par conséquence les corpuscules qui y étaient en suspension. Malgré ça j'ai trouvé dans l'intestin d'un de ces

poissons deux individus de *D. perlatum* parfaitement développés. Voilà donc encore une espèce du petit nombre de Trématodes dont l'histoire génétique est connue.

J'ai fait la même expérience avec le Distome armé, mais jusqu'à présent sans un résultat assez certain. On trouve aussi dans les Tanches des Distomes adultes qui rassemblent parfaitement au *D. perlatum* à tégument lisse; mais je ne sais pas encore d'une manière positive si on doit rapporter ces Distomes à une nouvelle espèce, probablement la forme adulte du D. armé, ou plutôt les considérer comme des individus de *D. perlatum* dont les épines cutanées sont tombées. J'ai fait manger des Distomes armés de Paludine à des petits Saumons de trois mois: après quinze jours ces Distomes étaient tout-à-fait vivants dans l'intestin de ces poissons; les deux branches intestinales de ces parasites contenaient des grandes gouttes huileuses, les testicules étaient un peu plus développés, mais on n'y voyait pas de traces d'œufs. Cette expérience démontre que le Distome armé de la Paludine impure est destiné à devenir adulte comme parasite des poissons: et si elle n'a pas été plus complète, ça dépend probablement de l'âge trop peu avancé des Saumons qui ont servi à l'expérience.

Distoma Planorbis carinati (fig. 12-13). — Voici encore des Rédies qui engendrent directement des Distomes. J'en ai trouvé en abondance dans le Planorbe caréné d'un marécage à l'est de Turin. Ces Rédies sont allongées, cylindriques, sans appendices latéraux, à estomac court et sphérique. Elles contiennent quelquefois un assez grand nombre de germes disposés régulièrement, comme en quinconce, et les Distomes qui s'y développent parviennent à un état plus avancé que dans les autres espèces que j'ai vu jusqu'à ce jour.

Ce Distome est le représentant exact du Distome inerme de la Paludine impure. Son corps est épineux: la ventouse buccale est ample et présente à son bord des lobules membraneux; la ventouse ventrale est de même grandeur. Le bulbe pharyngien fait suite directement à la bouche: entre lui et les deux branches de l'intestin il y a un œsophage assez long. On voit clairement dans cette espèce les deux vaisseaux latéraux dont les ramifications se réunissent à la partie postérieure du corps, pour s'ouvrir dans l'organe excrétoire qui a la forme d'une vésicule dans laquelle on remarque des pulsations à rhytme irrégulier. Entre cet organe et la ventouse ventrale on aperçoit un rudiment du système sexuel borné dans les individus plus jeunes, à un simple organe vésiculeux, qui se com-

plique dans les individus plus adultes et présente aussi un canal replié qui remonte jusqu'au côté gauche de la ventouse ventrale.

Il faut chercher l'état parfait de cette espèce dans les Distomes des poissons, dont DUJARDIN a fait son sousgenre *Crossodera;* probablement dans le *D. (Crossodera) nodulosum.*

Cercaria? Coni mediterranei. — J'ai passé quelques jours du mois d'août aux bords de la Méditerranée, dans le but principal de faire quelques recherches sur les parasites des Mollusques marins: mais la localité battue par les vagues n'était guère favorable, aussi je n'ai pu trouver qu'une seule fois dans le *Conus mediterraneus* une belle Rédie (fig. 21) à forme de flacon, à cou long mais ordinairement retracté, bulbe pharyngien très-gros, intestin court, système vasculaire bien développé. Malheureusement encore ces Rédies ne contenaient que des germes.

Cercaria vesiculosa (fig. 22-23). — J'ai déjà fait connaître (1^er^ *Mémoire pag.* 12) les Sporocystes de cette espèce, dans lesquels j'ai vu pour la première fois la multiplication par scission. Un envoi de Paludines (*P. vivipara* et *achatina*) du Lac Majeur m'a fait reprendre ce sujet.

Le plus grand nombre de ces Paludines présentait, surtout à la région qui touche à la columelle, un aspect particulier de la membrane qui forme la paroi du réservoir de l'eau, et se continue sur le testicule ou sur l'ovaire. L'habitude de ce genre d'observation m'a fait soupçonner tout de suite l'existence de quelques parasites. Cette membrane épaissie et opaque dans quelques individus, prenait par degré dans la plus part une teinte jaunâtre-foncée; la portion surtout qui passe sur le testicule prenait souvent l'aspect d'un tissu laxe filamenteux, infiltré de liquide.

Des portions de cette membrane séparées, et déchirées sur le porte-objet du microscope m'ont fait voir en effet grand nombre de corpuscules vésiculeux et de boyaux ayant tous les caractères des Sporocystes. Les uns petits, opaques, blancs à la lumière réfléchie, tantôt ronds, tantôt allongés et avec des étranglements plus ou moins prononcés, ont été reconnus immédiatement par moi comme les jeunes Sporocystes de la *C. vesiculosa* en train de se multiplier par scission transversale, ou déjà divisés, et présentant dans ce cas une sorte d'ombilic proéminent.

D'autres (fig. 23) en bien plus grand nombre étaient des boyaux de forme irrégulière, souvent repliés, de longueur variable entre $0^{mm},45$ et $0^{mm},52$ présentant une ou quelquefois deux dilatations pleines d'un liquide diaphane, et contenant des petits germes globuleux, transparents. Ces

cavités sont creusées dans la substance qui remplit les boyaux, et dans laquelle on voit une quantité plus ou moins grande des granules opaques.

Je n'ai pas tardé à me convaincre que les deux sortes de corps que je viens de décrire ont entre eux les rapports les plus intimes; que les boyaux ne sont autre chose que des Sporocystes adultes de la *C. vesiculosa*. Les granules qui rendent trouble et opaque le contenu des jeunes Sporocystes se dispersent par l'assimilation d'une nouvelle substance transparente, au fur et à mesure que ces Sporocystes grandissent et passent à la forme de boyau.

Comme tous ces boyaux que j'ai rencontré en grand nombre dans une première série d'observations ne contenaient aucun être vivant, je me suis demandé si ce était le cas de les considérer comme des Sporocystes vides, ou des Sporocystes dans lesquels les Cercaires n'étaient pas encore formées. L'irrégularité de la forme, la déchiqueture des contours me faisait pencher d'un côté pour la première de ces deux interprétations; tandis que l'homogénéité et la transparence du contenu, et surtout la présence des germes me faisaient incliner vers la seconde. Enfin je suis sorti de toute incertitude par la rencontre des véritables produits vivants de ces Sporocystes.

Un de ces produits est la *C. vesiculosa* (fig. 22) que je n'avais trouvé jusqu'ici que très-rarement et dans un état très-arriéré de développement. Cette espèce, toujours en petit nombre d'individus, 3-6 dans chaque Sporocyste, est très-vivace: son corps est d'une couleur plus foncée que celui de la *C. microcotyla* si commune dans les Paludines; le dard un peu plus court, et relativement plus gros: les organes (glandules) accessoires, probablement caractéristiques des Cercaires armées des Paludines, sont très-réduits: presque atrophiques; la ventouse ventrale est assez grande et bien distincte: les canaux latéraux qui aboutissent au dard sont très-dilatés: dans la substance du corps sont parsemés des corpuscules ronds de substance grasse, qu'on a pris pour des vésicules, ainsi que le nom de l'espèce l'indique.

L'organe excrétoire se prolonge jusqu'à la ventouse ventrale: on voit en effet paraître de temps en temps, dans les mouvements de l'animal, une ligne transparente dans le milieu du corps, en continuation de la cavité située près de la base de la queue.

Du Tétracotyle (fig. 24-31). — Après avoir cherché vainement pendant une suite d'années si l'être mystérieux auquel j'ai donné le nom de

Tétracotyle était produit aussi par des Sporocystes, conformément à ce qu'on devrait croire d'après les figures de Steenstrup, me voilà agréablement surpris par la découverte que j'en ai faite dans les Sporocystes de *C. vesiculosa*. J'ai donc saisi avec un véritable empressement cette occasion favorable pour reprendre des nouvelles recherches sur ce sujet.

Cet être singulier a passé pour la première fois sous les yeux de Steenstrup, qui pourtant n'a pas fait attention aux particularités qui le tiennent à distance des autres Trématodes connus, et l'a pris pour le Distome de la *Cercaria armata* enkysté avant le temps, dans la cavité même du Sporocyste. M. Siebold en fait mention en ces termes: « L'hel-» minthe *à peau épaisse* dont parle Steenstrup, et qu'il a figuré à la » pl. 111, fig. 5, *e*, *f*, *g*, n'appartient pas à la série des métamorphoses » de la *C. armata*. Ces helminthes sont des Trématodes agames bien » surprenants, que j'ai rencontré aussi très-souvent dans les nids de Cer-» caires des Planorbes et des Lymnées. Le réseau irrégulier de canaux » renfermant un fluide granulaire, est l'organe excrétoire très-développé » de cet helminthe, infiniment différent de l'organe excrétoire à deux » branches courtes du Distome qui provient de la *C. armata*. Entre la » bouche et la ventouse ventrale de cet animal on aperçoit deux demi-» cercles que Steenstrup a pris pour les terminaisons dilatées de la ca-» vité digérente, mais qui sont tout simplement deux fossettes creusées » obliquement dans la peau épaisse, et qui mènent à une cavité dans » le parenchyme du ver (Erichson, Archiv. 1843, II, pag. 325). »

Plus récemment M. Moulinié a eu occasion d'étudier de nouveau le Tétracotyle de la Paludine vivipare, dont il parle diffusément; mais il s'occupe surtout à prouver que cet animal est indépendant des Rédies ou des Sporocystes auxquels j'ai voulu le rattacher; qu'il se trouve rarement et par hasard dans la cavité de ces corps reproducteurs; qu'il se rencontre au contraire bien plus souvent à l'état de liberté dans le corps des Mollusques. C'est là le nœud de toute la question relative à cet animal très-énigmatique, dans lequel cependant il ne faut pas voir plus de mystères qu'il y en a réellement.

Le Tétracotyle (fig. 26) que j'ai trouvé en abondance dans les Sporocystes de *C. vesiculosa* ne diffère sensiblement en rien de celui que j'avais vu précédemment dans les Rédies de *C. echinatoides*. Les deux ventouses latérales méritent réellement ce nom; elles se composent de fibres rayonnées, et n'affectent ordinairement une disposition à éventail

que par le plissement qu'elles ont subi. Au-dessous de la ventouse ventrale on remarque par transparence deux organes vésiculeux, à contours faiblement indiqués, qui se joignent le long de la ligne médiane, et au-dessous desquels on aperçoit une cavité qui communique à l'extérieur par une ouverture très-distincte. Je n'ai pas vu cette fois le système digestif, mais en compensation j'ai découvert de chaque côté du corps un vaisseaux tortueux se décomposant en ramifications très-fines et déliées, et qui paraît tout-à-fait séparé du réseau de l'appareil excrétoire. Ce réseau est très-diffus dans tout le corps, et par des sinus dilatés, pleins d'une substance granulaire distribuée d'une manière confuse mais symmétrique, présente un dessin tout particulier et caractéristique. La matière contenue dans cet organe sort de temps en temps avec force, et on peut voir alors qu'elle est formée par des petits globules; on y reconnaît même des vésicules extrèmement microscopiques.

Ce Tétracotyle est-il enkysté ou non? Le double contour extérieur est-il dû à un tégument épais, ou à la paroi d'un kyste? Nous allons voir que ce parasite est réellement enkysté, mais d'une façon toute particulière. Pour le moment il suffira de faire attention à ce que si on comprime l'animal un peu fortement entre deux lames de verre, l'enveloppe extérieure éclate, et le contenu en sort avec précipitation; ce qui, dans les Trématodes, n'a lieu que pour des individus enkystés.

Ordinairement on trouve dans les Sporocystes de *C. vesiculosa* un Tétracotyle isolé, avec d'autres germes peut-être avortés: d'autres fois on en trouve deux. L'association de ce parasite avec quelques individus bien reconnaissables de *C. vesiculosa* n'a été vue par moi que très-rarement; assez pourtant pour exclure toute espèce de doute sur l'identité des Sporocystes (fig. 24).

Le grand nombre de ces Sporocystes que j'ai pu passer en revue m'a offert l'occasion heureuse de rencontrer le Tétracotyle à l'état embryonnaire, et d'en suivre le développement. On remarque quelquefois dans l'intérieur de ces sacs un ou deux germes différents de ceux des Cercaires par des dimensions beaucoup plus fortes, comme à la fig. 25. Dans d'autres Sporocystes on voit que ces germes ont pris des dimensions telles à en occuper presque tout l'espace intérieur: on dirait alors d'avoir sous les yeux des grands Distomes en cours de formation, mais très-distincts par les caractères du tissu, formé par des grands globules hyalins entrecoupés par les filaments entrecroisés d'une substance sarcodique parsemée d'autres

petits globules plus réfringents (fig. 27). Leur diamètre longitudinal parvient à $0^{mm},63$, le transversal à $0^{mm},38$: et ces dimensions sont telles qu'elles donnent juste par l'enkystement celles du Tétracotyle. Dans cet état ils présentent déjà des mouvements très-lents mais appercevables, de telle manière que les contours du corps changent dans la durée de l'observation. Les ventouses latérales commencent à paraître sous forme de deux petits espaces transparents oblongs, très-rapprochés, à la partie antérieure; mais la première à se dessiner nettement, à prendre sa structure fibreuse c'est la ventouse ventrale. Peu-à-peu ces ventouses prennent leur position respective, et on voit se former en même temps (fig. 28) des organes vésiculeux transparents dans l'intérieur du corps, au-dessous de la ventouse ventrale. Pour borner les nombres des figures à celles qui sont nécessaires à l'intelligence des phases principales du développement du Tétracotyle, je laisse de côté celles qui seraient intermédiaires entre les fig. 27 et 28, qu'on peut du reste se représenter très-bien par la pensée.

Au fur et à mesure que le Tétracotyle s'organise le parenchyme de son corps change de structure; il devient plus homogène: les petits globules réfringents se disposent en réseau: ces changements commencent à la partie antérieure du corps, et se propagent peu-à-peu à la partie postérieure. Comparez à cet effet les deux figures 27 et 28.

Maintenant l'enkystement du Tétracotyle commence. La forme du corps tend toujours plus à se ramasser, à s'arrondir: de toute sa surface, hormis à l'entour des ventouses, et en correspondance du pore excrétoire, suinte une matière hyaline qui se condense et forme la membrane du kyste. Les ventouses se retirent peu-à-peu par l'ouverture de cette membrane restée à leur base, et qui persiste sous la forme d'une fente semilunaire. La fig. 29 représente cet état de choses; on y voit en effet les ventouses qui ne sont pas encore tout-à-fait rentrées, et qui font hernie au-dehors. Mais bientôt l'enkystement est achevé, et la Tétracotyle se présente alors sous sa forme ordinaire. Si on l'examine au microscope en abaissant la platine jusqu'à porter au foyer de l'objectif la surface de l'animal, on voit alors, comme à la fig. 30, la membrane épaisse du kyste percée par cinq ouvertures disposées en croix, dont quatre correspondent aux ventouses, et la dernière à l'orifice de l'organe excrétoire; la membrane est ridée à stries en partie concentriques et en partie rayonnées autour de chaque ouverture. L'animal dans cet état fait encore des

mouvements de torsion très-faibles; et si on le comprime convenablement il fait sortir quelquefois du trou buccal le fond de la ventouse sous la forme d'une petite trompe, tandis que du trou postérieur il se vide d'une quantité de matière globuleuse. La question de savoir si le Tétracotyle est un animal enkysté ou non, serait donc résolue d'une manière affirmative. Cependant cet enkystement est si différent de celui des autres Trématodes, que l'opinion contraire pourrait toujours avoir quelque partisan: ce qui du reste importe fort peu au fond de la chose.

D'après ce que je viens de dire il n'est plus permis de douter que le Tétracotyle ne soit l'enfant légitime des Rédies ou des Sporocystes, aussi légitime que les Cercaires elles-mêmes.

Suivant M. Moulinié la présence des Tétracotyles dans les nourrices des Trématodes n'est qu'accidentelle, et on trouve plus souvent ces parasites tout-à-fait à nu dans les viscères des Mollusques. Même sur ce point mes observations ne sont pas entièrement d'accord avec celles du naturaliste genevois, qui d'ailleurs n'a pas réfléchi que les Tétracotyles libres pourraient n'être autre chose que des individus abandonnés par les nourrices des Cercaires. L'observation suivante justifie entièrement cette manière de voir. Je fus frappé un jour du grand nombre de Tétracotyles libres trouvés dans un *Lymnaeus auricularis* du Lac Majeur: pourtant, en cherchant avec attention, j'ai trouvé avec ces parasites quelques débris que j'ai cru rapporter à des Sporocystes. Je n'eus qu'à ouvrir une seconde Lymnée pour trouver les mêmes Tétracotyles dont la plus part étaient contenus encore dans des Sporocystes de *C. furcata* (fig. 31): j'en ai même vu quelqu'un dans les premières périodes de développement.

Je n'ai pas eu occasion de revoir le Tétracotyle à l'état où je l'ai représenté à la fig. 15 de mon premier Mémoire, mais je suis toujours garant de l'exactitude de cette figure, même à l'égard du système digestif. Je crois que même dans cet état le parasite est enkysté, et je pense qu'il le reste pour toute sa vie. Ceux qui ne veulent pas admettre que cet animal soit enkysté, diront qu'il est pourvu d'une double peau. D'une manière ou de l'autre on parvient nécessairement à conclure que le Tétracotyle, même sous ce point de vue, se sépare de tous les autres Trématodes; ce qui rend encore plus probable l'opinion qu'il ne soit pas destiné à devenir un animal complet, muni d'organes sexuels.

M. Moulinié a fait l'intéressante découverte de Tétracotyles enkystés

en grand nombre aux environs du cœur, et sur le trajet des gros vaisseaux, dans les Perches du Lac de Genève; et il a très-bien reconnue une forme analogue dans le Distome enkysté trouvé par Dujardin dans le *Cyprinus idus* et *erythrophtalmos* (1). J'ai cherché envain jusqu'à présent des kystes semblables dans les Perches du Lac Majeur. Ces Tétracotyles sont, à ne pas en douter, des individus égarés pourvus d'un kyste secondaire par les tissus de l'animal dans lesquels ils se sont fixés accidentellement et non pour y attendre les conditions naturelles d'un développement ultérieur (2). Dans le Tétracotyle des Perches M. Moulinié a vu un intestin à deux branches simples, tandis que ces branches sont ramifiées dans celui que j'ai trouvé libre dans le testicule et le foie de la Paludine vivipare. Y aurait-il donc différentes espèces de Tétracotyles? Ceci compliquerait singulièrement la question à côté du fait, que, malgré tant de belles découvertes récentes en helminthologie, on persiste à ne connaître aucun animal qui puisse être considéré comme un Tétracotyle adulte.

On peut donc regarder comme suffisamment démontré que le Tétracotyle, loin d'être un parasite accidentel des Sporocystes ou des Rédies, en est le produit légitime. Voilà pour le moment tout ce que l'on peut présenter comme résultat direct de l'observation. A partir de là on entre dans le domaine des hypothèses; mais tout est permis plutôt que de croire que les Cercaires et les Tétracotyles, engendrés par un même parent, parviendront chacun de leur côté à l'état parfait. Une seule de ces formes est prédestinée à un développement ultérieur, jusqu'à avoir des organes sexuels; c'est la forme de Cercaire: l'autre doit rester à permanence à l'état agame. Ceci n'étant pas contestable, il nous reste à chercher un rôle pour le Tétracotyle.

---

(1) Hist. des Helminthes, pag. 463.

(2) On doit distinguer l'enkystement normal ou physiologique des Trématodes et l'enkystement fortuite ou forcé. Le premier, qui est un véritable état de nymphe, n'a lieu qu'à une époque donnée, et dans des conditions déterminées; le second peut avoir lieu en tous temps et dans des conditions différentes de la vie des parasites égarés. Je crois, par exemple, que les Distomes enkystés, bien que doués d'organes sexuels, trouvés par M. Pontaillé et par M. Gastaldi dans les muscles des Batraciens, sont encore des individus égarés qui se sont enkystés lorsque les organes sexuels s'étaient déjà formés.

L'enkystement du Tétracotyle, ainsi que j'ai dit plus haut, est tout-à-fait particulier. On doit le considérer comme normal ou constant, mais non pas comme correspondant à une période de nymphe. Dans la Perche du Lac de Genève cet animal serait doublement enkysté.

En le considérant comme un individu destiné à reproduire par spores les Sporocystes ou les Rédies dont il provient, j'ai déjà eu soin d'ajouter que ce n'était là qu'une pure et simple hypothèse, pour laquelle je n'avais pas de grandes prétensions. Les recherches postérieures n'ont pas amené au jour un seul fait contraire à cette supposition, qui peut compter au moins un argument en sa faveur dans la fraternité des Cercaires et des Tétracotyles.

On pourrait penser que les Tétracotyles sont des parasites des Sporocystes ou des Rédies; mais d'après ce que je viens d'exposer il n'y aurait pas une bonne raison pour ne pas en dire autant des Cercaires elles-mêmes. Le mieux est d'accepter les faits, et de ne considérer les hypothèses que comme des programmes pour des recherches ultérieures.

J'ajouterais encore que jusqu'à présent je n'ai trouvé le Tétracotyle que dans le *Lymnaeus auricularis* et la *Paludina vivipara* et *achatina* du Lac Majeur; jamais dans les individus de ces espèces qui habitent dans les environs de Turin, non plus que dans les petites espèces de ces deux genres, qui bien souvent fourmillent de Cercaires. Autre problème à débrouiller sur cet animal énigmatique.

M. De la Vallette annonce dans une note à la fin de sa dissertation, qu'il a vu très-souvent le Tétracotyle, non-seulement dans les Rédies de *C. echinifera* (la même que ma *C. echinatoides*), mais aussi de *C. echinata;* et qu'il l'a même rencontré jusqu'au nombre de 50 individus dans le testicule du *Pl. corneus;* mais il n'ajoute pas un seul mot sur l'organisation et sur l'histoire de ce parasite.

A cet exposé j'ajouterai quelques observations générales.

Le catalogue des Trématodes à l'état larvaire augmente toujours considérablement, à chaque série de recherches; et encore il est bien loin de ce qu'il sera un jour. Malheureusement le nombre des espèces dont on connaît positivement l'histoire génétique complète est toujours très-restreint, et il n'augmente qu'en proportion minime. Dans le courant de ce Mémoire nous en avons vue une s'ajouter à ce nombre. Cependant le plan général de développement, soit d'une manière sure et complète par l'observation directe, soit en comblant par analogie des lacunes plus ou moins grandes, peut être considéré comme tracé relativement à trois genres de cette sous-classe: c'est-à-dire pour les Monostomes, les Amphistomes, et surtout pour les Distomes.

Quant à ce dernier genre, la nécessité d'une révision se fait sentir plus que jamais. On trouvera peut-être un rapport entre ses subdivisions les plus naturelles, et la génération par Rédies, ou par Sporocystes, ou par Sporocystophores, de même que par des Rédies avec ou sans appendices latéraux, etc.

Pour ce qui regarde les autres genres de Trématodes, nous sommes parfaitement dans la même position que pour le *Taenia solium* de l'Homme, dont l'histoire génétique est connue et démontrée expérimentallement, vis-à-vis du *Bothriocephalus latus* sur le compte duquel on ne peut que se perdre en conjectures. C'est à peine si nous avons pour quelques-uns un faible rayon de lumière donné par l'analogie. Ainsi nous ne savons encore rien de l'état larvaire des Holostomes, mais la fréquence d'individus de ce genre enkystés dans la peau de quelques poissons d'eau douce (l'*Acanthopsis taenia* chez nous, par exemple), nous fait croire qu'il y a aussi pour ces parasites un état de larve, et que probablement cette larve est armée.

D'un autre côté il y a des Trématodes dans lesquels la reproduction se fait sans métamorphose ni génération alternante. Tel est p. e. l'*Aspidogaster conchicola*, d'après les recherches d'Aubert (1). Peut-être les Tristomes sont-ils dans le même cas?

L'obscurité la plus complète persiste à l'égard de la Douve du foie.

On voit donc combien il reste encore à moissonner dans un terrain sur lequel l'investigation n'a fait que ses premiers pas.

On peut admettre comme loi générale que le développement des Cercaires ne se fait que dans des mollusques adultes, ou au moins capables de se reproduire. Jamais je n'en ai rencontré dans des mollusques jeunes.

Malgré le cas exceptionnel que j'ai exposé et analysé à propos du Distome armé de la Paludine impure, la loi que les Sporocystes donnent origine exclusivement à des Cercaires armées, paraît constante. A ces deux types nous avons vu s'en ajouter un troisième, celui des Sporocystophores, qui donnent également origine à des Cercaires armées caractérisées par une queue très-courte. Un quatrième type est celui des Cercaires inermes à queue bifide (*Bucephalus* et *Malleolus*), qui sont produites par des Sporocystes très-allongés, quelquefois filiformes, contractiles,

(1) Siebold *und* Koelliker. *Zeitschrift.* Vol. 6.

et même doués d'une grande vivacité de mouvements aux premières périodes de leur vie. C'est ce que j'ai vérifié pour des jeunes Sporocystes de *C. furcata*, et que M. De la Vallette a vu également pour ceux de *C. gracilis* et *fissicauda*.

Les Rédies et les Sporocystes nous offrent le plus bel exemple, dans le Règne animal, de génération organique par spores, procédé physiologique bien différent de la *Parthenogenesis*, ou génération ovipare sans fécondation préalable. Ces spores ou germes des Trématodes ont leur origine *par formation libre* dans la cavité de la nourrice, sans que la nature ait destiné un organe particulier pour cette fonction, un organe germigène (*Keimstock* des Allemands): c'est la loi générale pour la génération sporipare, ou germipare.

M. de Siebold dans son ouvrage classique sur la *Parthenogenesis* (1) persiste à voir dans l'histoire génétique des Pucerons un exemple analogue: c'est-à-dire une génération par nourrice. Mais que manque-t-il à l'organe germigène (*Keimstock*) des pucerons vivipares, pour en faire un véritable appareil sexuel, puisqu'il a la même position, la même forme, le même nombre de tubes que l'ovaire des femelles vivipares? Il ne lui manquent que la vésicule séminale et les glandes sébifiques, par la raison que ces organes secondaires sont inutils à des individus chez lesquels l'accouplement n'a pas lieu, et qui ne pondent pas des œufs.

M. Leydig (2) d'ailleurs a très-bien démontré que le développement des jeunes dans les tubes sexuels des pucerons vivipares se fait selon les mêmes lois embryogéniques qui gouvernent la formation de l'insecte de l'œuf. La manière de voir d'Owen qui ramène la génération vivipare des pucerons à la véritable parthénogèse est donc bien préférable. Les recherches récemment publiées par M. Heyden (3) viennent encore à son appui (4).

---

(1) *Wahre Parthenogenesis bei Schmetterlingen und Bienen. Leipzig*, 1856.

(2) Siebold *und* Koelliker *Zeitschrift.* Vol. 2.

(3) Bibliot. univ. de Genève. Juin 1857, Bulletin, pag. 144.

(4) Si on veut trouver dans les Insectes un exemple de véritable génération germipare, analogue à celle que nous présentent les nourrices des Trématodes, il faudra le chercher dans quelques insectes parasites. J'ai déjà fait connaître à ce propos (*a*) un fait curieux qui devait naturellement surprendre les entomologistes, mais qui ne persiste pas moins, à l'heure qui court, dans toute sa valeur primitive. Il s'agit d'un Ptéromalien (*Ophioneurus*) parasite des œufs du *Rhynchites betuleti*,

(*a*) *Annales des Sciences naturelles.* 3.me série, vol. 13, pag. 294. - *Nuovi annali delle Scienze naturali.* Bologna, 1852.

et qui a, dans sa carrière vitale, une période de plus que les autres insectes; c'est-à-dire, une première larve, une seconde larve, la nymphe, et l'insect parfait. J'ai observé que la première larve ne subit pas de métamorphose, mais produit la seconde dans son intérieur, se transformant par distension en un kyste qui contient celle-ci qui est la véritable larve destinée à se transformer en nymphe.

La première larve est donc physiologiquement comparable à une Rédie ou à un Sporocyste, avec la seule différence que le germe produit est unique, de telle manière qu'il n'y a pas multiplication, mais renouvellement pur et simple d'individu.

J'ai répété chaque année à la saison favorable ces observations, et toujours avec le même résultat. L'habitude me rend maintenant ces recherches très-expéditives, parceque je suis en état de reconnaître tout de suite, à l'œil nu, si un œuf de *Rhynchites* est attaqué ou non par le parasite, d'après le seul degré de transparence de l'œuf lui-même. On peut alors en ramasser un nombre suffisant pour avoir une suite complète de ces parasites à différentes périodes de leur histoire génétique.

Maintenant le procédé génétique de l'*Ophioneurus* est-il une exception tout-à-fait isolée et sans exemple dans la famille immense des Ichneumonides? Dans l'ignorance où nous sommes sur les premières phases du développement de ces animaux, dont on ne rencontre ordinairement que des larves déjà avancées dans la vie, il est peut-être permis de croire que ceci ne sera pas. Nous pouvons même, dès à présent, nous servir de l'histoire de l'*Ophioneurus* pour interpréter quelque observation fragmentaire restée sans explication. M. Schaum a peut-être raison de voir quelque chose d'analogue à l'emboîtement des deux larves de mon Ptéromalien, dans la larve d'*Anomalon* que M. Ratzeburg a trouvé renfermée dans un sac membraneux dont il ne saurait expliquer la formation (*a*). L'analogie devient encore plus étroite par la circonstance que les larves d'*Anomalon* se présentent sous deux formes différentes. Au commencement elles sont fournies d'un prolongement caudal et manquent de trachées, précisément comme la première larve d'*Ophioneurus;* plus tard elles prennent la forme ordinaire et plus connue des larves de cette famille, conformément encore à la forme de la seconde larve de l'*Ophioneurus*.

M. Ratzeburg, à la première nouvelle qu'il reçut de M. Siebold de ma découverte, n'a pas trouvée bonne l'interprétation que j'en avais donné : et il pense que le corps microscopique et problématique que j'ai décrit comme un animal particulier, c'est-à-dire comme la nourrice de la larve du Ptéromalien, pourrait bien n'être autre chose que la coque de l'œuf de cet insecte, conformée d'une façon toute particulière (*b*).

Je suis frappé réellement de la ressemblance de la première larve de mon Ptéromalien avec quelques corps donnés comme des coques d'œuf d'Ichneumonides, p. e. avec la coque du *Paniscus virgatus* figurée par Newport (*c*); mais ceci me porterait presque à soupçonner que cette coque soit plutôt la peau desséchée d'une première larve ou nourrice, qui se fend en deux valves, au lieu de se distendre et suivre, comme dans l'*Ophioneurus*, l'accroissement de la seconde larve, produite dans son intérieur.

Je n'insisterais d'avantage sur ce sujet. Ce que j'en ai dit n'a d'autre but que d'engager les entomologistes à faire des recherches sur les premières phases embryogéniques des Ichneumonides, pour voir si les faits isolés dont j'ai fait mention sont en rapport avec une loi générale.

(*a*) Taschenb. *Archiv. 1833. 2.* Pag. 145.

(*b*) *Die Ichneumonen der Forstinsecten. 3.e Band.* Pag. xi.

(*c*) *Transat. Linn. Society. Vol. XXI.* T. 8, fig. 14, 15.

NOTE

Sur la formation des perles (1).

Lorsqu'en 1852 j'ai repris une suite de recherches sur les larves des Trématodes, je suis parvenu par hasard à reconnaître des restes de ces parasites, notamment du *Distoma duplicatum*, comme noyau de plusieurs excroissances et rugosités de la nacre de l'Anodonte, dont quelques-unes présentaient tous les caractères des véritables perles. L'idée m'est venue alors que la nature pourrait bien se servir de ce moyen pour la formation des perles en général; et j'ai développé cette idée dans un petit Mémoire inséré dans un journal littéraire de Turin *il Cimento*, en la fortifiant des considérations suivantes: 1° que les perles ont toujours un corps étranger comme noyau: 2° que ce corps étranger est toujours formé par une substance animale: 3° que de toutes les hypothèses imaginées sur la nature et la dérivation de ce corps étranger aucune ne résistait à la critique: 4° que dans certains cas la présence de résidus de parasites comme noyaux des perles étant positivement démontrée, il était très-rationnel d'en faire l'application en thèse générale pour les cas plus nombreux ou ledit noyau ne laisse voir aucune trace ni de forme ni d'organisation.

Plus tard j'ai trouvé dans quelques perles un noyau formé par un cadavre d'un acarien, le *Limnochares anodontae*, ce qui venait naturellement à l'appui de mon opinion, tout en laissant à des recherches spéciales pour chaque cas particulier, la détermination de la nature de l'être vivant qui ayant été enveloppé par des couches de nacre, aurait produit une perle.

M. Küchenmeister qui l'année dernière a donné une traduction allemande de mon Mémoire (2), a vérifié la présence du *Limnochares* dans quelques perles de l'*Unio margaritifera* de Saxe; et sauf la divergence d'opinion, tout-à-fait secondaire, sur la fréquence relative de ces parasites ou des larves des Distomes dans les perles, est venu confirmer la partie générale et essentielle de ma thèse.

---

(1) Cette note a été lue à l'Académie dans la séance du 31 mai 1857.

(2) Müller: Archiv. 1856, pag. 251.

Plus récemment ce sujet a été repris par M. Hessling de Münich dans un travail très-important inséré dans les *Gehlerte Anzeigen* de l'Académie Royale de Bavière. D'après cet auteur on ne trouve des belles perles que dans quelques fleuves de ce royaume, notamment dans le Ils près de Halz, et dans le Perlbach près d'Ortenburg. Ces localités privilégiées pour ce précieux produit sont en Bavière comme en Saxe du domaine de la Couronne. Le savant Bavarois qui s'occupe depuis quelques années de l'anatomie des Mulettes et des Anodontes, ainsi que de leurs parasites, a étudié soigneusement les conditions locales dans lesquelles vit l'espèce qui donne les plus belles perles, et qui a pris pour cette cause le nom de *Unio margaritifera*. Cette espèce vit dans les fleuves un peu ombragés, où le courant n'est pas rapide, où l'eau n'est ni trop chaude, ni trop profonde, sur un lit de sable granitique. Elle ne vit pas dans les localités où l'*Anodonta cygnea*, et d'autres espèces d'*Unio* (*U. batava*, *tumida*, *pictorum*) prospèrent très-bien ensemble (1).

M. Hessling a constaté la présence de parasites comme noyaux dans plusieurs perles d'Anodonte, mais pour celles de l'*Unio margaritifera*, jamais il n'a rencontré quelque chose qui puisse se rapporter à une partie quelconque d'un parasite. Des milliers de mollusques ouverts soit par lui soit par les pêcheurs, n'ont jamais présenté la moindre trace de ces animaux. Les parasites ne joueraient, selon lui, qu'un rôle tout-à-fait secondaire ou dans des cas spéciaux, et le problème de la formation des perles resterait dans son état primitif. M. Hessling n'entre dans aucune observation qui lui soit propre sur ce problème: il ne dit pas même un mot sur la nature du noyau des perles qu'il n'a pas trouvé pouvoir se rapporter à un parasite; mais je crois de n'être pas dans l'erreur en

(1) M. Hessling donne l'analyse de la quantité de chaux contenue dans l'eau des fleuves de Bavière qui donnent des perles, en comparaison avec l'eau des fleuves qui n'en donnent pas. Il en résulterait que l'*U. margaritifera* à coquille épaisse, et qui produit des belles perles, vit dans des eaux très-peu calcaires (0,0087 à 0,0092 grm. de chaux carbonaté par litre d'eau), tandis que les Anodontes à coquille mince, à perles rares petites et ternes, vivent dans des eaux riches en matière calcaire. Ces analyses sont en trop petit nombre pour y voir l'expression d'une loi physiologique. L'*U. sinuata* Lk. qui donne aussi des belles perles, et qui est au moins aussi pesante que l'*U. margaritifera*, si pourtant la distinction de ces deux espèces est réelle, se trouve dans les eaux du Rhône, du Rhin, de la Loire, dans lesquelles on ne saurait présumer moins de chaux qu'en contiennent généralement les eaux des grands fleuves qui sillonnent des terrains calcaires. Nous avons d'ailleurs d'autres faits mieux constatés qui démontrent un rapport direct entre l'épaisseur de la coquille et la quantité de sels calcaires des eaux dans lesquelles vivent les Mollusques.

présumant que bien certainement M. Hessling aura vu que, même dans ce cas, le noyau est formé toujours par une substance animale amorphe. Ceci posé, et lorsqu'on n'a pas d'autres moyens pour déterminer la nature de ce noyau, l'avantage reste toujours du côté où il y a à invoquer des arguments tirés de l'analogie.

Quelle valeur en effet devra-t-on accorder aux faits négatifs de M. Hessling, vis-à-vis des faits positifs qui ont fait voir, à lui aussi bien qu'à moi, des perles dont le noyau est formé par un parasite? Si on pense combien sont rares les parasites qui, de même que le *Distoma duplicatum* ou le *Limnochares anodontae*, sont en état de laisser des résidus permanents et reconnaissables au milieu du reste du corps décomposé, on ne sera pas étonné si dans un grand nombre de cas les moyens nous manquent pour constater que non-seulement le noyau des perles est formé par une substance animale, ce qui est constant, mais par le cadavre d'un animal.

Évidemment M. Hessling n'a fait attention dans ses recherches qu'aux parasites ordinaires des Moules d'eau douce, dont la liste est assez courte. Ils se réduisent aux espèces suivantes: *Bucephalus polymorphus*, *Distoma duplicatum*, *Aspidogaster conchicola*, *Limnochares anodontae*. Il est toujours facile de reconnaître, du premier abord, si une Anodonte contient de ces parasites ou non, car ils se trouvent toujours en grand nombre, et on peut faire aisément de cette manière quelque centaine d'observations dans l'espace d'une heure. Ce qui semble résulter positivement des recherches de M. Hessling, c'est que l'*U. margaritifera* de Bavière en est tout-à-fait exempte, de manière qu'on ne pourrait considérer les espèces nommées de parasites, comme exerçant une influence quelconque sur les productions des perles de ce pays.

Mais on trouve assez souvent dans les Mollusques d'autres parasites que ceux qui s'y développent normalement, et qu'on appelle pour cela ordinaires. Il y a des parasites émigrants, la plus part de cas accidentels ou égarés, toujours en petit nombre d'individus dispersés, et dont la présence n'est pas si facile à constater. Je pourrais citer à ce propos les deux Distomes de la Paludine impure que j'ai trouvés égarés et enkystés dans les Valvates, dans les Planorbes, dans les Cyclas, et jusque dans les jeunes Anodontes qui habitent avec la Paludine. Je citerais encore un autre exemple qui vient plus à propos pour le sujet actuel. Dans une petite note que j'ai fait suivre celle de M. Küchenmeister, j'ai rapporté avoir reconnu une fois dans une petite perle isolée du manteau d'une

Anodonte un noyau organique présentant encore un résidu visible de la couronne buccale d'un *Echinostomum*. Comme on ne connaît pas d'espèces de ce genre propres aux Anodontes, j'ai été surpris de cette observation, jusqu'à douter de son exactitude; mais je n'ai pas tardé à trouver ça et là dans différents organes du Mollusque d'autres Echinostomes enkystés. Sans la circonstance qui m'a poussé à les rechercher, ces parasites auraient passé tout-à-fait inaperçus.

Il est donc encore possible, malgré les observations négatives de M. Hessling, que le noyau des perles de Bavière soit formé d'un animalcule; et dans tous les cas, jusqu'à ce qu'on ne découvre par des observations positives la nature véritable de ce noyau, la théorie du parasitisme persiste à avoir en sa faveur l'analogie la plus naturelle.

M. Hessling conclut à la fin de son Mémoire que les perles sont le produit du hazard (*Kinder des Zufalls*); comme si le hazard n'était pas une divinité aveugle détronée à jamais du domaine de la physique. Mais il corrige immédiatement cette phrase par ces paroles: « La formation des » perles suit les lois de la formation de la coquille, dont la cause dépend » de plusieurs conditions extérieures qui devraient garder à l'abri de tout » risque la santé et la vie des animaux, ce qu'on ne pourrait pas obtenir » en attaquant l'organisme dans lequel seulement peuvent se produire » des perles libres. Autre chose est le problème qui aurait pour but de » remplir contemporainement toutes ces conditions de vie et de santé, » et celui de la multiplication naturelle des perles. – La solution de » ce problème forme le sujet que je me propose de traiter prochaine- » ment. » Malheureusement je n'ai pas eu connaissance de la suite du travail de M. Hessling, qui, bien qu'ayant rapport exclusivement à l'histoire naturelle de l'*Unio margaritifera*, ne peut manquer d'être tel qu'on a droit de l'attendre d'un observateur si éclairé et si consciencieux.

J'ai fait cette année quelques recherches sur l'*U. pictorum* des environs de Turin. Je n'ai pas trouvé d'individus exempts des *Limnochares*, pourtant je n'ai rencontré qu'une seule fois sur deux cent un jeune individu de cet acarien incrusté de nacre (1). J'ai trouvé par contre deux petites perles isolées, d'une belle nuance rose: en examinant la nature du noyaux,

(1) Ceci vient à l'appui de ce que j'ai déjà dit dans ma réclamation contre M. Küchenmeister (Müller, Archiv. 1856, pag. 490).

il a été facile de voir qu'il était formé par une substance animale amorphe pleine de gouttelettes adipeuses.

L'observation que j'ai faite dans les grandes Paludines du Lac Majeur est plus concluante. Presque tous les individus de cette localité présentent sur la surface interne de la coquille des taches en relief formées évidemment par des parasites incrustés. Quelquefois, le long de la columelle, j'ai trouvé des globules, solides, formés de carbonate de chaux déposé autour d'un noyau organique, des globules enfin auxquels il ne manque rien pour être des perles au point de vue des naturalistes. Rien de semblable n'existe dans la Paludine vivipare des environs de Turin, dont j'ai continué à ouvrir un grand nombre d'individus, sans y voir jamais la moindre trace d'un parasite quelconque.

La rationalité de mon opinion sur la formation des perles étant démontrée, il reste maintenant à discuter s'il ne serait pas possible de provoquer cette formation par la diffusion artificielle des parasites qui en sont au moins la cause plus ordinaire. M. Hessling pense que par ce moyen on n'arrivera à aucun résultat: il fait voir à ce propos qu'on ne saurait communiquer à l'*Unio margaritifera* les parasites des Anodontes, parceque ces mollusques ne vivent pas ensemble; et en parlant des larves des Distomes en particulier, il fait remarquer avec raison qu'elles ne se multiplient pas. Ces remarques du savant bavarois ne me regardent nullement, parceque tout en exprimant mon opinion sur la possibilité d'une production artificielle des perles fondée sur la connaissance des causes naturelles, je me suis abstenu de faire un programme pour lequel je ne pouvais avoir que des éléments hypothéthiques. Je savais très-bien du reste, et j'ai cru inutile de dire, que les Trématodes à l'état de larve ne se multiplient pas; mais je savais aussi, ce qui est maintenant connu de tout le monde, que les Trématodes adultes des vertébrés produisent des embryons qui pénètrent dans les corps des Mollusques, et deviennent la souche d'un très-grand nombre de larves; que celles-ci se fraient un chemin dans tous les organes des Mollusques, et jusque dans la partie qui secrète la nacre. Le sujet m'a paru et me paraît encore digne d'être étudié dans des localités favorables. S'il valait la peine de faire des perles d'*Anodonta cygnea* on saurait peut-être dès à présent à quoi s'en tenir. En admettant que le *Distoma duplicatum* soit l'état larvaire du *D. tereticolle*, ainsi que le pense M. Wagener, il ne serait pas du tout difficile de faire parvenir artificiellement des embryons de ce Distome dans le

corps des Anodontes. S'il venait à être toujours mieux prouvé que des Cercaires des Lymnées ou des Paludines émigrent quelquefois dans le corps des *Unio*, et de cette manière quelques individus y vont former le noyau des perles, il ne serait pas difficile de raccourcir le chemin à ces individus émigrants. Mais je crois inutile d'avancer dans la voie des suppositions pour des cas particuliers que l'observation seule peut mettre en évidence.

Il est bien entendu, du reste, qu'on doit donner à ce mot *perle* une signification précise. L'aspect, la couleur, les dimensions n'y entrent pour rien. C'est la forme, la composition de la même substance de la coquille, la structure à couches concentriques autour d'un noyau, qui doivent déterminer la véritable nature des perles. Le joailler n'aurait qu'un sourire de compassion si on lui montrait comme des perles des petits globules bruns, ternes, tandis que pour le naturaliste, pourvu que les caractères que nous venons de rappeler soient présents, ces globules sont des perles aussi bien que celles qui forment le collier d'une czarine. D'un autre côté le joailler s'arrangerait facilement avec le mot pour toute excroissance arrondie douée de l'aspect brillant de la nacre. Les perles coques, par exemple, que les Chinois savent produire artificiellement depuis des siècles, ne sont pas des perles aux yeux des naturalistes. On trouve assez souvent des excroissances analogues, malgré les irrégularités de la forme et de la surface, formées naturellement par une lésion accidentelle du manteau, par laquelle de la boue ou du sable ont pu pénétrer entre le manteau et la coquille. Dans tous ces cas les excroissances ont une paroi mince, et une grande cavité à la place du noyau.

Lorsqu'on pense à la structure des perles, à l'exubérance des couches de nacre qui enveloppent le noyau, on reconnaît tout de suite qu'entre les véritables perles et les incrustations de nacre il existe une différence physiologique. Un corps étranger inerte introduit entre le manteau et la coquille est simplement incrusté de quelques couches minces de nacre; mais si ce corps étranger est un être vivant, qui jouit pour quelque temps de son activité, il déterminera par sa présence une irritation qui fait affluer en plus grande quantité les humeurs qui contiennent la substance de la nacre; de même que les larves des *Cynips* produisent sur les plantes un engorgement de sucs, et des tumeurs que des simples corpuscules morts introduits à leur place ne sauraient produire. On répète encore par habitude traditionnelle que le noyau des perles est formé souvent par un grain de sable, mais on n'est jamais parvenu à le démontrer.

APPENDICE.

Ce Mémoire était déjà sous presse, lorsque M. le Doct. Pagenstecher de Heidelberg, à son passage par Turin, eut la bonté de me remettre un nouveau travail sur les Trématodes qu'il vient de publier (1). Cet ouvrage contient plusieurs choses tout-à-fait nouvelles, et même si inattendues, que peut-être la sanction du temps sera nécessaire, pour les voir circuler comme monnaie de bon aloi.

M. Pagenstecher figure des Rédies à intestin à deux branches comme chez les Distomes. Une de celles-ci est la Rédie de *C. ephemera* que je n'ai jamais vue, mais qui a toujours été décrite jusqu'ici avec un intestin simple: l'autre est une Rédie qui produirait des *Cercaires armées* (*C. ornata*). J'avoue que la vue de cette figure m'a fait naître le soupçon que ce que M. Pagenstecher représente comme une ventouse buccale ne soit autre chose que cette espèce d'ombilic ou de cicatrice dont j'ai fait mention à propos des petits Sporocystes des Cercaires des Paludines: les deux branches intestinales ne seraient alors que le contenu granuleux des Sporocystes distribué des deux côtés. Ceci expliquerait de quelle manière M. Pagenstecher a vu des Rédies procréer des Cercaires armées.

Cet auteur en outre, en parlant de la *C. pugnax* (qui est ma *C. microcotyla*) prétend que des jeunes Cercaires armées produites par des Sporocystes, à l'approche de l'hiver, ne pouvant pas se développer sous la forme de Cercaire, se changent en Rédies, qui sont destinées à produire à leur tour d'autres Cercaires armées. C'est une proposition un peu étonnante, qu'il n'a pas eu le soin de démontrer par des observations et des figures exactes, et qui tombe devant le fait que les Sporocystes et les Cercaires armées se développent aussi bien en hiver qu'en été.

Il prétend ensuite que la queue du *Dist. duplicatum* et du *Bucephalus polymorphus* détachée du corps se remplit de nouveaux germes, et devient ainsi un Sporocyste. C'est l'opinion de Diesing (2) que M. Pagenstecher paraît n'avoir pas connue, et que personne n'est disposé à partager.

---

(1) *Trematodenlarven und Trematoden.* Heidelberg, 1857, in fol. avec 6 pl. chromolithographiées.

(2) *Sitzungsberichte d. k. Akademie v. Wien. Mathem. naturhist Classe.* Vol. 15, pag. 379.

Ce que M. Pagenstecher dit du Tétracotyle trouvé dans le *Lymnaeus stagnalis* est aussi en désaccord avec mes observations. Le double contour est formé selon lui par la vielle peau dont l'animal tend à se débarasser; tandis que j'ai démontré dans ce Mémoire qu'on doit l'attribuer à la nouvelle peau du parasite, si on ne préfère pas considérer cette peau comme la paroi d'un kyste. La fig. xv, pl. III de M. Pagenstecher est indéchiffrable; et dans tous les cas elle n'a rien à faire avec un jeune Tétracotyle: la fig. xvii se rapporte pour moi, à un Tétracotyle écrasé.

Le désaccord n'est pas moindre quant aux véritables Rédies. C'est par une ouverture située à l'extrémité postérieure du corps que M. Pagenstecher a remarqué la sortie des Cercaires. Il n'a pas vu le système vasculaire, qui pourtant, dans des Rédies telles que celle de *C. fallax*, est si facile à voir. L'idée de l'auteur (pag. 24), que les appendices latéraux de cette Rédie peuvent se détacher comme des bourgeons, et devenir des nouvelles Rédies, est dénouée de tout fondement.

M. Pagenstecher pense que les Cercaires armées sont les larves des Distomes des Batraciens. Il rapporte p. ex. la *C. ornata* au *Dist. clavigerum*, la *C. armata* au *Dist. endolobum*, mais il n'allègue aucune observation positive et exacte à l'appui de ces assertions.

Il rapporte le *Dist. duplicatum* au *Dist. cygnoides*, mais il a contre lui une autorité imposante en Helminthologie; celle de M. Wagener. Il croit probable que la forme qu'il appelle *C. diplocotylea* soit la larve de l'*Amphistoma subclavatum*, ce qui, d'après mes observations publiées il y a deux ans, n'est pas seulement probable, mais parfaitement sûr.

Je laisserais de côté d'autres remarques critiques de cet ouvrage, pour conclure qu'on y trouve pourtant quelque bonne observation dont la science devra tenir compte.

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

Fig. I. *Cercaria triloba.*
» II. *C. agilis.*
» III. *C. lophocerca.*
» IV. Sa Rédie.
» V. Sporocystophore de *Cercaria micrura: a* sa partie antérieure extensible et retractile.
» VI. *C. micrura.*
» VII. Sporocystophore trouvé dans un *Lymnaeus pereger*, avec des germes de Cercaire d'espèce indéterminée.
» VIII. Un autre de ces Sporocystophores pour montrer le Sporocyste intérieur en train de se diviser.
» IX. Sporocyste de *C. virgula* qui se divise en deux.
» X. Un Sporocyste filial déjà séparé; *a* ombilic ou cicatrice.
» XI. *Cercaria cristata.*

PLANCHE II.

Fig. XII. *Distoma planorbis carinati.*
» XIII. Sa Rédie.
» XIV. Très-jeune Rédie du *Distoma armatum paludinae impurae: a* rudiment de la cavité gastrique.
» XV. La même plus avancée dans le développement; *a* rudiment de la cavité du pharynx; *b* cavité gastrique; *c* germes de Distome.
» XVI. Rédie du *Distoma inerme paludinae impurae: a* ouverture d'issue pour les petits Distomes; *b* bouche; *c* lambeaux ciliés à cils immobiles, résidus de l'embryon infusoriforme.
» XVII. Distome armé de la Paludine impure enkysté.
» XVIII. Partie antérieure d'un de ces Distomes armés: *a* endroits où j'ai vu quelquefois des cils vibratiles.
» XIX. *Cercaria tuberculata.*
» XX. La même en train de s'enkyster.
» XXI. Rédie trouvée dans le *Conus mediterraneus.*
» XXII. *Cercaria vesiculosa.*
» XXIII Un de ces Sporocystes vides.

PLANCHE III.

Fig. XXIV. Sporocyste de *C. vesiculosa* avec un Tétracotyle, des germes *a*, et une jeune Cercaire *b*.

» XXV. Un Sporocyste de la même espèce, avec un germe de Tétracotyle.

» XXVI. Un Tétracotyle comprimé, pour montrer particulièrement les vaisseaux latéraux

» XXVII. Un Tétracotyle à l'état d'embryon, isolé.

» XXVIII. Le même plus avancé dans son développement.

» XXIX. Le même en train de s'enkyster.

» XXX. Un Tétracotyle complètement enkysté.

» XXXI. Sporocyste de *C. furcata*, avec un grand nombre de germes de Cercaires, et un Tétracotyle.


II
III
III
IV
VI
V
VI
IX
XI
XII
X
VIII


BRITISH
NATURAL HISTORY.




BRITISH
NATURAL HISTORY




BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.

ESSAI

D'UNE DISTRIBUTION OROGRAPHICO-GÉOGRAPHIQUE

DES

MOLLUSQUES TERRESTRES

DANS LA LOMBARDIE

PAR

PÉLÉGRIN STROBEL

Il n'y a de petit dans la Nature
que les petits esprits.

RASPAIL.

Approuvé, en Séance du 18 janvier 1857, pour l'impression dans les Volumes Académiques.

CHARLES PORRO, en 1837, publia un *Catalogus conchyliarum terrestrium fluviatiliumque Italiae* dans le but de fixer une base, d'après laquelle il invitait les Malacologues de la péninsule à lui envoyer tous les renseignements dont ils pourraient disposer, concernant cette branche de la Malacologie. A la suite de ces renseignements, qui devaient corriger les fautes et remplir les vides de son catalogue, il comptait dresser une Malacologie terrestre et fluviatile de toute l'Italie. L'an 1838 parut sa *Malacologia terrestre e fluviale della provincia comasca* (Milano) comme essai de la méthode, suivant laquelle il pensait d'achever ledit ouvrage, pourvu que ses confrères en Malacologie lui fussent venus en aide. Mais, faute d'esprit d'union dans les efforts relatifs et de moyens pour effectuer cette union, et enfin, à cause de la mort tragique du Naturaliste de Côme (1), la Malacologie terrestre et fluviatile italienne est encore à désirer.

Le but que PORRO se proposait dans ces études, n'était pas seulement la simple description des espèces de son pays et de leurs variétés; il

(1) PORRO naquit l'an 1813 et fut tué à Mélégnano en mars 1848.

visait aussi à la connaissance de la distribution géographique des mollusques européens et à l'explication des changements de forme et de couleur, et des variations de leurs coquilles. Il joignait à l'étude des formes l'étude des lois. C'est dans ce but qu'il publia les *Note per una bibliografia malacologica; serie* geografica - Milano, 1841 - et les *Studii su talune variazioni offerte da' Molluschi fl. e terr. a conchiglia univalve*, insérés dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin, II.e Série, Tome I, page 219 et suiv.; et qu'il présenta aux Congrès des Naturalistes italiens à Florence et à Padoue de beaux essais sur les variations des coquilles des Hélices dues au changement du climat, variations qu'il essaya de réduire à leurs types spéciaux. Des observations communiquées au Congrès de Florence il publia un extrait en 1841.

En suivant et en développant les idées de Porro, mon maître en Malacologie et mon ami bien-aimé et regretté, j'étudiai la distribution topographique des Limaces et des Hélices dans la vallée du Pô, ou Italie supérieure, ou haute Italie, et je fis présenter par M. le Prof. Meneghini le résultat de ces études à la Section de Zoologie du Congrès des Naturalistes, qui eut lieu à Venise l'an 1847. Cette Section donna sa voix pour que mon travail fût inséré tout entier dans les Actes du Congrès (*Diario del nono Congresso ecc., p.* 40). Les événements de 1848 ont empêché la publication des Actes du Congrès et mon Mémoire est encore déposé chez le Secrétaire général de cette réunion.

Il parut ensuite plusieurs travaux qui déployèrent les richesses malacologiques de tel ou tel pays de la haute Italie; presque tous ces travaux sont énumérés dans la Liste bibliographico-malacologique lombarde, qui va suivre; je ne mentionnerai donc ici que les Catalogues de MM. Théodore Prada et Jacques Tassinari, le premier: *Catalogo dei Gasteropodi terrestri della valle dell'Isonzo, ecc.*, a été inséré dans le *Giornale dell'Istituto Lombardo*, II.e Série, Tome III; le dernier: *Molluschi terr. ed aq. raccolti nella Romagna* (une partie des Légations romaines) a été publié par le *Giornale di Malacologia*, II.e année, page 65 et suivantes.

C'est à l'aide de ces travaux et des études faites par moi-même dans les cabinets de MM. Del Mayno, Marani, Paganini, Porro, Stabile, Trotti, Villa et dans le Muséum civique à Milan, sur les collections de Vimercati-Sozzi à Bergame, de D'Arco à Mantoue, de Prada à Pavie, de Rezia à Bellagio, études complétées par des excursions

dans les provinces qui n'avaient pas encore été visitées par les Malacologues, telles que celles de Sondrio, Bergame, Lodi, Crémone, que j'ose enfin donner un essai sur la distribution géographique des mollusques terrestres dans la Lombardie. Je comprends ici sous le mot de Lombardie, la Lombardie proprement dite, excepté son territoire au Sud du Pô, la vallée piémontaise de la Toce, la Suisse au Sud des Alpes ou italienne et la vallée du Sarca au Mincio supérieur dans le Trentin, c'est-à-dire que par Lombardie on doit entendre le pays compris entre les Alpes, le Tessin, le Mincio et le Pô, et les crêtes des monts versants aux deux premiers fleuves. Ce n'est qu'à ces limites qu'il est permis au Géographe et au Naturaliste de circonscrire la Lombardie, les divisions politiques étant arbitraires et antiscientifiques, puisque les états sont tantôt constitués par la réunion antinaturelle des fractions de différentes unités géographiques, tantôt ils sont la fraction d'une telle unité. Donner des détails géographiques, même concis, sur la Lombardie, ce serait porter de l'eau à la mer; sur cette matière rien de mieux que de renvoyer aux *Notizie naturali su la Lombardia*, compilées par plusieurs savants et réunies par Charles Cattaneo (Milano, 1844).

Outre lesdits ouvrages et cabinets, j'ai mis à profit pour mon travail les lettres de Ziegler à MM. Porro et Villa, les listes de MM. Blauner et Parreyss, les notes de MM. Prof. Balsamo-Crivelli et Menegazzi. Enfin j'ai eu aussi recours aux œuvres de Cantraine, Charpentier, De Cristofori et Jan, L. Pfeiffer, Rossmaessler et autres Auteurs, non seulement pour la classification des espèces, mais aussi pour les indications de plusieurs localités. Dans ce dernier but je me suis servi de même des Catalogues de Porro: *Mollusca* t. *et* fl. *Musaei mediolanensis*; et des Villa: *Dispositio systematica conchyliarum* t. *et* fl. *collectionis eorum*.

A l'égard du classement des espèces dans ce Mémoire, je ne ferai qu'une observation qui a trait à leur nomenclature. Pour celle-ci je n'ai suivi ni rigoureusement la méthode ou l'école historique pure, ni la rationnelle exclusive. J'y ai rayé tout nom, qui par des Auteurs *classiques* différents a été employé à désigner des espèces différentes, et je l'ai fait pour éviter des équivoques. D'ailleurs les classements et les systèmes sont et seront toujours plus ou moins artificiels; ce n'est donc pas la peine de leur donner ni l'importance, ni les soins qu'on est encore accoutumé de leur accorder, au préjudice de l'anatomie, de la physiologie et de la philosophie.

Je dois enfin donner l'explication des mots: *variété* et *mutation*. Variété, c'est la forme qu'une espèce prend dans certaines conditions géographiques, sous l'influence de certains agents externes; elle a été nommée aussi variété géographique, et par Porro variété sériale. La mutation, au contraire, dépend des lois de l'organisme, c'est-à-dire des agents internes; et elle peut se répéter dans différentes variétés de la même espèce, comme la même espèce, la même variété peuvent offrir différentes mutations dans les mêmes conditions topographiques. Porro donne à cet ordre de variations le nom de variétés graduelles; on les a appelées aussi sous-variétés. Une mutation peut, dans certaines contrées, être constante, et c'est cette forme que je préfère nommer sous-variété. La variété et la sous-variété sont donc constantes dans le même lieu. Non-seulement les mutations, mais aussi les anomalies, ou variations d'ailleurs exceptionnelles, peuvent, dans certains endroits, devenir communes, même exclusives; ainsi p. e. l'*H. nemoralis* est exclusivement *albine* dans le fond de la Valcavallina.

Quant à la dispersion des espèces dans une contrée on distingue deux éléments: l'extension et la quantité. La première est déterminée par la somme des points habités par l'espèce, la seconde par le degré d'abondance des individus dans ces mêmes points. J'exprimerai le degré d'extension par les mots: très-répandue, répandue, rare, fort-rare, et j'indiquerai le degré de quantité par les mots: très-commune, commune, presqu'isolée, isolée. Lorsque je ne place aucune indication à cet égard, cela signifie que l'espèce n'est pas répandue, mais pas encore rare; ni commune, ni presqu'isolée.

ÉNUMÉRATION CHRONOLOGIQUE

des ouvrages qui traitent de la Malacologie lombarde.

Vandelli Dominique — Fauna mediolanensis. — Manuscrit possédé par l'Institut Lombard.

Lanfossi Paul — Saggio di storia naturale dei contorni di Mantova. — Inséré dans le Tome 19 du *Giornale di fisica, chimica, storia naturale, ecc.* par Configliachi et Brugnatelli, Pavia, 1826; à la page 383 l'Auteur traite des *Mollusca et Testacea*.

Villa Ant. et J. B. — Catalogo dei Molluschi della Lombardia. — Inséré dans les *Notizie naturali su la Lombardia*, Milano, 1844; avec un supplément publié dans le *Giornale di Malacologia*, 1.ère année, p. 142, Pavia, 1853.

Stabile Joseph — Fauna elvetica. Delle conchiglie terrestri e fluviali del Luganese. Lugano, 1845.

Rezia Amanzio — Enumerazione sistematica dei Gasteropodi terrestri e fluviali dei dintorni di Pavia, dissertazione inaugurale. Pavia, 1848.

Strobel Pélégrin — Note malacologiche d'una gita in Valbrembana nel Bergamasco. — Insérées dans le *Giornale dell'Istituto Lombardo*, II.e Série, Tome I et II, Milano, 1848-1851.

Id. — Notizie malacostatiche sul Trentino. Pavia, 1851-1852.

Spinelli J. B. — Catalogo dei Molluschi terrestri e fluviali della provincia bresciana. Brescia, 1851. – 2.e édition; Verona, 1856.

Strobel P. — Sui Molluschi viventi del lembo orientale del Piemonte. — Publié dans le *Giornale di Malacologia*, 1.ère année; Pavia, 1853.

De Betta Édouard — Catalogo dei Molluschi viventi sul monte Baldo. — Inséré dans le susdit journal, 2.e année, p. 129, 1854.

De Betta É. et Martinati Pierre Paul — Catalogo dei Molluschi terrestri e fluviatili viventi nelle provincie venete. Verona, 1855.

Strobel P. — Delle lumache ed ostriche dell'agro pavese. — Publié dans la *Strenna pavese*, ou Almanach de la prov. de Pavie pour l'an 1856, page 87 (1).

Il me faut à présent justifier le motif, pour lequel je n'ai pas fait usage de la langue maternelle dans un travail qui concerne un pays italien, mon pays. M'étant impossible de publier ce Mémoire à mes frais, je le livre à la merci des Académies ou des journaux. Ne pouvant donc prévoir dans quel recueil académique ou dans quel journal il aura le bonheur de paraître, j'ai dû l'écrire dans la langue la plus universellement connue. Mes compatriotes voudront bien me le pardonner!

---

(1) Après la compilation de ce Mémoire ont paru les ouvrages suivants:

Gredler Vincent — Tirol's Land-und Süsswasser-Conchylien. — Inséré dans les *Abhandlungen des zoologisch-botanischen Vereins in Wien*, Tome VI, Vienne, 1856.

Menegazzi Louis — Malacologia veronese. Verona, 1855 (antidate).

§ I.

ÉNUMÉRATION DES ESPÈCES.

LIMACES.

Arion empiricorum Fér. mut. *rufus* L. – Dans la plaine, sur les collines et même au pied des monts; recueilli dans la prov. de Pavie, Milan, Côme (Porro), Bergame et Brescia (Spinelli), à Lugano dans le canton du Tessin (Stabile); très-commun dans certains endroits, comme à Monza dans les jardins et le parc.

mut. *ater* Drap. – Prov. de Mantoue (Lanfossi).

— subfuscus Fér., *Limax cinctus* Muell. (Drouet nec E. Martens) - Jusqu'à présent je ne l'ai rencontré que dans les hautes vallées du Chiese ou Clisio et du Mincio (Giudicarie): à Bondo, Bolbeno, et Pieve di Rendena; dans la Lombardie proprement dite il n'a pas encore été trouvé.

— hortensis Fér. var. *alpicola* Fér., *Limax fuscus Müll.* Martens. - Avec le précédent; mais on doit aussi recueillir cet *Arion*, de même que le *subfuscus*, dans les montagnes et les alpes de la Lombardie, car tant dans la Suisse, que dans le Tyrol tous les deux habitent les Alpes, dont les nôtres ne sont qu'une continuation.

Limax marginatus Drap., *Arion marg.* Porro, Villa, Spin. *olim*, Stab. - Très-répandu sur les montagnes et les collines; aussi dans la plaine, en contiguité de celles-là.

mut. *punctis in strigas transversas, obliquas conjunctis.* – A Toscolano au bord occidental du lac de Garda ou Benaco.

— agrestis L. mut. *filans* Hoy et *reticulatus* Muell. - Très-commun partout.

— arborum Bouch.-Chant., *marginatus* Müll. nec Drap. (Mart.), *cinctus* Muell.? (Strob. olim) (1). - Répandu dans les montagnes, commun.

---

(1) *Limax cinereo-flavescens; clypeus rugis cyclicis irregularibus, flavo-maculatus, lineis 2-5 longitudinalibus leviter contortis S literae formam simulantibus nigrescentibus flavolimbatis interdum confluentibus ornatus; dorsum rugis sese invicem jungentibus* (anastomosées), *fasciis 2, 4 aut 6 lateralibus longitudinalibus nigricantibus saepe interruptis interdum confluentibus, carina flava, lateribus flavo-maculatis; solea flava; cervix lineis 5-violaceis; tentaculi cinerei apice flavo-fusci; os flavum.*

— MAXIMUS L. - Très-commun partout.

— COERULANS BIELZ, *cinereus* var. *solea nigrolimbata* STROB. olim. - Casalmaggiore dans la plaine, prov. de Côme et de Bergame, Valanzasca dans la vallée de la Toce.

mut. *carina rubra vel gilva*, *L. Dacampi* MEN. pl. 1, page 63. - Prov. de Pavie, Lodi, Brescia, Bergame et Côme.

— VARIEGATUS DRAP. - Dans la plaine et au lac de Garda: à Toscolano; commun.

HELICES.

SUCINEA PUTRIS L. - Très-commune partout.

mut. *mediolanensis* VILLA (1). - Milan.

var. *Pfeifferi* RM., *italica* JAN, *amphibia* var. *c.* et *d.* PORRO?, *Pfeifferi* et *ochracea* DE BETTA. - Aussi bien dans la plaine, que sur les collines et les montagnes; commune.

mut. *mediolanensis Villa* PFEIFF., L. (2). - Milan.

— OBLONGA DRAP. - Commune partout.

VITRINA ELONGATA DRAP. var. *brevis* FÉR. (A. SCHMIDT), *pyrenaica* FÉR. (CHARP.). - Presqu'isolée sur les montagnes et les collines, et même à leur pied dans la plaine, où, peut-être, elle a été transportée.

var. *glacialis* FORB. - Passage du Stelvio, alpe de Filar près des glaciers du mont Rose, presqu'isolée.

— DIAPHANA DRAP. - Sur les collines et les monts: prov. de Vérone (DE BETTA), Brescia (SPIN.), Bergame, Côme (PORRO).

var. *nivalis* CHARP. - Passage du Stelvio (BIELZ), presqu'isolée.

— LIMACOIDES ALTEN, *pellucida* MUELL. nec DRAP. - Pavie, Valbrembana dans la prov. de Bergame, Brianza (PORRO) dans la prov. de Côme, Valfusio (STAB.) dans le canton du Tessin.

ZONITES CRYSTALLINUS MUELL. - Partout, mais peu commun.

var. *hylatinus* RM., *Helix tenera* VILLA, SPIN. olim. - Forme méridionale. - Pavie, collines de Brescia, monts de la Lombardie? (VILLA); isolé. Je l'ai recueilli aussi à Zavatarello dans les Apennins piémontais.

var. *diaphanus* STUD., *Hel. hyalina* quor. - Répandu comme le *Z. crystallinus*, avec lequel on le confond bien-souvent.

---

(1) *Media*, *cinerascens*, *peristomate nigrolimbato*.

(2) *Minor*, *elongata*, *crassior*

— GLABER STUD., *Hel. fulgida* VILLA, *cellaria* var. SPIN. olim. - Dans les montagnes: à Locarno au bord du Lac-Majeur ou Verbano, à Varenna au lac de Côme ou Lario (MOUSSON), dans la prov. de Brescia, dans la vallée du Sarca, sur le mont Baldo (DE BETTA); plus commun et plus répandu dans le Tyrol.

— CELLARIUS MUELL. - Répandu et commun sur les monts et les collines; dans la plaine il ne demeure qu'au pied des collines, et peu-à-peu y devient rare.

mut. *nitidulus* DRAP. (DESH.), nec FÉR., nec PFEIFF. C., *Hel. cellaria* var. *minor* PORRO. - Prov. de Côme.

mut. *Villa* MORTILLET (1). - Bords du Verbano, îles Borromées (VILLA).

var. *Draparnaldi* BECK., *Hel. nitida* DRAP. Hist. nec MUELL. - Répandu et commun dans la plaine, où il remplace le *Z. cellarius*; rare dans nos collines et montagnes, mais répandu dans les Apennins du Piémont. Ici il représente autant le *Z. cellarius* que le *Z. glaber*, entre lesquels il vient se placer par la forme de sa coquille.

— NITENS GMEL., *Hel. nitens* var. *hiulca* SPIN., *Z. nitens* cum var. *hiulca* MOQ.-TAND. - Valanzasca dans la vallée de la Toce, monts et collines de la prov. de Brescia, val de Ledro, au N. O. de Riva, sur les bords du Benaco, vallée du Sarca.

var. *hiulcus* JAN, *Hel. cellaria* var. *labio columellari recto* PORRO (2). - Borné aux collines et aux monts des trois lacs et de la prov. de Bergame.

var. *nitidulus* DRAP. (MOQ.-TAND. nec DESH.), FÉR. nec PFR. C., *niteus* SPIN. - Brianza (PORRO), vallées de Brescia (SPIN.), mont Baldo (MENEGAZZI in schedis); presqu'isolé.

— PURUS ALDER, *Hel. nitidula* PFR. C., nec DRAP., nec FÉR. - Presqu'isolé aux environs de Côme (MOUS.), dans la prov. de Brescia (SPIN.), au passage du Stelvio (BIELZ), selon VILLA dans la plaine lombarde, mais si on le trouve ici *vivant*, il doit y avoir été apporté des monts.

— SUCINEUS STUD., *Hel. nitida* MUELL. nec DRAP., *lucida* et *lombardica* SPIN. olim. - Commun partout, principalement à la plaine.

---

(1) Giornale di Malacologia, 1. pag. 110.

(2) *Maximus, spira minus depressa, anfr. convexis, apertura exinde subrotunda.*

— OLIVETORUM GMEL. var. *Leopoldianus* CHARP. (1), *Hel. olivetorum* DE BETTA. - Mont de la Magdelaine dans les collines de Brescia (SPIN.), Mantoue (apporté?); moins rare dans le vénitien, commun dans les Apennins. Il dépasse de bien peu le 45° de latitude.

— FULVUS MUELL. - Partout, mais presqu'isolé.

— GEMONENSIS FÉR., *H. isodoma* JAN. - Gardone dans la Valtrumpia prov. de Brescia, mont Baldo (BETTA); moins rare dans le Vénitien et la prov. de Trente.

HELIX UMBILICATA MONT., *spirula* VILLA. - Répandue et commune dans les montagnes et sur les collines.

var. *rupestris* DRAP. - Lugano (STAB.), sources de l'Adde et passage du Stelvio, Valgana dans la prov. de Côme (PAGANINI), Clusone dans la prov. de Bergame, Serle et Botticino? (SPIN.), Arco au N. de Rive près du lac de Garde, Mont Baldo (BETTA); en familles.

— PYGMAEA DRAP. - Lugano, Legnano (STAB.), Pavie; fort rare et isolée.

— SOLARIA MENKE. - Mantoue (PORRO col.), apportée?; selon ROSSMAESSLER, JAN et MENEGAZZI (*man.*) on la rencontre dans le Vénitien; dans le Tyrol je ne l'ai jamais recueillie.

— ROTUNDATA MUELL. - Partout.

— RUDERATA STUD., *rotundata* var. *d.* PORRO p. 124, et in col. (2). - Les alpes de la Valsassina dans la prov. de Côme, les passages de la Spluga (MOUS.) et du Stelvio (BIELZ); moins rare et moins isolée dans le Tyrol et dans le Friuli, Haut Vénitien.

— NAUTILIFORMIS (DREPANOSTOMA) PORRO. - Borca au mont Rose, Valanzasca, Baveno, Luino au lac Verbano (VILLA), vallée de l'Olone, Valgana, Lugano (STAB.); en familles.

— ANGIGYRA ZIEGL. - Très-commune et très-répandue sur les monts et les collines, ça et là aussi dans la plaine qui borde les collines. A Clusone dans la vallée du Serio j'ai recueilli plusieurs individus albins.

— OBVOLUTA MUELL., *holosericea* GMEL. *var.* VILLA. - Commune et très-répandue dans les montagnes et sur les collines.

---

(1) *Depressus, anfr. ultimo amplo, umbilico lato;* MOQUIN-TANDON lui donne un ombilic plus *étroit*. Les exemplaires lombards ne sont pas plus grands que ceux du vrai *Z. olivetorum*.

(2) MOQUIN-TANDON rapporte par méprise cette variété de la *H. rotundata* de PORRO à sa var. γ *olivacea* de la même espèce.

— HOLOSERICEA STUD., *Gmel.* VILLA. - Les alpes: Valfusio, Dazio (STAB.), Airolo (HARTM.) dans la Suisse, mont Spluga (MOUS.); moins rare dans le Tyrol.

— PERSONATA LAM. - Les montagnes autour du Lario (MOUS.), mont Baldo (BETTA); moins rare dans le Tyrol et le Haut Vénitien.

— ACULEATA MUELL. - Aussi bien dans la plaine que sur les collines et les montagnes, mais fort rare et isolée.

— LEUCOZONA ZIEGL., *edentula* JAN olim, *ovirensis Rm.* SENONER, *dolopida* JAN *var.* VILLA. - Monts lombards (VILLA), de Bergame? (JAN), mont Baldo (SEN.) - espèce orientale.

mut. *dolopida* JAN. - Collines? lombardes (VILLA), Rocca d'Anfo et Bagolino dans la prov. de Brescia (SPIN.), mont Baldo (BETTA), mont Bondone dans la Valsarca; montagnes orientales - moins rare dans le Vénitien et dans la prov. de Trente; dans le Tyrol proprement dit cette espèce n'a pas encore été observée.

— CILIATA VEN., *ciliata* et *hispida* SPIN. *olim.* - Très-répandue sur les collines et dans les monts, mais peu commune.

— RUBIGINOSA ZIEGL. (A. SCHMIDT), *badiella* PARR. (MOUS.), *revelata* MICH. (quor.). - Commune dans la plaine, où elle remplace l'espèce suivante; elle habite les lieux marécageux.

— SERICEA DRAP., *badiella* SPIN. *olim.* - Dans les montagnes: rivages des trois lacs, passage du Stelvio (BIELZ), Vesto et Idro dans la prov. de Brescia, Rive et Arco près du Benaco, mont Baldo (MEN. in spec.); plus commune dans le Tyrol, en descendant vers la plaine elle devient rare.

— HISPIDA L., *hispida* et *Schrankii Fitz.* VILLA. - Dans la plaine: Casalmaggiore, Pavie, Lode, Milan; sur les collines et les monts: Côme, Bergame, Baldo (MEN. in sched.). L'échantillon *unique* de l'*H. circinata* STUD. recueilli par TROTTI à Bellagio au lac de Côme n'est probablement qu'une *H. hispida maxima depilata.*

— LURIDA ZIEGL. var. *minor peristomate subrecto.* - Rocca d'Anfo dans la prov. de Brescia (SPIN.), Vigolo dans la Valsarca, mont Baldo (BETTA); moins rare dans le Trentin et dans le Haut Vénitien; elle ne se trouve point dans le Tyrol proprement dit.

— INCARNATA MUELL. - Partout, mais presqu'isolée.

mut. *monodon* PORRO, VILLA, STAB. (1) nec FÉR., *leucozona*

(1) *Minor, elatior, peristomate ad columellam calloso, subdentato.*

Spin. olim, *unidentata* Felisi, *Villae* Charp. et Desh.? nec Mort. – Ça et là dans les monts et sur les collines, mêlée à l'*H. incarnata.*

— strigella Drap. mut. *major*, *H. apennina* Meg.?, *hexagyra* Spin. – Partout; elle aime cependant la plaine.

mut. *minor*, var. *strigellula* Moq.-Tan., *H. glabella* Porro, *striolata* Stab., *hexagyra* Meg., *strigella* Spin. – Répandue dans les montagnes et les collines.

— cantiana Mont. – Prov. de Mantoue, commune.

mut. *Da Campo* Villa, var. *rubescens* Moq.-Tand. – Prov. de Cremone à Cingia de' Botti, prov. de Mantoue, mont Baldo (Men. in spec.); commune.

var. *minor* Moq.-Tand. – Laveno au lac Verbano et Varese dans le Comasque, des exemplaires uniques; Legnano dans le Milanais (Stab.), où elle a été probablement apportée de Varese par l'Olona; cette variété est commune dans les Apennins, et peut-être c'est une espèce distincte, car elle n'est point velue dans sa jeunesse, tandis que la forme grande de notre plaine semble l'être (A. Schmidt in lit.).

— carthusianella Drap. – Très-commune partout, principalement dans la plaine.

mut. *minor*, var. β. Drap., *carthusiana* var. *minor* Moq.-Tand., *H. Olivieri* Mich., *H. Olivieri* var. γ. Fér., *H. incolata* Ziegl.? nec Rm. – Partout mêlée à l'*H. carthusianella.*

mut. *minima*, *globoso-conica.* – Ça et là: Lugano (Stab.), Agliate prov. de Milan, Cassano d'Adda, S. Giovanni Bianco dans la Valbrembana bergamasque.

— cinctella Drap. – Commune dans la plaine, excepté les environs de Pavie, et sur les collines; elle pénètre aussi dans le fond des vallées de Bergame, et se répand le long des lacs de Côme et de Garde, mais elle ne parvient pas dans le Tyrol allemand. La mut. *fasciata* n'a pas été recueillie en Lombardie, elle n'est point rare sur les Apennins.

— fruticum Muell. – Commune partout à l'exception des vallées de la Toce, du Tessin et de l'Adde (jusqu'à la plaine). Je ne l'ai jamais trouvée dans le Piémont, et selon Drouet et Moquin-Tandon elle ne vit point dans le midi de la France.

var. *demum perforata*, *crassa.* – Bolbeno dans la haute vallée du Sarca.

— arbustorum L. – Airolo près du S. Gothard (Stab.), Ponte di

Legno en Valcamonica prov. de Bergame, d'où l'Oglio a transporté des coquilles de cette espèce dans le lac d'Iseo (Spin.), Pol di Lazise (Men.), y descendue du mont Baldo?; plus commune dans le Tyrol et le Haut Vénitien.

var. *alpicola* Fér. – Airolo.

var. *picea* Ziegl. – Mont Rose.

— pulchella Drap. – Commune partout.

mut. *costata* Muell. – Elle se trouve mixte à l'*H. pulchella*, mais moins commune surtout dans la plaine.

— glacialis Thom. – Mont Ortelio, moins rare dans les Alpes du Piémont.

— insubrica Jan et De Crist. – Mont Baldo (Betta).

— frigida De Crist. et Jan, *Schmidtii* Villa olim. – Mont Codeno ou Grigna septentrionale dans le Comasque, en familles.

mut. *fasciata*, *plerumque minor*, *H. insubrica* quor. – Avec l'*H. frigida*.

— tigrina Jan et De Crist. – Collines et monts de la prov. de Côme à l'est du lac, et de la prov. de Bergame, Magno près de Gardone, Bione et Rocca d'Anfo dans la prov. de Brescia (Spin.); commune.

— Preslii Schm. F. var. *nisoria* Rm., *H. nubila* Ziegl. in litera ad dom. Porro, *H. colubrina* Porro nec Jan, *colubrina* var. Villa. – Valgana et mont Grigna (Villa) dans le Comasque. Sovere dans le Bergamasque; commune.

var. *luganensis* Schinz (1), *H. cingulata* var. complur. – Bords du lac de Lugano, Valsolda et Tremezzina à l'ouest du Lario; commune.

— cingulata Stud. – Pisogne au lac Sebino dans la prov. de Bergame (Mous.), Brescia et rivages du Benaco, Valsarca, mont Baldo (Betta); commune.

mut. *fascelina* Ziegl. (2). – Collines de Volta dans le Mantouan (Del Mayno); commune. Acclimatée à Pavie (ex. de l'*H. cingulata*).

mut. *baldensis* Villa. – Rive (A. Schm.), mont Baldo.

var. *colubrina* De Crist. et Jan nec Porro. – Commune sur les monts et les collines de la prov. de Brescia, dans les vallées du Chiese et du Sarca, à Malcesine au pied occidental du mont Baldo (Betta).

---

(1) *Spira producta instar* H. cingulatae, *fasciis* 003—$\overline{45}$, *inferis pallidis*. – *Animal* H Preslii *verae simile* (A. Schmidt in lit.).

(2) *Cornea*.

— ZONATA STUD. – Alpes occidentales: vallée de la Toce, S. Gothard, canton Tessin (STAB.).

var. *longobardica* MOUSS., *H. vittata* VILLA nec JAN. – Valtelline inférieure, montagnes de la prov. de Côme; commune.

— ADELOZONA PARR., *zonata* STROB. olim. – Val S. Martin et Valbrembana dans le Bergamasque; commune.

var. *rhaetica* MOUS. in lit. (1). – Valtelline supérieure (MOUS.), Sovere et Gorzone dans la Valcamonica, prov. de Bergame; vit aussi dans les vallées de la chaîne de l'Ortelio: Engadin (MOUS.), Tyrol occidental. – L'exemplaire unique de l'*H. ichthyoma* HELD, *foetens* auct. nec STUD., recueilli à Agno près de Lugano (STAB.), et l'échantillon également unique de sa var. *achates* ZIEGL., recueilli sur le mont Sasso (PORRO), ne sont peut-être que des exemplaires monstrueusement applatis de cette variété de l'*H. adelozona;* la vraie *H. achates* n'a été trouvée dans la vallée du Pô que dans le Tyrol allemand.

— UMBILICARIS BRUM., *hispana* L. (PFEIFF. L.), *planospira* RM. nec MICH., *vittata* DE CRIST. et JAN nec VILLA. – Mont Baldo (BETTA); commune dans le Tyrol oriental, dans le Vénitien et dans les Apennins orientaux.

— AMMONIS A. SCHM. in lit., *ericetorum* PORRO, VILLA, aliorumque, *candicans* PFEIFF. L., *candicans* pars BETTA, *neglecta* var. STROB. (2). – Dans la plaine, et sur les collines des prov. de Côme, Brescia et Mantoue, en familles très-nombreuses.

mut. *minima*, *subdepressa*, *tantummodo umbilicata*. – Collines de Volta dans le Mantouan mêlée à l'*H. Ammonis*. Les exemplaires à péristome violet ressemblent aux échantillons de cette espèce recueillis dans l'Istrie et la Dalmatie, et ceux à péristome blanchâtre ne se distinguent guère de l'*H. bidentata* DRAPARNAUD.

— CANDIDA PORRO (nec *candicans*), ZIEGL. in lit. ad dom. PORRO, 22. Iunii 1838, *candicans* pars altera et *cespitum* var. (les ex. à bandes) BETTA, *candicans* et *cespitum* SPIN. – La plaine et les collines des prov. de Mantoue, Brescia et Côme (PFR. L.)? avec la précédente, mais moins commune.

var. *minor*, *H. candidula* ZIEGL. (VILLA) nec STUD., *candicans* var.

(1) *Crassa, badia, depressior.*

(2) *Depressa, late umbilicata, peristomate modo rufo, modo violaceo, modo roseo, modo etiam albido.*

candida Betta, Spin. (ex. blancs). – Cassano d'Adda, Salò (Spin.), vallée inférieure du Sarca. – Cette espèce se place entre l'*H. Ammonis* et l'*obvia* Hartmann. Les exemplaires à bourrelet blanc de l'*H. Ammonis* lui ressemblent beaucoup, et la mutation blanche de l'*H. obvia* se distingue difficilement des échantillons blancs de la var. *candidula* Ziegler. L'*H. candida* diffère cependant des deux affines par sa spire plus élevée et à tours plus bombés, par l'ombilic moins ouvert, et par la couleur pâle des bandes dans la mut. *fasciata*.

— unifasciata Poir. mut. *minima*, *H. candidula* Stud. nec Mich., *costulata* var. *alpina* Villa, Spin. olim. – Dans les montagnes.

mut. *media*, *H. gratiosa* auct. nec Stud. (Mous.), *costulata* Porro, Villa, Spin. olim nec Ziegl., *striata* Brum. nec Muell. nec Drap., *thymorum* (pars) Alten in schedis; commune partout.

mut. *maxima*, *H. bidentata* Drap. tabl., *striata* var. *i.* Drap. hist., *candidula* Mich. nec Stud., *thymorum* Villa nec Alten. – Dans la plaine et sur les collines.

var. *alpina* Meg.? (Strob. malac. trent.). – Sommet du mont Bondone dans la vallée du Sarca, en familles; peut-être c'est une espèce distincte. Sa coquille ressemble à celle de la var. *compressula* Stentz de l'*H. costulata* Ziegl., mais par la construction de l'animal elle se rapproche plutôt de l'*H. unifasciata* Poir. (A. Schm. in lit.).

— costulata Z., *striata* Muell., *thymorum* (altera pars) Alten. – Lombardie (Rm.)?? Je ne l'ai rencontrée ni dans la Lombardie, ni dans le Vénitien, ni dans le Tyrol.

var. *compressula* Stentz, *rugosiuscula* Villa, *conspurcata* var. *costulata* Moq.-Tand. – Mantoue (Villa).

— conspurcata Drap. – Collines de Brescia (Spin.), Mantoue (Porro).

— profuga A. Schmidt, *striata* auct. – Dans la plaine, et sur les collines des prov. de Côme (Porro), de Brescia (Spin.) et de Mantoue; en familles.

— variabilis Drap. var. *nebulosa* Villa. – Seulement dans le Mantouan: collines de Volta (Del Mayno), bords de l'Oglio (D'Arco); elle vit aussi dans les prov. vénitiennes voisines de Rovigo et Padoue; peut-être elle y a été apportée des côtes de l'Adriatique.

— nemoralis L. – Très-commune partout.

albina, *H. hortensis* Lanf., Porro, Villa, Spin. olim, aliorumque. – Ça et là autant dans la plaine, que sur les collines et les monts. Dans

certains endroits cet albinisme ou hyalinisme est presqu'exclusif, ainsi que dans la Val Cavallina près de Bergame. Moquin-Tandon croit que la vraie *H. hortensis* Muell., qui ne vit point chez nous, n'est qu'une forme de l'*H. nemoralis;* la plupart des malacologistes modernes, dit-il, ont du moins cette opinion. Mais A. Schmidt, en 1849, avait déjà signalé la différence entre le dard des deux hélices; c'est une différence anatomique et partant, ce me semble, elle doit être appréciée.

— cincta auct., *grisea* L. nec Gmel. - Commune sur les collines et dans la plaine, qui les environne, des prov. de Côme, Milan, Bergame, Brescia et Mantoue; aux rivages des lacs de Côme et Garde (jusqu'à Arco), et même à Gardone dans la vallée bressanne de Trumpia et sur le Mont Baldo (Betta). A Milan elle ne vit que dans les jardins, elle y a été donc introduite des collines. L'*H. lemniscata* Brum. n'est qu'une *H. cincta* petite, à rides transverses rugueuses, pâle, avec les bandes lavées.

albina, *H. othis* Meneg. olim, *Pollinii* Da Campo. – Brescia, Gardone (Spin.), bords du Benaco et du Mincio (A. Schmidt).

— lucorum Muell. – Commune dans la plaine du Pavesan, du Crémonais, du Mantouan et aux rivages méridionaux du lac de Garde; acclimatée à Bellagio au Lario (Rezia); en Valsassina? dans la prov. de Côme (Porro); Gardone (Spin.); et sur le mont Baldo (Betta). A Pavie on ne trouve cette espèce que dans les jardins, par conséquent elle doit y avoir été importée.

— pomatia L. – Très-commune partout.

— aspersa Muell., *grisea* Gmel. nec L. – Seulement dans la prov. de Mantoue, commune; elle s'y est répandue venant des prov. vénitiennes voisines, où elle est aussi commune, et ne reparaît depuis Mantoue en remontant le Pô, qu'à Ivrée (Rezia) au nord de Turin et à Suse au pied du mont Cenis (Piccaroli), où elle est descendue de la Savoie.

C'est sans doute par erreur que l'on a indiqué comme vivant en Lombardie les *H. muralis* Gmel., Mantoue (Lanf.), *protea* Ziegl. (Porro Mus. Med.), *tetrazona* De Crist. et Jan, Alpes (Rossm.), *vermiculata* Drap., Milan (Rm.). La dernière se trouve cependant dans le Vénitien: à Padoue dans le jardin botanique (Titius); probablement elle y a été importée avec des plantes des Légations romaines voisines. – Gmelin comprend dans l'énumération de son système de la nature une *H. striatula*, qui vit aux bords des torrents de la Lombardie. L. Pfeiffer dans sa monographie des hélicées la place parmi les variétés de l'*H. candi-*

dula Stud.; suivant d'autres auteurs elle serait l'*H. polita* Muell., de la famille du *Zonites algirus* L., donc c'est peut-être le *Z. gemonensis* Férussac. Ces deux espèces sont déjà comprises dans cette liste.

L'*H. villosa* Drap., que Rossmaesler dit avoir été recueillie à Trente, n'a pu être trouvée ni à Trente, ni dans aucun autre lieu de la vallée du Pô.

Glandina acicula Muell., *Columna aciculoides* De Crist. et Jan, *Achatina aciculoides* Betta olim, *A. acicula* var. *festuca* Porro. – Partout mais presqu'isolée.

var. *veneta* Charp., *Ach. acicula* Porro, Betta olim, *Janii* Betta nunc, *aciculoides* Spin., *acicula* var. *Hohenwarti* Strob. olim, var. *maior* Rezia, *Col. acicula* De Crist. et Jan, *Polyphemus aciculoides* Villa, *Bulimus acicula* var. *Hohenwarti* Moq.-Tand.? – Avec la précédente.

Spinelli n'a recueilli près de Brescia qu'*un seul* exemplaire et même mort de la *Gl. algira* Brug. (Pfeiff. L. nec Ziegl.); de ce fait on ne peut donc pas conclure, avec lui, que cette espèce habite ce territoire; l'exemplaire unique, dont il est question, peut y avoir été apporté par hasard. Je ne crois pas non plus, qu'elle vive dans la prov. de Vicence, quoique M. Jan nous l'assure et que cette province soit plus voisine de Montfalcon (Goriee), où ladite espèce est commune. De Betta et Martinati n'en font, eux-mêmes, pas mention dans leur récent catalogue des mollusques vénitiens. – La *Gl. Hohenwarti* Rm. que Scholtz a trouvée à Rive (A. Schm. in lit.), n'est, selon toute probabilité, que la *Gl. veneta*.

Bulimus subcylindricus L., *lubricus* Porro. – Commun partout.

mut. *lubricellus* Z. – Avec le *B. subcylindricus*.

— detritus Muell. – Commun dans les montagnes et sur les collines, et même dans la plaine qui touche à celles-ci, mais il disparaît à l'ouest de Brescia.

mut. *radiatus* Brug. – Avec le *B. detritus*, mais jamais dans la plaine, et il ne s'élève pas si haut que lui.

— quadridens Muell. – Sur les collines et les monts, ça et là, commun.

— tridens Muell. – Partout, mais plus commun dans les montagnes que dans la plaine.

mut. *spretus* Z., *Torquilla 5-dentata* Spin. olim. – Côme (Mous.), Brianza (Porro), collines de Brescia.

— obscurus Muell. – Partout, mais presqu'isolé.

Clausilia dyodon Stud. – Isella et Gondo sur le Simplon (Charp.).

— COMENSIS SHUTTL., *blanda* PORRO, VILLA olim, *commutata* BETTA Malac. della Valle di Non, *dyodon* var. STROB. olim. – Très-répandue dans les montagnes et même sur les collines.

— LAMINATA MONT., *bidens* DRAP. nec L. – Bolbeno dans la haute vallée du Sarca; elle est plus répandue et moins rare dans le Tyrol et le Haut Vénitien. MOUSSON n'a pu la découvrir ni au lac Ceresio ni au Lario.

var. *granatina* ZIEGL. – Lombardie (CHARP.).

— BALSAMO STROB. – Valserina et Valtorta, vallées secondaires de la Valbrembana (vallée du Brembo) près de Bergame; en familles nombreuses. Cette espèce représente en Lombardie la *Cl. Stentzii* RM. des montagnes orientales de la vallée du Pô, et peut-être l'on trouvera successivement l'anneau de liaison entre ces deux formes.

var. *leucensis* VILLA. – Monts de Lecco (Leucum), Cortenova en Valsassina (DEL MAYNO) dans la prov. de Côme.

— ALBOGUTTULATA WAGN. – Prov. de Brescia (SPIN. in spec.)??

var. *lombardica* PFR. L. Symb., *albopustulata* DE CRIST. et JAN, *rubiginea* VILLA. – Commune et très-répandue dans les alpes et les montagnes et sur les collines, d'où elle a été transportée à la plaine avec les pierres employées à différents usages dans les jardins: Urgnano, Monza, Milan; acclimatée à Pavie. Dans les Apennins romains et piémontais elle vient remplacée par la *Cl. punctata* MICHAUD.

subvar. *baldensis* PARR. – Mont Baldo, Valpolicella près de Vérone (BETTA).

subvar. *latestriata* CHARP. – Vallées des prov. de Côme, Bergame et Brescia (SPIN.); en familles.

var. *itala* MART.; *itala, Braunii* et *onusta* SPIN., *Braunii* cum var. *itala* et *onusta?* BETTA. – Commune dans la Valsarca, dans les montagnes et sur les collines des prov. de Brescia et Mantoue, et même transportée dans la plaine: Mantoue. Sur les collines de Parme on trouve sa sous-variété *Cl. rugata* ZIEGL., et sur les collines de Vicence et de Padoue l'autre sous-variété *Cl. subrugata* MENKE, qui marque le passage entre l'*itala rugata* et l'*itala levis*.

— PAPILLARIS DRAP., *bidens* L. – Commune sur les remparts de Crémone et de Mantoue (LANF.), où elle a été sans doute apportée avec les pierres qui ont servi à la construction des remparts; dans le Vénitien oriental elle est très-commune.

— CLAVATA RM., *lamellosa* VILLA. – Monts de Lecco (MARANI), Val-

sassina (Porro) dans le Comasque, Valsabbia (Spin.) dans la prov. de Brescia.

— ventricosa Drap. - Lombardie (Charp.); je ne l'ai trouvée que dans le Tyrol; De Betta l'a recueillie dans les Alpes du Haut Vénitien.

— basileensis Fitz. var. *cruda* Charp. nec Rm., *ventricosa* var. *a. b.* Porro, *ventriculosa* Villa, *Rolphii* quor. - Répandue sur les monts et les collines et dans la plaine qui les environne; commune.

mut. *fauce callosa; Cl. rugosa* Stab., *cruda* Villa? - Canton Tessin, prov. de Côme et de Brescia (Spin.), avec la *Cl. cruda.*

mut. *lineolata* Held (Moq.-Tand.), *Cl. superflua* quor. - Avec la mutation précédente.

var. *tumida* (1), *Cl. plicatula* var. *simplex* Parr. in lit., *Cl. tumida* Parr. nec Z. (A. Schmidt in lit.). - Rendena dans la haute vallée du Sarca; moins rare dans le Tyrol. - Moquin-Tandon réunit les *Cl. ventricosa* et *basileensis* en une seule espèce; est-ce que cette réunion est fondée sur l'examen anatomique des animaux des deux formes? Du moins les observations géographiques n'appuient point cette réunion.

— plicatula Drap., *ventricosa* var. *c.* Porro. - Avec la *Cl. cruda,* commune.

mut. *superflua* Meg. (Charp.). - Ça et là avec la *Cl. plicatula.*

mut. *mucida* Ziegl. - Valgana et Côme (Charp.).

mut. *Villae* Meg. (Pfr. L. et Porro, nec Charp. nec A. Schmidt). - Ça et là dans les prov. de Côme, Bergame et Brescia (Spin.) avec la *Cl. plicatula.*

— parvula Stud. - Faido dans le Canton Tessin (Stab.), Alpes lombardes (Villa); dans le Haut Vénitien elle est remplacée par son affine *Cl. Schmidtii* L. Pfeiffer.

var. *Villae* Meg. (Charp. nec Pfr. L., nec Schmidt A.). - Alpes de la prov. de Côme (Charp.).

— exoptata A. Schmidt in lit., *gracilis* var. *plica palatali distincta* Strob. Valbremb. - Valserina et Valparina dans la vallée du Brembo prov. de Bergame; elle n'a été rencontrée ni dans le Vénitien ni dans le Tyrol.

---

(1) *Minor, inflata, interlamellare subsimplice.*

— Whateliana Charp. – Valbrembana dans le Bergamasque; commune.

var. *brembina* Strob., *Villae* Meg. (A. Schmidt in lit., nec Charp. nec Pfr.). – Valsassina dans le Comasque (Rezia), Valbrembana supérieure; commune.

— Strobel Porro, *Stabilei* Charp. postea, *tumida* Stab. nec Ziegl., *trivia* complur. – Monts et collines du Canton Tessin et de la Lombardie.

— dubia Drap., *dubia* et *rugosa* Villa, *rugosa* Blaun. – Commune, même ça et là très-commune, dans les montagnes du Canton Tessin, du Comasque et de la Valteline; elle n'est pas moins commune dans le Tyrol, par conséquent on doit la retrouver aussi dans les prov. de Bergame et de Brescia et dans la vallée du Sarca, qui s'étendent entre les susdites contrées lombardes et le Tyrol.

— verbanensis Stab. in schedis. – Entre Palanza et Stresa au Verbano.

— plicata Drap. – Bellinzona dans la Suisse italienne (Stab.), bords du Verbano (Charp.). De Betta a recueilli l'affine *Cl. biplicata* Mont. dans la vallée du Noce de la prov. trentine.

Balea perversa L., *Turbo perversus* Lanf.? - Répandue dans les alpes, les montagnes et même sur les collines, d'où elle a été transportée jusqu'à la plaine: Milan, Mantoue?; ça et là commune.

Pupa granum Drap. – Cavalcaselle et Colà (Men.), Iseo et Valsabbia (Spin.), et morte parmi les alluvions des fleuves à Pavie et Casalmaggiore; elle doit donc vivre de même dans les vallées du Tessin et de l'Adde, quoiqu'on ne l'ait jamais observée dans ces endroits.

— avenacea Brug. – A Molveno au sommet de la Valsarca; elle vit aussi ça et là dans le Tyrol.

var. *megacheilos* De Crist. et Jan. – Très-commune sur les monts et les collines des prov. de Côme, Bergame, Brescia; à Bormio dans la Valteline et dans la vallée inférieure du Sarca.

mut. *minima*, *P. avena* var. *minor* Porro, *hordeum* Stud. (Porro nec Charp.). – Le Comasque (Porro) et le Bergamasque (Villa)? mêlée à la *megacheilos* et à la mutation suivante.

mut. *minor*, *P. avena* Porro, Spin., Betta, *albilabris* Ziegl.?, *Torq. avena* Villa, Stab. – Commune dans les prov. de Côme et de Brescia, mixte à la *megacheilos*, à Lugano dans la Suisse et à Malcesine au pied occidental du mont Baldo.

mut. *maxima*, *Torquilla tricolor* Villa, *P. megacheilos* Rm. –

Très-commune à Leeco et en Valsassina dans le Comasque, en Valtaleggio près de Bergame, à Toscolano et Gargnano au Benaco.

var. *multidentata* Strob., *circumplicata* Mouss. in lit. (rectius!). – Très-commune en Valsassina et Valbrembana.

var. *bergomensis* Charp. – Environs de Bergame et entrée de la Valbrembana, mais jamais associée ni avec la *P. megacheilos* ni avec la *P. multidentata;* très-commune.

— frumentum Drap. var. *triticum* Z., *illyrica* Rm., *P. frumentum* Porro, Rezia, Betta, *frum.* et *pachygastra* Spin., *Torq. frum.* et *trit.* Villa, *T. appennina* et *trit.* Spin. olim. – Commune et très-répandue dans les montagnes et sur les collines, d'où elle est descendue jusqu'à la plaine.

mut. *minor* Rm. – S. Gothard.

mut. *curta* Z. – En Valgana et aux bords orientaux du Lario dans le Comasque, dans les prov. de Bergame et de Brescia (Spin.), Bolbeno dans la Valsarca supérieure; commune çà et là à l'ouest et au nord.

mut. *elongata* Z., *adiuncta* Rm., *Torq. apennina* var. *a.* Spin. olim. – Vallées et collines orientales: commune à Valgobbia (Spin.), Brescia et Toscolano dans la prov. de Brescia, aussi à Rive au Benaco.

mut. *cylindracea* Z. (1). – Toscolano dans le territoire bressan.

— biplicata Mich. (2) nec Moq.-Tand., nec Rm. – Monts lombards (Villa)?, presqu'isolée à Bolbeno dans les Giudicarie, dans les alluvions du Mincio à Mantoue (Men.); elle est rare aussi dans les prov. de Trente et de Vérone.

var. *valsabina* Spin. – Monts qui entourent le lac d'Idro dans la prov. de Brescia.

var. *Ferrari* Porro, *biplicata* Moq.-Tand., Rm. – Commune sur les monts des trois lacs; en Valgana, dans la Brianza et en Valsassina (Del Mayno) prov. de Côme; dans les vallées bergamasques du Brembo et du Serio; et elle atteint même les rivages du lac d'Idro susdit.

— doliolum Brug. – Induno près de Varèse dans la prov. comasque, bords des lacs de Côme et d'Idro, prov. de Brescia (Spin.), Bolbeno en Valsarca, alluvions du Mincio à Mantoue (Men. in spec.); presqu'isolée.

---

(1) *Alta* 17, *lata* 4, 5 *millimetra.*

(2) « *Glabra!* »

— DOLIUM DRAP. – Mompiano? et Vesto dans la prov. de Brescia (SPIN.), presqu'isolée, ainsi que dans la prov. de Vérone (BETTA).

— PAGODULA DES MOUL. – Dans les montagnes et sur les collines.

— UMBILICATA DRAP., *cupa* JAN et DE CRIST. (PORRO). – Vallées comasques et collines bressannes (SPIN.) – C'est peut-être la *P. Villae*.

var. *Sempronii* CHARP. – Mont Simplon, Bellinzona en Suisse, Laveno au Verbano (VILLA), Valgana et Brianza dans le Comasque, Bergame; en familles.

mut. *Villae* CHARP. auct. longob. – Canton Tessin, Chiavenna en Valteline (MOUS.), rivages du lac de Côme, Rogeno et bords du lac de Pusiano (1) en Brianza (CHARP.), Costalunga près de Brescia (SPIN.).

mut. *dilucida* Z. – Valgana, Val d'Oro (PORRO), Porlezza (DEL MAYNO) et Bellagio dans le Comasque, Lumezzane, Virle et Botticino dans la prov. de Brescia (SPIN.).

— MARGINATA DRAP. – Commune partout.

mut. *unidentata* PFR. C. – Ça et là avec la *marginata:* prov. de Pavie, Milan, Côme, Brescia.

mut. *bigranata* A. SCHMIDT, MOQ.-TAND. nec RM., *bidentata* PFR. C. (2). – Toscolano au Benaco.

— TRIPLICATA STUD. – Côme (BLAUNER), Menaggio au Lario (MOUS.), alluvions du Pô à Casalmaggiore, Terlago dans la vallée du Sarca; moins rare dans le Tyrol avec la *mut. bigranata* RM. nec A. SCHM., nec MOQ.-TANDON. Peut-être quelqu'un la croit encore une petite variété de la *P. marginata*.

Les frères VILLA dans leur catalogue des mollusques de la Lombardie ont indiqué la *P. quinquedentata* BORN, *cinerea* DRAP., comme vivant dans nos alpes. Cela est absolument impossible, car cette espèce aime les plages méridionales et par conséquent ne peut s'élever à la hauteur des alpes. De plus ce ne sont pas messieurs VILLA eux-mêmes,

---

(1) On appelle *Brianza* le groupe de collines délicieuses parsemées de maisons de campagne, qui s'étendent entre les deux bras méridionaux du Lario, c'est-à-dire, entre la moitié inférieure du lac de Côme et le lac de Lecco. Il y a au pied de ces collines plusieurs lacs plus petits, parmi lesquels ceux de Pusiano, d'Annone et d'Alserio méritent d'être distingués. KÜSTER traduit Brianza par *Brienz*, et il paraît qu'il ait pensé, que c'était un village situé au lac de Pusiano: « *Brienz am See von Pusano*, » tandis que c'est le lac de Pusiano qui est placé dans la Brianza!

(2) Voir STROBEL Malacol trentina p. 43.

qui ont recueilli cette espèce dans nos alpes, c'est donc une indication fausse qu'on leur a donnée. On n'est pas bien sûr que la *P. quinquedentata* ait été trouvée dans la vallée du Pô, si ce n'est à Suse au pied du mont Cenis (1), où elle est arrivée de la Savoie ou de la France voisines en compagnie d'une petite variété de la *P. variabilis* Draparnaud. On assure de l'avoir observée aussi à Padoue et à Venise, mais ces observations sont très-douteuses, et Martinati et De Betta les citent sans les garantir.

Vertigo edentula Drap. – Pas commune: mont Ceneri près de Lugano (Stab.), Varèse (Porro) dans le Comasque, Legnano (Stab.) dans le Milanais, collines de Brescia (Spin.).

mut. *elongata; P. inornata* Mich. (Villa). – Plaine.

— minutissima Hartm., *minut.* et *cylindrica* Villa, Spin. olim. – Partout.

— antivertigo Drap. – Dans le Pavesan, sur les collines lombardes (Villa), en Valgana et à Fraschirolo dans le Comasque (Pag.), à Rocca d'Anfo dans la prov. de Brescia (Spin.).

— pygmaea Drap., *pygmaea* et *similis* Villa, Stab. – Partout.

— plicata A. Muell., *Venetzii* Charp., *pusilla* Porro, Villa, Stab. – Canton Tessin, prov. de Côme, Brescia, Pavie et Milan.

— pusilla Muell. – Bellinzona dans la Suisse; elle ne descend pas davantage vers le midi (Mous.).

AURICULAE.

Carychium minimum Muell. – Commun partout.

mut. *nanum* Küst., *elongatum* Villa. – Avec le *C. minimum*: Canton Tessin (Stab.), provinces de Côme, Milan, Brescia (Spin.).

---

(1) Je ne puis m'empêcher de signaler ici le fait, qu'à Suse on rencontre réunies des espèces maritimes, méridionales, occidentales et même septentrionales: *Hel. aspersa*, *Pupa 5-dentata*, *variabilis*, *Hel. lapicida*; mais cela ne doit pas nous étonner, si nous réfléchissons que sur le mont Cenis vit la méridionale *H. apicina* Lam., *cenisia* Charp.; il y a là le point de jonction de quatre faunes malacologiques: du sud ou des Apennins, du nord ou des Alpes, do l'ouest ou de la France, et du centre ou de la vallée du Pô. Lesdites espèces ont été recueillies à Suse par mon cher ami le botaniste Victor Piccaroli. La *P. variabilis* fut aussi trouvée, par le même, à Vernante au pied septentrional du Col de Tende, autre point de jonction de la faune centrale avec l'occidentale et la méridionale; et ladite *Pupa* y vit avec une autre espèce occidentale, l'*H. silvatica* Drap. et avec la méridionale *H. cespitum* Drap. var. *introducta* Ziegler.

On ne trouve l'*Auricula myosotis* Drap., que dans le voisinage des eaux saumâtres. La Lombardie, proprement dite, n'atteint pas la côte de la mer adriatique, par conséquent cette *Auricula* ne peut point vivre en Lombardie, et il est sûr, que les frères Villa se sont trompés en la rangeant parmi les mollusques lombards vivants.

CYCLOSTOMATA.

Acme lineata Drap., *Cyclostoma l.* Porro. – Presqu'isolée sur les collines et dans les vallées du Canton Tessin (Stab.) et des prov. de Côme et de Brescia (Spin.); elle doit vivre de même dans les autres contrées montueuses de la Lombardie, car elle a été recueillie dans les territoires voisins de Vérone et de Trente.

var. *fusca* Walk., *polita* Hartm. – Avec l'*A. lineata* et même à Legnano dans la plaine milanaise (Stab.), mais ici probablement morte dans les alluvions de l'Olona (*lineata* detrita!).

Pomatias Porro Strob. – Valserina et Valtorta dans la vallée bergamasque du Brembo; commun.

— septemspiralis Raz., *maculatus* Drap. – Commun et très-répandu dans les montagnes et sur les collines.

var. *Villae* Spin. (1). – Prov. de Brescia; il vit aussi dans le Vénitien et dans le midi du Trentin.

— Philippianus Gredler (2). – Au pied du mont Baldo; De Betta n'en fait pas mention. Ainsi que le *P. Porro* est dans la Lombardie le représentant du groupe du *P. auritus* Ziegl. de la Dalmatie, le *P. Philippianus* est le représentant d'une forme dalmatine d'un autre groupe, du *P. scalarinus* Villa.

— patulus Drap. var. *Henricae* Strob. – Mont Baldo (Betta), il est commun dans le Vénitien et dans les parties méridionales et orientales de la prov. de Trente.

Cyclostoma elegans Muell. – Très-commun à l'entrée des vallées de Côme, Bergame et Brescia et sur les collines; il a même été transporté à la plaine: Capriate et Cassano dans le Bergamasque, Paitone dans la prov. de Brescia, Peschiera, Cerlongo et Mantoue dans le Mantouan; il vit aussi dans les jardins publiques de Venise.

---

(1) *Maximus, valde costulatus.*

(2) Drittes Programm des k.k. Gymnasiums in Bozen, 1853.

§ II.

OROGRAPHIE.

Dès l'an 1844 les frères Villa, dans le catalogue des mollusques de la Lombardie, ont donné un essai de distribution orographique des mollusques de ce pays, en le partageant en quatre régions, à savoir: la *plaine*, les *collines*, les *monts* et les *alpes*. Mais ils ont trop hasardé, lorsqu'ils ont prétendu fixer pour chaque espèce la région qu'elle caractérise, ou qu'elle préfère, et ils n'ont pas même suivi en cela les lois de la nature. Il y a bien peu d'espèces qui sont exclusives d'une seule région, il y en a plusieurs qui sont caractéristiques d'une région, mais il y en a beaucoup aussi qui vivent sans choix dans deux ou plusieurs régions, même indifféremment dans toutes les quatre. Celles-ci ne préfèrent donc aucune région, elles ne la caractérisent non plus. Il nous faut éclaircir la chose par des exemples. MM. Villa donnent à l'*H. pomatia* la plaine comme région préférée par cette espèce. Mais nous la voyons même dans les alpes et sans aucune trace qui indique, qu'elle s'y trouve mal aisée. Bien au contraire dans les montagnes cette espèce acquiert de plus grandes dimensions, ce que MM. Villa eux-mêmes ont signalé dans l'introduction à leur catalogue. Tout cela prouve que dans la Lombardie elle ne préfère pas du tout la plaine, ce qui est bien naturel, puisqu'elle ne constitue point une espèce méridionale mais plutôt du centre de l'Europe. – Quelquefois MM. Villa ont admis pour règle générale un fait, qui n'est plutôt qu'une exception. Ils indiquent p. e. la plaine comme la région préférée par la *Balea perversa;* et cela, je crois, parcequ'ils l'ont recueillie en abondance dans le jardin publique de Milan sur les tiges des tilleuls (1). Mais ces messieurs, peut-être, n'ont pas remarqué que cette espèce s'y est propagée venant du jardin appartenant au palais dit *la Villa*, qui s'y trouve tout près et où elle vit sur les arbres et sur les pierres. C'est peut-être avec ces dernières que l'espèce a été introduite soit des collines, soit des montagnes; ou bien elle a été importée moyennant les arbres des monts qui y ont été acclimatés. Quoi qu'il en soit la *Balea* est

(1) Là où ces tilleuls cessent, et commencent les marronniers d'Inde, on ne trouve plus la *Balea;* c'est un fait singulier!

bien rare dans la plaine, c. a. d. que, excepté Milan, je ne connais que Mantoue, où il paraît qu'elle ait été recueillie, admis que le *Turbo perversus* L. de Lanfossi soit la *Balea* et non la *Clausilia dubia*, ce qui cependant est presqu'impossible - ou quelque autre espèce. La même faute s'est passée aussi avec les *Lim. marginatus*, *Vit. elongata*, *Hel. cincta*, *fruticum mut. fasciata*, *Claus. lombardica*; de même la *Cl. leucensis* ne préfère pas la colline, ni les *Hel. holosericea*, *nemoralis albina*, *Pupa elongata* les monts, ni les *Zon. gemonensis*, *Pupa megacheilos*, *Claus. latestriata* et *clavata* les alpes. Enfin MM. Villa se sont probablement trompés en croyant que les *Pupa umbilicata*, *tricolor*, *Cl. itala* et *papillaris* habitent de préférence les alpes; les *Zon. hydatinus* et *olivetorum* de préférence les montagnes; les *Hel. dolopida*, *Vert. pusilla* de préférence les collines et le *Zon. purus* de préférence la plaine. Je ne les ai jamais trouvés dans lesdites régions. Sont-ce des fautes d'imprimerie? Nous serions tentés de le croire, si nous ne voyions pas qu'elles n'ont pas été corrigées dans l'addition de 1853. – Nonobstant ces défauts l'essai de MM. les frères Villa mérite d'être loué, étant le premier de ce genre.

Dans la même faute que MM. Villa sont tombés M. Spinelli dans la 1.e édition de son opuscule sur les mollusques bressans, et pour cela il est quelquefois en contradiction avec les frères Villa, p. e. selon lui l'*Helix obvoluta* et la *Claus. comensis* vivent dans la plaine, tandis que MM. Villa les considèrent comme espèces monticoles, ce qui est plus juste. Au contraire c'est Spinelli qui a raison, lorsqu'il place parmi les mollusques collinaires les *Pupa umbilicata* et *Cl. itala*, que les frères Villa regardent à tort, je crois, comme alpines, ou habitant les hauts monts.

Dans mon travail présenté au neuvième congrès des naturalistes italiens, déjà cité dans l'introduction, j'ai cherché de corriger ces défauts en notant, comme dans le premier tableau qui va suivre, à chaque espèce *toutes* les régions qu'elle habite. Dans le second tableau j'ai tenté de donner une distribution des mollusques en zones; dans le troisième d'assigner à celles-ci les formes qui sont caractéristiques à chacune d'elles.

Ce n'est qu'un faible essai, il est vrai, mais cependant, si je ne me trompe pas, c'est quelque chose; – je souhaite que d'autres fassent davantage dans leurs pays ou du moins autant, et le temps viendra, où en comparant les faits particls et procédant de la synthèse des faunes locales à une synthèse générale, on pourra établir les lois qui ont déterminé la répartition des êtres sur notre globe.

I.

Tableau des mollusques avec l'indication des zones orographiques *qu'ils habitent.*

Mollusques		Zones				Mollusques		Zones			
LIMACES: 9 espèces.						Helix	11. aculeata	p.	c.	m.	
							12. leucozona		(—)	m.	a.
Arion	1. empiricorum	p.	o.	—			13. ciliata		c.	m.	—
	2. subfuscus			m.	—		14. rubiginosa	p.			
	3. hortensis			m.	—		15. sericea		c.	m.	a.
							16. hispida	p.	c.	m.	
Limax	1. marginatus	—	c.	m.			17. lurida		—	m.	—
	2. agrestis	p.	c.	m.	a.		18. incarnata	p.	c.	m.	—
	3. arborum			m.	—		mut. *monodon*		c.	m.	
	4. maximus	p.	c.	m.			19. strigella	p.	c.	m.	
	5. coerulans	p.	c.	m.			mut. *hexagyra*	—	c.	m.	—
	6. variegatus	p.	c.	—			20. cantiana	p.	c.		
							var. *minor*		c.	m.	
							21. carthusiaoella	p.	c.	m.	
HELICES: 100 espèces.							22. cinctella	p.	c.	—	
35 variétés.							23. fruticum	p.	c.	m.	—
							24. arbustorum		?	m.	—
Succinea	1. putris	p.	c.	m.			var. *alpicola*			—	a.
	var. *Pfeifferi*	p.	c.	m.			*picea*				a.
	2. oblonga	p.	c.	m.			25. pulchella	p.	c.	m.	—
							mut. *costata*	—	c.	m.	a.
Vitrina	1. elongata	—	c.	m.	—		26. glacialis				a.
	var. *glacialis*				a.		27. insubrica				a.
	2. diaphana		c.	m.			28. frigida				a.
	var. *nivalis*				a.		29. tigrina		c.	m.	—
	3. limacoides	p.	c.	m.	—		30. Preslii *var. nisoria*			m.	—
							var. *luganensis*			m.	
Zonites	1. crystallinus	p.	c.	m.			31. cingulata		c.	m.	—
	var. *hydatinus*	p.	c.				mut. *fascelina*	—	c.	(m.)	
	diaphanus	p.	c.	m.	—		var. *colubrina*		c.	m.	—
	2. glaber			m.			32. zonata			m.	a.
	3. cellarius	—	c.	m.	—		var. *longobardica*			m.	
	var. *Draparnaldi*	p.	c.	—			33. adelozona			m.	—
	4. nitens		c.	m.			var. *rhaetica*			m.	?
	var. *hiulcus*		c.	m.			34. umbilicaris		(c.)	m.	(—)
	nitidulus		c.	m.			35. Ammonis	p.	c.		
	5. purus		c.	m.	a.		36. candida	p.	c.		
	6. socineus	p.	c.	m.			var. *candidula*	—	c.	m.	
	7. olivetorum		c.				37. unifasciata	p.	c.	m.	—
	8. fulvus	p.	c.	m.	—		mut. *candidula*			m.	—
	9. gemonensis		c.	m.	—		*bidentata*	p.	c.	—	
							var. *alpina*			—	a.
Helix	1. umbilicata		c.	m.	—		38. costulata	?	?	?	?
	var. *rupestris*		?	m.	a.		var. *compressula*	p.			
	2. pygmaea	p.	c.	m.			39. conspurcata	p.	c.	—	
	3. solaria	p.	(c.)	(m.)			40. profuga	p.	c.		
	4. rotundata	p.	c.	m.			41. variabilis	p.	c.		
	5. ruderata			—	a.		42. nemoralis	p.	c.	m.	a.
	6. nautiliformis		o.	m.	—		*albina*	p.	c.	—	
	7. angigyra	—	c.	m.			43. cincta	—	c.	—	
	8. obvoluta		c.	m.	—		*albina*		c.	—	
	9. holosericea			—	a.		44. lucorum	p.	c.	m.	
	10. personata			m.			45. pomatia	p.	c.	m.	a.

Mollusques		Zones			
Helix	46. aspersa	p.	(c.)	(m.)	
Glaudina	acicula	p.	c.	m.	
	var. *veneta*	p.	c.	m.	
Bulimus	1. subcylindricus	p.	c.	m.	a.
	2. detritus	—	c.	m.	—
	mut. *radiatus*		c.	m.	
	3. quadridens		c.	m.	—
	4. tridens	p.	c.	m.	—
	mut. *spretus*		c.		
	5. obscurus	p.	c.	m.	—
Clausilia	1. dyodon				a.
	2. comensis		—	m.	—
	3, laminata			m.	—
	var. *granatina*			?	
	4. Balsamo			m.	
	var. *leucensis*		—	m.	
	5. alboguttulata			?	?
	var. *lombardica*	—	c.	m.	a.
	subv. *baldensis*			m.	a.
	latestriata		—	m.	—
	var. *itala*	—	c.	m.	
	6. papillaris	p.	(c.)		
	7. clavata			m.	—
	8. ventricosa				a.
	9. basilecnsis	—	c.	m.	—
	var. *tumida*			m.	a.
	10. plicatula	—	c.	m.	a.
	mut. *mucida*		c.		
	11. parvula				a.
	var. *Villae*				a.
	12. exoptata			m.	
	13. Whateliana			m.	
	var. *brembina*			m.	—
	14. Strobel		c.	m.	—
	15. dubia		—	m.	a.
	16. verbanensis			m.	
	17. plicata			m.	(a.)
Balea	perversa	—	c.	m.	a.
Pupa	1. granum		c.	—	
	2. avenacea			m.	—
	var. *megacheilos*		c.	m.	—
	mut. *tricolor*			m.	
	var. *multidentata*			m.	
	bergomensis		c.	m.	
	3. frumentum	—	c.	m.	—
	mut. *minor*			m.	a.
	elongata		c.	—	
	4. biplicata			m.	
	var. *valsabina*			m.	
	Ferrari		c.	m.	

Mollusques		Zones			
Pupa	5. doliolum		—	m.	—
	6. dolium		?	m.	—
	7. pagodula		c.	m.	—
	8. umbilicata		c.	m.	
	var. *Sempronii*		c.	m.	a.
	9. marginata	p.	c.	m.	—
	mut. *bigranata*		c.	(m.)	
	10. triplicata			m.	—
Vertigo	1. edentula	p.	c.	m.	
	mut. *inornata*	p.			
	2. minutissima	p.	c.	m.	—
	3. antivertigo	p.	c.	m.	—
	4. pygmaea	p.	c.	m.	—
	5. plicata	p.	c.	m.	
	6. pusilla			m.	—
AURICULAE: 1 espèce.					
Carychium	minimum.	p.	c.	m.	—
CYCLOSTOMATA: 6 espèces. 2 variétés.					
Acme	lineata		c.	m.	
	var. *fusca*	—	c.	m.	
Pomatias	1. Porro			m.	
	2. septemspiralis		c.	m.	a.
	var. *Villae*		c.	—	
	3. Philippianus		c.	—	
	4. patulus		c.	m.	
Cyclostoma	elegans	—	c.	m.	

Somme.				
16 genres, dont	12	16	16	9
116 espèces, dont	46	78	90	21
37 variétés, dont	6	18	26	11
153 formes, dont	52	96	116	32

Notes. La lettre *p.* signifie plaine, *c.* collines, *m.* monts, *a.* alpes; la ligne horizontale indique que l'espèce touche seulement la zone, qui devrait être marquée par une des lettres susdites. — Les demeures de deux espèces et d'une variété n'ont pas été indiquées.

II.

Distribution des mollusques selon leur demeure orographique.

I. Mollusques des alpes – ALPINS:

Vitrina *glacialis* et *nivalis;* Helix ruderata, holosericea, *alpicola* et *picea*, glacialis, insubrica, frigida, *alpina;* Clausilia dyodon, ventricosa, parvula cum *Villae* = Somme: 8 espèces et 6 variétés = 14 formes.

II. Mollusques des montagnes et des vallées montueuses – MONTAGNARDS:

A. *qui peuvent s'élever aux régions* subalpines *et même aux* alpines.

Arion subfuscus et hortensis; Limax arborum; Zonites purus; Hel. *rupestris*, leucozona, sericea, lurida, arbustorum, Preslii, zonata, adelozona, *candidula* STUD.; Claus. laminata, alboguttulata cum *baldensi* et *latestriata*, clavata, *tumida*, *brembina*, dubia, plicata; Pupa avenacea, frumentum *mut. minor*, doliolum, dolium, triplicata; Vertigo pusilla = Somme: 21 espèces et 7 variations = 28 formes.

B. *qui semblent ne pas s'élever si haut sur les monts que les précédents:*

Zon. glaber; H. personata, *luganensis*, *longobardica*, *rhaetica;* Cl. comensis, Balsamo cum *leucensi*, exoptata, Whateliana, verbanensis; Pupa *tricolor* et *multidentata*, biplicata cum *valsabina;* Pomatias Porro = Somme: 9 espèces et 7 variations = 16 formes.

III. Mollusques des monts et des collines: des hauteurs – RUPICOLES:

A. *qui s'arrêtent à la* colline:

Vit. diaphana; Z. nitens cum *hiulco* et *nitidulo*, gemonensis; H. umbilicata, nautiliformis, obvoluta, ciliata, *monodon*, tigrina, cingulata cum *colubrina*, umbilicaris; Bulimus quadridens; Cl. Strobel; Pupa *megacheilos* et *bergomensis*, *Ferrari*, pagodula, umbilicata cum *Sempronii;* Acme lineata; Pom. septemspiralis et patulus = Somme: 17 espèces et 8 variations = 25 formes.

B. *qui descendirent à la* plaine, *ou qui y ont été transportés:*

Lim. marginatus; Vit. elongata (tr.); Zon. cellarius; Hel. angigyra, *costata*, *fascelina*, *candidula* ZIEGL.; Bul. detritus; Cl. *lombardica* et *itala* (tr.), basileensis, plicatula; Balea (tr.); Pupa frumen-

tum; Acme *fusca* (tr.?); Cyclostoma = Somme: 10 espèces et 6 variations = 16 formes.

IV. Mollusques des collines – COLLINAIRES:

A. *qui pénètrent dans les* vallées montueuses:

H. cantiana var. *minor;* Bulimus *radiatus;* Pupa granum, *elongata;* Pomatias *Villae,* Philippianus = Somme: 2 espèce et 4 variations = 6 formes.

B. *qui semblent exclusives de la* colline:

Zonites olivetorum = 1 espèce.

C. *qui s'élèvent aux* montagnes *et descendent même dans la* plaine:

Helix cincta = 1 espèce.

V. Mollusques de la *colline* et de la *plaine* – TERRICOLES:

A. *qui touchent aux vallées des* monts:

Ar. empiricorum; Lim. variegatus; Zon. *Draparnaldi;* Hel. cinctella, *bidentata,* conspurcata, nemoralis *albina* = Somme: 4 espèces et 3 variations = 7 formes.

B. *qui ne dépassent pas la* colline:

Zon. *hydatinus;* Hel. cantiana, Ammonis, candida, profuga, variabilis; Cl. papillaris = Somme: 6 espèces et 1 variété = 7 formes.

VI. Mollusques de la *plaine* et des *hauteurs* – TERRICOLES:

A. *qui préfèrent les* hauteurs:

Vit. limacoides; Zon. *diaphanus;* Hel. pygmaea, solaria, aculeata, *hexagyra,* fruticum; Bul. tridens; Vert. antivertigo = Somme: 7 espèces et 2 variations = 9 formes.

B. indifférents:

Lim. agrestis, maximus, coerulans; Sucinea *Pfeifferi,* oblonga; Zon. crystallinus, sucineus, fulvus; Hel. hispida, incarnata, pulchella, unifasciata, nemoralis, lucorum (?), pomatia, aspersa; Glandina acicula cum *veneta;* Bul. subcylindricus, obscurus; Pupa marginata; Vert. edentula, minutissima, pygmaea, plicata; Carychium = Somme: 24 espèces et 2 variétés = 26 formes.

C. *qui préfèrent la* plaine:

Suc. putris; Hel. rotundata, strigella, carthusianella = Somme: 4 espèces.

VII. Mollusques de la PLAINE:

Hel. rubiginosa, *compressula* (?); Pupa *inornata* = Somme: 1 espèce et 2 variations = 3 formes.

NOTE. Je ne sais pas dans quelle région ont été observées les *Hel. costulata* et *Cl. granatina.*

III.

Tableau des espèces caractéristiques pour chaque zone.

I. Zone *alpine:* Hel. ruderata, holosericea, glacialis, insubrica, frigida; Cl. dyodon, ventricosa, parvula = 8 espèces.

II. Zone *montueuse:* Arion subfuscus, hortensis; Lim. arborum; Zon. glaber; Hel. personata, lurida, arbustorum (le type), Preslii, adelozona; Cl. laminata, Balsamo, clavata, exoptata, Whateliana; Pupa avenacea, biplicata, dolium, triplicata; Vert. pusilla = 19 espèces.

III. Zone des *collines:* Zon. olivetorum (en Lombardie, seulement dans le levant).

IV. Zone de la *plaine:* H. rubiginosa.

IV

Observations et déductions.

Ainsi que nous avons vu dans le premier tableau, il y a 116 espèces de mollusques terrestres connus dans la Lombardie et 37 variétés, ce qui fait un total de 153 formes, dont 52 vivent dans la plaine, 96 sur les collines, 116 dans les montagnes et 32 sur les alpes. Ce sont donc les monts qui abritent le plus grand nombre de ces animaux. Dans mon précédent Mémoire, qui comprenait la Haute Italie *entière*, j'avais été conduit à conclure que la plus grande quantité d'espèces vivait sur les collines. Mais mes observations d'alors embrassaient l'Istrie, entièrement composée par des collines, les hauteurs vulcaniques du Vénitien et la chaîne des Apennins, depuis Nice jusqu'à la Cattolica dans les Légations. L'objet des études présentes n'est qu'une partie de cette contrée, la Lombardie seule, constituée sur les deux tiers par les montagnes; la région des collines n'y est guère formée que par les échelons de celles-ci. De ces différences de conditions orographiques découlent naturellement les

conclusions différentes ci-dessus exposées. Dans l'article sur les mollusques du Piémont oriental, qui comprend déjà une petite partie des Apennins, je suis parvenu toutefois à la même conclusion que pour la Lombardie, savoir, que les monts des Alpes sont plus riches en mollusques terrestres que les collines des Apennins piémontais, ce qui est dû cependant, je crois du moins, à la sécheresse de ces collines. Mais non-obstant ces deux conclusions conformes je soutiens que les collines dans une étendue considérable et sous l'influence d'agents variés, *c. a. d.* à conditions égales avec les monts, doivent être peuplées par un nombre de mollusques terrestres plus grand, que celui des montagnes – car la colline réunit en soi les accidents orographiques de la montagne et de la plaine, et elle se compose (dans la vallée du Pô) surtout de roches calcaires et mélangées, qui sont de préférence recherchées par les mollusques pulmonés; ce que nous a déjà appris M. Férussac. Dans la Haute Italie les espèces des côtes et du midi peuvent se propager au pied des collines orientales et méridionales, celles du nord peuvent s'étendre aux sommets des collines septentrionales et occidentales, les espèces du levant n'y trouvent point d'obstacles jusqu'aux monts des Alpes vénitiennes. En ajoutant donc toutes les espèces du midi, du levant et des côtes, qu'on trouve sur les collines méridionales et orientales de l'Italie Supérieure, au nombre déjà considérable des espèces des collines septentrionales et occidentales de la même contrée, on aura une somme qui surpassera celle des espèces des monts dans le même pays, d'autant plus que la quantité des espèces du petit nombre de collines de la Lombardie n'est inférieure à celle des espèces du grand nombre des monts du même territoire que de o. 14 – et que la quantité des genres y est égale.

Les Alpes à cause de leur élévation offrent la moindre quantité d'habitants mollusques; la plaine en a la double, qui cependant n'est que la moitié du nombre des espèces montagnardes. Cette rareté de pulmonés terrestres dans la plaine dépend de la constitution géognostique de celle-ci; tous les mollusques rupicoles en étant exclus, et le *diluvium* qui a formé cette région, étant entre tous les terrains le plus pauvre en espèces. Là c'est donc la rigueur du climat qui l'emporte sur la qualité des roches, ici c'est la nature du terrain qui neutralise l'influence favorable du climat.

En descendant des sommets de nos Alpes les premiers mollusques terrestres que nous rencontrons, ce sont dans la zone alpine, à 2300 m.

environ, les représentants des GENRES *Vitrina*, *Zonites*, *Helix*, *Bulimus*, viennent après ceux des *Limax*, *Clausilia*, *Balea*, *Pupa* et *Pomatias*, ensuite, dans la région subalpine, quelques espèces des genres *Arion* et *Vertigo* et le *Carychium*; ce n'est que sur les côtes des monts et dans les vallées que nous recueillerons les représentants des genres *Sucinea*, *Glandina*, *Acme* et *Cyclostoma*. A mesure qu'on approche de la plaine le genre *Pomatias* cesse le premier, l'*Acme* paraît le suivre, le *Cyclostoma*, la *Balea* et la *Clausilia* se présentent encore ça et là dans la plaine, mais bordant les collines, ou bien ils y ont été introduits, soit par la main de l'homme, soit par le courant des fleuves; une seule espèce du genre *Pupa* se trouve encore à son aise dans la plaine (*P. marginata*). Les *Vitrina*, *Zonites*, *Helix*, *Bulimus* et *Limax* s'étendent depuis les alpes jusque dans la plaine, l'*Arion*, la *Vertigo* et le *Carychium* depuis les régions subalpines également jusque dans la plaine, les *Sucinea* et *Glandina* depuis les monts jusqu'à la plaine.

Les *Hélices* carnivores, quoique presque sporadiques, sont les plus disséminées et s'élèvent plus haut; de même les *Hélices* phytophages et les *Limaces;* puis les *Auriculae;* les *Cyclostomata*, et singulièrement l'*Acme* et le *Cyclostoma*, s'ils ne peuvent pas être considérés comme caractéristiques des collines et des vallées, du moins ils s'y plaisent beaucoup. – Les *Limaces* à bandes *semblent* préférer les montagnes, celles qui sont tachées et les unicolores la plaine. Celle-ci produit le nombre plus grand d'*Hélices* à coquille grande, globuleuse et épaisse, tandis que les roches calcaires des alpes abritent les espèces ayant le test le plus épais: *Hel. glacialis*, *frigida*, *insubrica* (1). Dans les montagnes habite la quantité plus grande d'*Hélices* pourvues de coquille soit velue ou aplatie et ombiliquée, soit denticulée ou épaissie à son ouverture.

Mais je le répète, ces conclusions ne regardent que la Lombardie, et ne doivent donc pas encore être généralisées. – Je remarquerais ici en outre que plusieurs espèces, qui chez nous vivent sur les alpes ou sur les monts, habiteront les collines dans les pays nordiques, et même la

(1) Il semble, qu'à de telles hauteurs, où le degré moyen de la chaleur de l'année tombe sous le zéro, les animaux aient plus besoin de conserver leur chaleur interne pendant le long hiver, que d'absorber l'exteroe pendant l'été trop chaud; et dans ce but leur coquille est merveilleusement construite: lisse à l'intérieur et d'une couleur plus foncée qu'à l'extérieur, épaisse, blanchâtre à l'extérieur.

plaine, pourvu qu'elles ne soient pas essentiellement rupicoles, comme p. e. les *Ar. hortensis*, *Zon. glaber*, *Hel. arbustorum*, *personata*, *Claus. laminata*, *ventricosa*, qu'on trouve presque tous dans la *plaine* transalpine – et *vice versâ* dans les pays méridionaux plusieurs espèces de nos collines et de notre plaine vivront sur les alpes ou hauts monts et dans les vallées montueuses.

Dans la Lombardie les *Hel. solaria*, *aspersa* et *Cl. papillaris* n'ont été observées que dans la plaine, et les *H. umbilicaris* et *Cl. plicata* seulement dans la montagne; néanmoins dans les tableaux elles figurent comme recueillies aussi dans d'autres zones. C'est que j'ai tenu compte de leur dispersion dans d'autres parties de la vallée du Pô, et j'ai dû le faire à cause que les faits relatifs observés dans la Lombardie sont uniques ou presqu'uniques – ce qui dans les *Hélices* et la *Cl. papillaris* dépend de leur distribution géographique dans la vallée, vu que ces espèces atteignent à peine le territoire lombard du côté oriental. Je crois de même que l'*Hel. compressula* vivra non-seulement dans la plaine, mais aussi dans la colline au moins, ainsi que ses affines *Hel. conspurcata* et *unifasciata*, mais je ne connais jusqu'ici aucune autre localité de la Haute Italie, où elle ait été recueillie. Les demeures des *Hel. costulata*, *Claus. alboguttulata* et *granatina* n'ont pas été précisées; de celles-ci par conséquent, nous ne tiendrons pas compte.

La répartition des formes dans le II et même dans le III tableau ne doit pas être prise à la lettre. Quelques-unes des ESPÈCES alpines descendront sans doute, dans certains endroits exposés aux influences nordiques, à la région subalpine, et peut-être aussi à la région montueuse; car sans cela on ne pourrait s'expliquer leur présence sur les sommets isolés des monts, qui ne se rattachent à d'autres sommets, que par un abaissement, où cesse la zone alpine; à moins qu'on ne veuille admettre leur génération spontanée, ce qui semble absurde pour de tels animaux du moins, – ou bien leur importation casuelle, p. e. par l'effet de vents extraordinaires, ce qui est fort improbable, si non impossible, – ou bien leur dégénération des formes affines de la région subalpine ou montueuse, ce qu'on ne pourrait prouver pour ces espèces des alpes qui n'ont pas d'affines dans la zone montueuse, et quand même on eût constaté la présence de ces espèces affines, il faudrait admettre ou que les formes alpines sont descendues, ou que les montagnardes se sont élevées pour

montagnes. Sur les collines et sur les monts on recueille plus facilement que dans la plaine les *H. monodon* et *hexagyra;* le *Bul. radiatus* se plaît sur les collines et dans les vallées chaudes, calcaires, et la mut. *fasciata* de l'*H. fruticum* dans la montagne. L'*H. costata* préfère les hauteurs et la *Pupa inornata* n'a été observée que dans la plaine; la *Pupa frumentum* se présente atrophiée sur les alpes (mut. *minor*) et alonge au contraire son test sur les collines exposées aux influences du midi (mut. *elongata*), où le *Bul. tridens* gagne aussi en taille (mut. *spretus*). La *Pupa marginata* sur les collines chaudes et calcaires arme souvent la bouche de sa coquille d'une seconde dent (mut. *bigranata*). – La même loi de distribution que pour les variétés semble donc régner pour les mutations: les formes plus petites (*H. candidula*, *hexagyra*, *P. frumentum* mut. *minor*) et celles dont la coquille a des dents à l'ouverture (*H. monodon*, *P. bigranata*) sont plus fréquentes dans les hauteurs, et *vice versâ* dans la plaine l'importent les formes plus grandes et élancées (*H. bidentata*, *P. inornata*). Je pense, que l'on doit attribuer ce fait à la température plus haute de cette région, et pour cela plus favorable à l'accroissement. La demeure des espèces qui aiment les hauteurs, sur les collines exposées aux influences du midi, ou sur celles qui, étant constituées par des roches calcaires conservent beaucoup la chaleur de l'atmosphère, produit sur elles le même effet, que la plaine produit sur les espèces susdites (*P. elongata*, *B. spretus*). On ne saurait expliquer la fréquence de l'*H. costata* dans les montagnes que par la raison alléguée tout-à-l'heure pour les variétés *Cl. leucensis*, *baldensis* et *latestriata*. La coloration (*c. a. d.* les bandes et les rayons) est un signe de perfection d'une forme; et puisque l'*H. fruticum* est beaucoup plus fréquemment bandée sur les monts, et le *Bul. detritus* n'est rayonné que sur les collines et dans le fond des vallées, il faut dire que l'*Helix* aime les monts et le *Bulimus* les collines. – Si l'*H. cingulata* en proximité de la plaine ne peut se construire qu'une coquille mince (mut. *fascelina*), cela ne tient point du tout à cet accident orographique, mais à la nature géognostique du terrain, comme on va le voir tout-à-l'heure.

Dans quelques endroits (humides?) de la plaine, des collines et des vallées l'*H. nemoralis* dégénère facilement en albinisme ou hyalinisme; sur les collines et les montagnes sèches dominent les individus ayant une coquille à 1,4 ou 5 bandes brunes et à péristome noirâtre, dans la plaine au contraire abondent les individus ayant le têt à 1,3 (003–45)

ou 5 bandes, quelquefois hyalines, et à péristome pâle. L'*H. nemoralis* paraît donc prospérer chez nous sur les hauteurs.

*

Quoique les *Hel. zonata* et *adelozona* et la *Balea* vivent sur toute qualité de roches, néanmoins elles demeurent de préférence sur les roches mélangées et les silicéo-alumineuses. Le *Pom. septemspiralis* habite les roches calcaires, les mélangées et les porphyritiques. Sur les mêmes roches se trouvent les *H. cingulata* (1) et *Bul. detritus*, mais ils croissent mieux sur le calcaire, car l'*Helix* dégénère sur les mélangées et les porphyritiques en *H. fascelina*, et ce n'est que sur le calcaire que le *Bulimus* atteint une plus grande taille et une coloration plus complète du test (*B. radiatus*). Les roches calcaires autant que les mélangées abritent les *Hel. tigrina*, *Claus. Whateliana*, *Pupa avenacea*, mais ces espèces préfèrent le calcaire, et ce n'est que sur cette roche que la *Pupa* gagne les plus grandes dimensions et une coquille bien épaisse, dont l'ouverture est garnie de fortes dents et d'un bourelet gros (*P. tricolor*), *c. a. d.* elle y touche le plus haut degré de perfection. Les *H. glacialis*, *insubrica*, *frigida*, *Preslii; Claus. Balsamo*, *clavata; Pupa dolium; Pom. Porro* et *patulus* n'ont été recueillis que sur le calcaire, ainsi que l'*H. umbilicata;* mais cette dernière a été rencontrée par Seckendorf de même sur le grès, et il se peut, que les *Claus. Balsamo*, *Pupa* et *Pom. Porro* vivent aussi sur les roches mélangées. Les autres espèces semblent peupler indifféremment tous les terrains, et il faut ranger parmi celles-ci toutes les formes de la plaine, qui est composée en effet des débris de tous les terrains.

---

(1) Il y a trois années que cette espèce a été transportée de nos alpes dans le petit jardin du docteur Prada à Pavie, et elle s'y est propagée sur la poudingue; cette première génération a engendré des individus appartenant à la mut. *fascelina*. Ce n'est donc pas à cause de la position orographique ou géographique que cette espèce manque dans notre plaine, mais parcequ'il y a ici défaut des roches, qui lui sont nécessaires, soit pour se cacher à temps dans leurs fentes, soit pour construire sa coquille.

montagnes. Sur les collines et sur les monts on recueille plus facilement que dans la plaine les *H. monodon* et *hexagyra;* le *Bul. radiatus* se plaît sur les collines et dans les vallées chaudes, calcaires, et la mut. *fasciata* de l'*H. fruticum* dans la montagne. L'*H. costata* préfère les hauteurs et la *Pupa inornata* n'a été observée que dans la plaine; la *Pupa frumentum* se présente atrophiée sur les alpes (mut. *minor*) et alonge au contraire son test sur les collines exposées aux influences du midi (mut. *elongata*), où le *Bul. tridens* gagne aussi en taille (mut. *spretus*). La *Pupa marginata* sur les collines chaudes et calcaires arme souvent la bouche de sa coquille d'une seconde dent (mut. *bigranata*). – La même loi de distribution que pour les variétés semble donc régner pour les mutations: les formes plus petites (*H. candidula*, *hexagyra*, *P. frumentum* mut. *minor*) et celles dont la coquille a des dents à l'ouverture (*H. monodon*, *P. bigranata*) sont plus fréquentes dans les hauteurs, et *vice versâ* dans la plaine l'importent les formes plus grandes et élancées (*H. bidentata*, *P. inornata*). Je pense, que l'on doit attribuer ce fait à la température plus haute de cette région, et pour cela plus favorable à l'accroissement. La demeure des espèces qui aiment les hauteurs, sur les collines exposées aux influences du midi, ou sur celles qui, étant constituées par des roches calcaires conservent beaucoup la chaleur de l'atmosphère, produit sur elles le même effet, que la plaine produit sur les espèces susdites (*P. elongata*, *B. spretus*). On ne saurait expliquer la fréquence de l'*H. costata* dans les montagnes que par la raison alléguée tout-à-l'heure pour les variétés *Cl. leucensis*, *baldensis* et *latestriata*. La coloration (*c. a. d.* les bandes et les rayons) est un signe de perfection d'une forme; et puisque l'*H. fruticum* est beaucoup plus fréquemment bandée sur les monts, et le *Bul. detritus* n'est rayonné que sur les collines et dans le fond des vallées, il faut dire que l'*Helix* aime les monts et le *Bulimus* les collines. – Si l'*H. cingulata* en proximité de la plaine ne peut se construire qu'une coquille mince (mut. *fascelina*), cela ne tient point du tout à cet accident orographique, mais à la nature géognostique du terrain, comme on va le voir tout-à-l'heure.

Dans quelques endroits (humides?) de la plaine, des collines et des vallées l'*H. nemoralis* dégénère facilement en albinisme ou hyalinisme; sur les collines et les montagnes sèches dominent les individus ayant une coquille à 1,4 ou 5 bandes brunes et à péristome noirâtre, dans la plaine au contraire abondent les individus ayant le têt à 1,3 (003–45)

ou 5 bandes, quelquefois hyalines, et à péristome pâle. L'*H. nemoralis* paraît donc prospérer chez nous sur les hauteurs.

*

Quoique les *Hel. zonata* et *adelozona* et la *Balea* vivent sur toute qualité de roches, néanmoins elles demeurent de préférence sur les roches mélangées et les silicéo-alumineuses. Le *Pom. septemspiralis* habite les roches calcaires, les mélangées et les porphyritiques. Sur les mêmes roches se trouvent les *H. cingulata* (1) et *Bul. detritus*, mais ils croissent mieux sur le calcaire, car l'*Helix* dégénère sur les mélangées et les porphyritiques en *H. fascelina*, et ce n'est que sur le calcaire que le *Bulimus* atteint une plus grande taille et une coloration plus complète du test (*B. radiatus*). Les roches calcaires autant que les mélangées abritent les *Hel. tigrina*, *Claus. Whateliana*, *Pupa avenacea*, mais ces espèces préfèrent le calcaire, et ce n'est que sur cette roche que la *Pupa* gagne les plus grandes dimensions et une coquille bien épaisse, dont l'ouverture est garnie de fortes dents et d'un bourelet gros (*P. tricolor*), *c. a. d.* elle y touche le plus haut degré de perfection. Les *H. glacialis*, *insubrica*, *frigida*, *Preslii; Claus. Balsamo*, *clavata; Pupa dolium; Pom. Porro* et *patulus* n'ont été recueillis que sur le calcaire, ainsi que l'*H. umbilicata;* mais cette dernière a été rencontrée par Seckendorf de même sur le grès, et il se peut, que les *Claus. Balsamo*, *Pupa* et *Pom. Porro* vivent aussi sur les roches mélangées. Les autres espèces semblent peupler indifféremment tous les terrains, et il faut ranger parmi celles-ci toutes les formes de la plaine, qui est composée en effet des débris de tous les terrains.

---

(1) Il y a trois années que cette espèce a été transportée de nos alpes dans le petit jardin du docteur Prada à Pavie, et elle s'y est propagée sur la poudingue; cette première génération a engendré des individus appartenant à la mut. *fascelina*. Ce n'est donc pas à cause de la position orographique ou géographique que cette espèce manque dans notre plaine, mais parcequ'il y a ici défaut des roches, qui lui sont nécessaires, soit pour se cacher à temps dans leurs fentes, soit pour construire sa coquille.

§ III.

GÉOGRAPHIE.

On peut partager les espèces lombardes selon le procédé de leur distribution dans le pays: en espèces du nord-ouest ou vivantes dans les Alpes, en espèces de l'est ou provenantes de l'Istrie ou du Frioul en longeant les collines et les montagnes vénitiennes, en espèces du sud-est soit descendues des Apennins, soit montées des côtes de l'Adriatique, en espèces caractéristiques pour la vallée du Pô, en espèces exclusives à la Lombardie ou au centre de ladite vallée, et enfin en espèces qui sont communes à la zone physico-géografique, à laquelle appartient la Haute Italie.

I. Espèces du NORD-OUEST:

A. *nordiques* – relativement à la Lombardie:

Arion subfuscus, Limax arborum, Helix ruderata, Clausilia ventricosa = 4 espèces alpines ou montagnardes. – La *Clausilia* s'étend jusque dans le Méclembourg, l'*Helix* touche la Laponie, et les autres espèces parviennent jusque dans la Scandinavie.

B. des *Alpes* occidentales et centrales:

Hel. glacialis, zonata, adelozona; Claus. dyodon = 4 espèces alpines ou montagnardes. – Les *Hel. zonata* FÉR. et *vittata* JAN, qui selon F. SCHMIDT et GALLENSTEIN habitent dans la Carniole et dans la Carinthie (Alpes orientales), ne sont que des variétés ou plutôt des mutations de l'*Hel. umbilicaris*. La *Claus. dyodon* des mêmes auteurs, selon CHARPENTIER et ROSSMAESSLER, n'est point cette espèce.

II. Espèces de l'EST – de l'Europe mitoyenne:

Hel. solaria, leucozona, umbilicaris = 3 espèces. – L'*H. solaria* a sa limite occidentale dans la Bavière, au nord des Alpes, et dans la Lombardie, au sud de ces monts. L'*H. umbilicaris* s'étend depuis la Serbie en longeant le Balcan (*H. balcanica* FRIV.) jusque dans l'île de Prinkipo près de Constantinople (DE VECCHI), et depuis la Dalmatie jusque dans l'île de Naxie (*H. zonata* FÉR. nec STUD.); enfin elle habite les Apennins au sud de Parme et atteint peut-être même les îles italiennes.

B. des Alpes *vénitiennes:*

Zonites gemonensis – POTIEZ et MICHAUD indiquent cette espèce

dans les îles Baléares; si elle n'y a pas été importée casuellement par les navires provenant d'Aquileja, ce qui est improbable, on doit nier *a priori* un tel fait, étant absolument impossible un pareil saut dans la distribution géographique de ces animaux. Si l'indication n'est pas fausse, ce sera peut-être une autre espèce, qui lui ressemble.

III. Espèces du MIDI:

Zonites olivetorum; Helix cinctella, conspurcata, profuga, cincta, lucorum; Claus. papillaris; Pupa granum; Pomatias patulus = 9 espèces de la plaine, des collines et une aussi des vallées montueuses (*Helix lucorum*). – Les *Helix cincta* et *lucorum* trouvent leur limite occidentale dans l'Italie, et le *Zonites* y a, je crois, sa limite orientale, quoique FRIVALDSZKY dans une note manuscrite assure de l'avoir recueilli dans la Turquie européenne. L'*H. cinctella* et le *Pomatias* sont ceux, qui s'avancent le plus vers le nord. Selon VILLA le *Zonites* et selon MOQUIN-TANDON la *Clausilia* semblent cesser là, où manque toute influence maritime. Nous ne trouvons cette dernière en Lombardie que dans les provinces de Mantoue et de Crémone, où l'influence de l'Adriatique peut se faire sentir, et dans le Vénitien on l'observe aussi à Venise, *c. a. d.* sur la côte de la mer. On pourrait par conséquent la ranger aussi parmi les espèces maritimes, mais du midi seulement, car elle ne dépasse pas le 47° de latitude nord (1). A l'égard du *Zonites* je ferai observer, qu'il n'habite chez nous que les collines et jamais la plaine, ni les côtes de la mer qui ne sont pas des collines; cette espèce est, dans la Haute Italie, caractéristique de la région orographique des collines; donc ce n'est point une espèce maritime, mais une espèce méridionale qui ne dépasse que de bien peu le 45° de latitude nord. Dans les Pyrénées elle a été recueillie par SAULCY jusqu'à la hauteur de 1800 mètres, où, il me semble, qu'une espèce maritime ne pourrait pas atteindre.

B. Espèces MARITIMES:

Lim. variegatus; Hel. cantiana, variabilis, aspersa = 4 espèces de la plaine et des collines - en Lombardie. – L'*H. aspersa* à cause de sa facilité à s'acclimater, et parcequ'elle est comestible, a été introduite dans beau-

(1) ROSSMAESSLER indique la *Cl. papillaris* dans l'Angleterre, et NILSSON douteusement dans la Suède, mais L. PFEIFFER nie ces faits. La *Cl. papillaris* du HARZ (ROEMER) n'est selon BOLL que la *Cl. Braunii* CHARP., et la *Cl. papillaris var.* d'Anhalt-Bérnbourg (CURTZE) semble être la *Cl. commutata* ROSSM. (ZEITSCHR. für Malacozoologie).

coup de contrées, le long des côtes de la mer, de manière qu'on peut la considérer presque cosmopolite; elle a été importée, ainsi que deux autres espèces maritimes, les *Bulimus decollatus* Brug. et *ventrosus* Fér., jusque dans l'Amérique. Mais sa naturalisation dans l'intérieur des continents n'est qu'une exception. Je ne connais au centre de l'Europe que Mersébourg dans la Saxe prussienne, où se trouve cette espèce (Boll). A Berne elle a été introduite, mais elle y a dégénéré en une variété atrophiée (Charp.). Nous avons déjà observé que dans la vallée du Pô, depuis Mantoue, nous ne la rencontrons à l'ouest qu'à Ivrée et à Suse, pays voisins de la Savoie et de la Provence, pays qui ne sont pas trop loin de la Méditerranée, et où l'influence maritime peut arriver, car les Apennins qui les séparent de la mer, sont trop bas pour l'en empêcher. Je me crois donc obligé de placer cette espèce parmi les maritimes. – L'*H. variabilis* peuple toutes les côtes de la Méditerranée et de l'Océan Atlantique jusque dans l'Irlande et l'Angleterre. Elle s'avance beaucoup plus dans l'intérieur de la terre ferme que les *H. elegans* Gmel., *trochoides* Poir., *conoidea* Drap., *Bul. ventrosus* Fér., *acutus* Müll., et *decollatus* Brug., qui étant presque toutes des espèces littorales, ne peuvent pour cela pas vivre dans la Lombardie. Cependant l'*H. variabilis* s'éloigne beaucoup moins des côtes que l'*H. aspersa;* elle est beaucoup plus maritime. – Je tiens de même le *L. variegatus* et l'*H. cantiana* comme des espèces maritimes, car ils manquent dans l'Allemagne proprement dite et l'*Helix* aussi dans la France centrale, tandis qu'ils vivent dans la Grande-Bretagne.

IV. Espèces de la vallée du Pô, ou HAUTE ITALIE:

Hel. nautiliformis (1), angigyra, insubrica; Cl. comensis, Strobel; Pom. Philippianus = 6 espèces. – L'*H. insubrica* n'a été recueillie que sur le mont Baldo, et le *Pomatias* à son pied; les *Hel. nautiliformis* et *angigyra* et *Cl. Strobel* n'ont été observées que dans les contrées occidentales de la vallée.

V. Espèces LOMBARDES:

Hel. frigida, tigrina; Cl. Balsamo, clavata, exoptata, Whateliana, verbanensis; Pom. Porro = 8 espèces. – On ne pourra pas dire avec certitude que le *Pom. bilabiatus* Parr. de la Dalmatie, qui ressemble

(1) Cette jolie espèce a été découverte récemment (juillet 1857) sur les bords du petit lac de Viverone (entre Ivrée et Biella) dans le Canavais en Piémont (C. Mella).

beaucoup au *P. Porro*, soit une variété de ce dernier, jusqu'à ce qu'on n'ait pas trouvé le point, où ils se touchent dans leur dispersion géographique.

VI. Espèces de la zone méridionale de l'EUROPE MITOYENNE:

A. *Caractéristiques* de cette zone:

Limax coerulans (?); Hel. lurida, cingulata, Ammonis, candida = 5 espèces. – Le *Limax* et l'*H. lurida* paraissent se tenir plus au N. E. et les *H. Ammonis* et *candida* plus au S. E.

B. Répandues dans *toute* ou presque toute l'Europe mitoyenne.

Sucinea oblonga; Vitrina elongata, diaphana, limacoides; Zon. glaber, nitens, purus; Hel. umbilicata, obvoluta, holosericea, personata, rubiginosa, ciliata, carthusianella, Preslii, unifasciata, costulata, pomatia; Bul. detritus, quadridens, tridens; Claus. laminata, alboguttulata, basileensis, parvula, plicata; Pupa avenacea, frumentum, biplicata, doliolum, dolium, pagodula, triplicata; Vertigo edentula, plicata, pusilla; Acme; Pom. septemspiralis; Cyclostoma = 39 espèces. – Parmi ces espèces il en est quelques-unes qui s'étendent aussi au nord, *c. a. d.* les *Vit. limacoides*, *Zon. purus*, *Cl. laminata*, *Vert. pusilla*; l'*H. pomatia* a été importée dans la Scandinavie de l'Allemagne (LIN., E. MART.). Plusieurs semblent caractéristiques pour cette partie de l'Europe, savoir: *Cl. basileensis*, *Pupa pagodula*, *Vert. edentula* et *plicata*, *Acme*. Il y en a beaucoup qui atteignirent jusqu'à la péninsule hespérique, *c. a. d.*: *Suc. oblonga*; *Vit. elongata* et *diaphana*; *Zon. nitens*; *Hel. holosericea* (GRAELLS), *ciliata* (CHARP.), *costulata*; *Cl. parvula* (KÜST.); *Pupa triplicata*; – les *Zon. glaber*, *Hel. Prestii* (espèce sporadique?), *Pupa doliolum* et *dolium* parvinrent jusque dans la presqu'île Olympique. Toutes les autres [16] espèces s'étendent aussi dans tout le midi de l'Europe.

C. Disséminées dans toute ou presque toute l'*Europe*:

Arion empiricorum, hortensis; Limax marginatus, agrestis, maximus; Suc. putris; Zon. crystallinus, cellarius, sucineus, fulvus: Helix pygmaea, rotundata, aculeata, sericea, hispida, incarnata, strigella, fruticum, arbustorum, pulchella, nemoralis; Glandina; Bul. subcylindricus, obscurus; Cl. plicatula, dubia; Balea; Pupa umbilicata, marginata; Vert. minutissima, antivertigo, pygmaea; Carychium = 33 espèces. – La *Cl. dubia* est substituée dans le littoral méridional de la France et dans la péninsule Hespérique par la *Cl. rugosa* DRAPARNAUD. Il semble que la *Cl. plicatula* ne se trouve pas dans cette contrée. Dans l'orient de l'Europe

l'*H. nemoralis* et ses affines sont remplacées par l'*H. austriaca* Megerle. La *Pupa umbilicata* qui vit aussi hors des limites de l'Europe, manque cependant dans le centre de cette partie du globe. Selon Jan elle a été recueillie en Alemagne; mais ce fait n'a pas été confirmé par les auteurs alemands, et d'ailleurs ce pays comprend politiquement aussi le littoral de Triest et l'Istrie, où elle habite en effet, sans appartenir pour cela au centre de l'Europe.

Les genres *Vitrina* et *Balea* et les *Zon. fulvus; Hel. pygmaea, rotundata, aculeata, sericea, hispida; Vert. antivertigo* et *pygmaea*, je ne sais pas qu'ils aient été recueillis dans la presqu'île Olympique, mais j'ose affirmer que quelques-uns d'entre eux, surtout les petites espèces, doivent y vivre.

Je vais signaler maintenant deux faits spécieux dans la distribution géographique de nos mollusques terrestres. L'*H. fruticum*, qui est disséminée dans toute l'Europe, trouve dans la vallée du Pô sa limite occidentale sur les Apennins de Parme, dans la basse vallée du Tessin et la plaine de la prov. de Côme, et dans les montagnes au S. et à l'E. de la Valteline. Elle reparaît au de-là des Alpes dans la Suisse, la Savoie et le Dauphiné; mais elle fait défaut dans la Provence, peut-être, et de même dans la Ligurie. Le *Bul. detritus* ne vit pas dans les vallées de l'Adde et du Tessin, il n'a été recueilli non plus dans les Alpes occidentales; la prov. de Brescia constitue donc sa limite occidentale dans le versant méridional des Alpes. Il paraît manquer dans la Ligurie. – La *Pupa biplicata* suit peut-être le même chemin que ledit *Bulimus*, mais elle est trop rare, pour qu'on puisse être sûr d'en avoir bien suivi la marche.

A l'égard des variétés nous observerons que les *Zon. hiulcus* (le vrai); *Claus. leucensis* et *latestriata; Pupa tricolor, multidentata, bergomensis* et *valsabina* paraissent être exclusives de la Lombardie; ainsi que les *Hel. luganensis* et *colubrina, Cl. lombardica, baldensis* et *itala; Pupa Ferrari* (ouest); *Pom. Villae* sont caractéristiques de la vallée du Pô. Les *Zon. hydatinus* et *Draparnaldi; Hel. rugosiuscula; Gland. veneta; Pupa triticum* ce sont des formes méridionales, le *Zon. hyalinus* aime le midi et les *Pupa megacheilos* et *Sempronii* sont exclusives de la zone méridionale de l'Europe mitoyenne. Les *Hel. alpicola* et *picea* se montrent sporadiquement depuis les Alpes occidentales jusque dans les Carpates. Le *Zon. nitidulus* touche la Scandinavie.

ÉNUMÉRATION

des Mollusques terrestres des pays limitrophes de la Lombardie, qui n'ont pas été recueillis dans cette contrée.

Mollusques	Nord	Ouest	Sud	Est	Côtes maritimes	Notes
Acme spectabilis Rm.	?	....	....	—		
Arion albus Müll.	—					
Auriculae species	....	....	....	....	—	
Bulimus acutus Müll.	....	....	....	....	—	
decollatus Brug.	....	....	—	—	?	
folliculus Gron.	....	....	....	—	....	Classification douteuse.
montanus Drap.	—					
5-dentatus Meg.	....	....	—	—	....	d.° assez douteuse.
seductilis Ziegl.	....	....	—	....	....	d.° douteuse.
ventrosus Fer.	....	....	....	....	—	
Clausilia alpina Stab.	....	—				
asphaltina Z.	—	....	....	?		
basileensis Fit.	—					
Bergeri Mayer.	—	....	....	....	....	Class. douteuse.
biplicata Mont.	—	....	....	?		
Braunii Charp.	—	....	....	—	....	d.°
commutata Rm.	—	....	....	—		
conspurcata Jan.	....	....	....	—	....	Indication douteuse.
cruciata Stud.	—					
densestriata Rm.	—					
fimbriata Z.	—					
fusca Betta.	....	....	....	—		
gibbula Ziegl.	....	....	—	—		
gracilis Rossm.	—					
laevissima Z.	....	....	—	....	....	Class. très-douteuse.
Moussoni Charp.	—					
olivacea Parr.	—					
Paroliniana Betta.	....	....	....	—		
pumila Ziegl.	—	....	?			
punctata Mich.	....	—	—			
roscida Stud.	—					
Rossmaessleri Pfr.	....	....	....	—		
rubiginea Z.	?	....	....	?		
rugata Ziegl.	....	....	—			
rugosa Drap.	—	....	—	....	....	Class. douteuse.
satura Rossm.	....	....	—			
Schmidtii L. Pfr.	....	....	....	—		
solida Drap.	....	....	?			
Stentzii Rossm.	?	....	....	—		
Thomasiana Chrp.	....	—				
varians Ziegl.	—					
Glandina Poireti Z.	....	....	....	—	....	Indication douteuse.
Helicophanta brevipes Drp.	—	....				
microgyra Rm.	....	....	—	....	....	Class. douteuse.
rufa Drap.	—					
Helix aberata Ziegl.	?	....	....	—		
achates Ziegl.	—	....	....	?		
albula Jan	....	....	....	—	....	Inconnue.

Mollusques	Nord	Ouest	Sud	Est	Côtes maritimes	Notes
Helix Ambrosi Strob.	?	....	. ..			
apicina Lm.	....	—	?			
austriaca Meg.	....	....	....	—		
circinata Stud.	—					
contorta Ziegl.	....	....	....	—	....	Class. douteuse.
dilucida Ziegl.	....	....	—	....	....	Class. fausse.
edentula Drap.	—					
elegans Gmel	....	....	???	....	—	d.° douteuse.
ericetorum D.	—					
etrusca auct.	....	....	—			
filicina Z.	—					
hortensis Müll.	—					
intermedia Fer.	....	....	....	—		
introducta Z.	....	—	—	???		
lapicida L.	—	—	....	???		
ligata Müll.	....	....	....	—	....	Class. fausse.
montana Stud.	—	....	???			
obvia Hartm.	—	....	....	—		
pisana Müll.	....	....	....	....	—	
Preslii F. Schm. (type).	?	....	?	—		
pyramidata D.	....	....	....	....	—	Class douteuse.
setipila Ziegl.	....	....	?			
silvatica Drp.	—	—				
strigata Müll.	....	....	—	....	....	Class fausse
sulculata Jan	....	....	....	....	—	
trochoides Poir.	....	....	....	....	—	
umbrosa Partsch.	?					
unidentata D.	—	....	....	?		
vermiculata M.	....	....	—	—		
villosa Drap.	—					
Limax alpinus Fér.	—	?				
gagates Drap.	—	....	....	—		
geographicus Renier	....	....	....	—	....	Inconnu.
laevis Müll.	—	....	.. .	—	....	Class. douteuse.
Pomatias apricus Mofs.	....	?				
patulus Drap.	....	....	....	—		
Pupa alpicola Charp.	—					
bigranata Rm. nec Schm.	—					
callosa Ziegl.	....	....	—	....	....	Class. fausse.
gibbosa Jan	....	....	....	—	....	Inconnue.
gularis Rm.	....	....	....	?		
inornata Mich.	—					
polyodon Drp.	....	....	—	—	....	Class. fausse.
quinquedentata	....	—	—	—		
secale Drap.	—	....	???	—		
variabilis Drp.	....	—	....	???		
Testacella haliotidea Drap.	....	....	?			
Vertigo Charpentieri Shut.	—					
claustralis Gredl.	—					
Genesii Gred.	—					
ShuttleworthianaCharp.	—					
striata Gredl.	—					
Strobeli Gredl.	—					
Vitrina annularis Ven.	—	?				
Zonites obscuratus Porro	....	....	?			
verticillus Fer.	....	....	....	—		

Est-ce qu'il y aura la probabilité de recueillir en Lombardie quelques-uns des mollusques qui sont compris dans le tableau précédent? Quant aux formes littorales je répondrai que non, par la simple raison qu'il n'y a point de littoral dans la Lombardie. Peut-être, on pourrait en acclimater quelques-uns sur les bords méridionaux du Benaco, car ici seulement, dans la Haute Italie, vit la *Thelpheusa fluviatilis* Latr., tandis que tous nos autres crustacés décapodes brachyures n'habitent que sur les côtes maritimes ou dans la mer, et car la flore de ce lac est exclusivement méditerranéenne et presque maritime (Cesati). A l'égard des espèces exclusives des pays méridionaux (Ferrare, Modène, Parme) je résoudrais la question de même négativement, puisque ce sont des espèces de la colline qui ne peuvent pas traverser la plaine en passant le Pô. Je repousserais de même la probabilité que quelques-uns des mollusques du Piémont occidental puissent vivre en Lombardie, parcequ'ils trouvent dans le Piémont leur limite orientale. Seulement quelques formes du nord (Suisse, Tyrol) et de l'est (Trentin, Vénitien) pourront être encore découvertes en Lombardie, savoir: *Ar. albus; Lim. gagates, laevis?* et *alpinus; Bul. montanus; Cl. biplicata* et *varians; Pupa bigranata* Rm.: *Vert. Strobeli* et *Genesii; Acme spectabilis*, et quelque autre.

Dans la Lombardie manquent les genres *Testacella*, *Helicophanta* et *Auricula*, qu'on trouve dans l'un ou dans l'autre de ses pays limitrophes, tandis que le territoire limitrophe méridional *semble* avoir défaut des genres *Arion* et *Pomatias*, communs dans la Lombardie montagneuse.

Nous allons mettre fin à ce Mémoire par les observations suivantes:

1.° Qu'il y a plusieurs agents extérieurs qui influent sur l'expression de la coquille des mollusques terrestres et sur leur organisme, et qui constituent les conditions nécessaires à la vie de leurs espèces;

2.° Que de ces agents nous n'en avons pris en considération que quelques-uns et plus particulièrement ceux qui modifient l'atmosphère (et sa température), *c. a. d.* le climat dans sa signification la plus restreinte, agent complexe et le plus important, duquel dépend en grande partie la végétation et par conséquent aussi la faune de tout pays;

3.° Que de quelques-uns des autres agents nous n'avons parlé qu'en passant, tels que les telluriques;

4.° Que cependant il ne faut pas oublier, que le même effet peut

être produit par différents agents (1), et que ce n'est donc qu'à la suite d'observations nombreuses, entreprises sur une grande échelle et confirmées par les expériences, que l'on pourra établir avec certitude la sphère d'action de chaque agent et les lois de son influence sur l'organisme.

Ce n'est donc qu'après ce travail long et difficile que les quelques déductions que l'on vient de lire, pourront acquérir de la valeur absolue ou bien être réfutées.

Explication des cartes.

Là où il était impossible d'après les connaissances actuelles de tracer la limite d'une espèce avec certitude, la ligne correspondante est interrompue.

Dans la *première* carte on aperçoit tout d'abord qu'au-dessus de Brescia se rencontrent toutes les lignes qui prouvent que le climat de ce pays est méridional, quoiqu'il soit placé beaucoup plus au nord que Milan. On ne trouve à Milan que trois espèces méridionales: *H. cinctella*, *profuga*, *cincta*, et cette dernière y a été apportée; la végétation de ce territoire est plutôt septentrionale, sa température moyenne de l'année ne touche pas aux 13° cent. Parmi les neuf espèces méridionales qui vivent en Lombardie il n'y en a que deux qui manquent aux environs

(1) Il faudrait décomposer ces agents dans leurs éléments: la chaleur, la lumière; l'oxigène, le carbone etc., qui sont les véritables influences primitives, qui peuvent se servir indifféremment de l'un ou de l'autre agent atmosphérique, tellurique ou végétal pour produire le même effet sur les animaux et réciproquement sur les agents eux-mêmes. Ainsi p. e. autant sur les terrains calcaires que dans des positions sèches et chaudes la coquille d'un mollusque peut être plus épaisse qu'ailleurs. Sur les terrains calcaires l'épaisseur du tét dépend surtout de la nature même de la roche, qui fournit au mollusque le carbonat de chaux nécessaire à la construction de sa coquille soit immédiatement, soit moyennant les végétaux dont il se nourrit - Dans les positions sèches et chaudes le même effet est dû seulement à la chaleur, augmentée soit à cause de la position géographique de la demeure du mollusque, soit à cause de la correspondante position orographique, deux agents qui diffèrent l'un de l'autre, c'est vrai, mais cependant qui produisent presque les mêmes effets et exercent une influence réciproque l'un sur l'autre. La chaleur augmentée excite davantage l'activité des fonctions vitales, et par conséquent elle cause une sécrétion plus abondante dans le mollusque. - Conformément à ce que nous venons de dire, nous avons vu que les espèces ayant le test le plus épais vivent sur les alpes *calcaires* et le plus grand nombre des espèces ayant le tét épais vivent dans la plaine *sèche* ou sur les collines *chaudes;* mais sur les alpes les coquilles sont plus petites qu'ici et plus épaisses, parceque leur sécrétion s'y est opérée en peu de temps, mais pourtant sous l'influence d'une chaleur plus haute, surtout comparativement à l'hiver; car l'été y est très-court, tandis que les journées dans cette saison y sont très-chaudes.

de Brescia, une desquelles (*Claus. papillaris*) est peut-être maritime, l'autre (*Pom. patulus*) trouve au pied du mont Baldo sa limite occidentale. La flore de Brescia est aussi méridionale, sa température moyenne atteint les 13.° cent. Bergame, dont la température moyenne est presque la même qu'à Brescia, n'abrite cependant que deux espèces méridionales: *H. cinctella* et *cincta*, ce qui fait encore moins que le Milanais, et sa végétation est septentrionale. D'après cela je conclus que ce n'est pas la température moyenne de l'année qui régle la flore et la faune d'un pays, mais bien plutôt le *maximum* et le *minimum* moyens de la température annuelle, ou peut-être le degré de différence entre eux. L'*H. lucorum* a été acclimatée à Bellagio au bord oriental du Lario, où la végétation est par exception méridionale, ce qui a été signalé sur la carte par la couleur jaune et par l'indication des arbres qui y représentent cette flore; sur les rivages de nos autres grands lacs elle est de même plus ou moins méridionale.

Dans la *seconde* carte on observe que l'*H. cingulata* atteint la plus grande intensité de coloration de son test (*H. colubrina*) dans les vallées du Sarca, du Chiese et du Mella, et peut-être elle y croît aussi aux plus grandes dimensions, supérieures même à celles de la *mut. baldensis*. Dans la vallée supérieure de l'Adige et dans les parties méridionales de la même vallée, mais à l'est du fleuve, sur les bords méridionaux du Benaco et orientaux du Sebino on ne recueille que la forme à coquille sans taches brunes. A Brescia ces taches sont lavées, et les individus très-petits (h. 8, d. 15. m.) sont communs. Tout cela indique une dégradation de l'espèce dans cette contrée. C'est ici que la région collinaire cesse, et c'est à l'ouest des Giudicarie qu'après les roches calcaires suivent les métamorphiques et les granitiques. Sur ces roches et dans la plaine l'*H. cingulata* ne s'étend pas; il dépend donc de ces circonstances géognostico-orographiques si le centre de propagation de cette espèce, lequel est reconnaissable par la perfection de la coquille que celle-ci y développe (*H. colubrina* maxima, dans la Valsarca), n'est pas circonscrit par une zone non interrompue, où vit la variété moins perfecte seule (*H. cingulata* cum mut. *baldensi* et *fascelina*).

A partir des Giudicarie la ligne qui marque la limite occidentale des *H. fruticum* et *B. detritus* se divise, mais pour se rejoindre ensuite dans les Apennins de Parme; le *Bulimus*, dans la Lombardie, n'atteint à l'ouest que Brescia et s'arrête aux collines, tandis que l'*Helix* s'avance au-delà

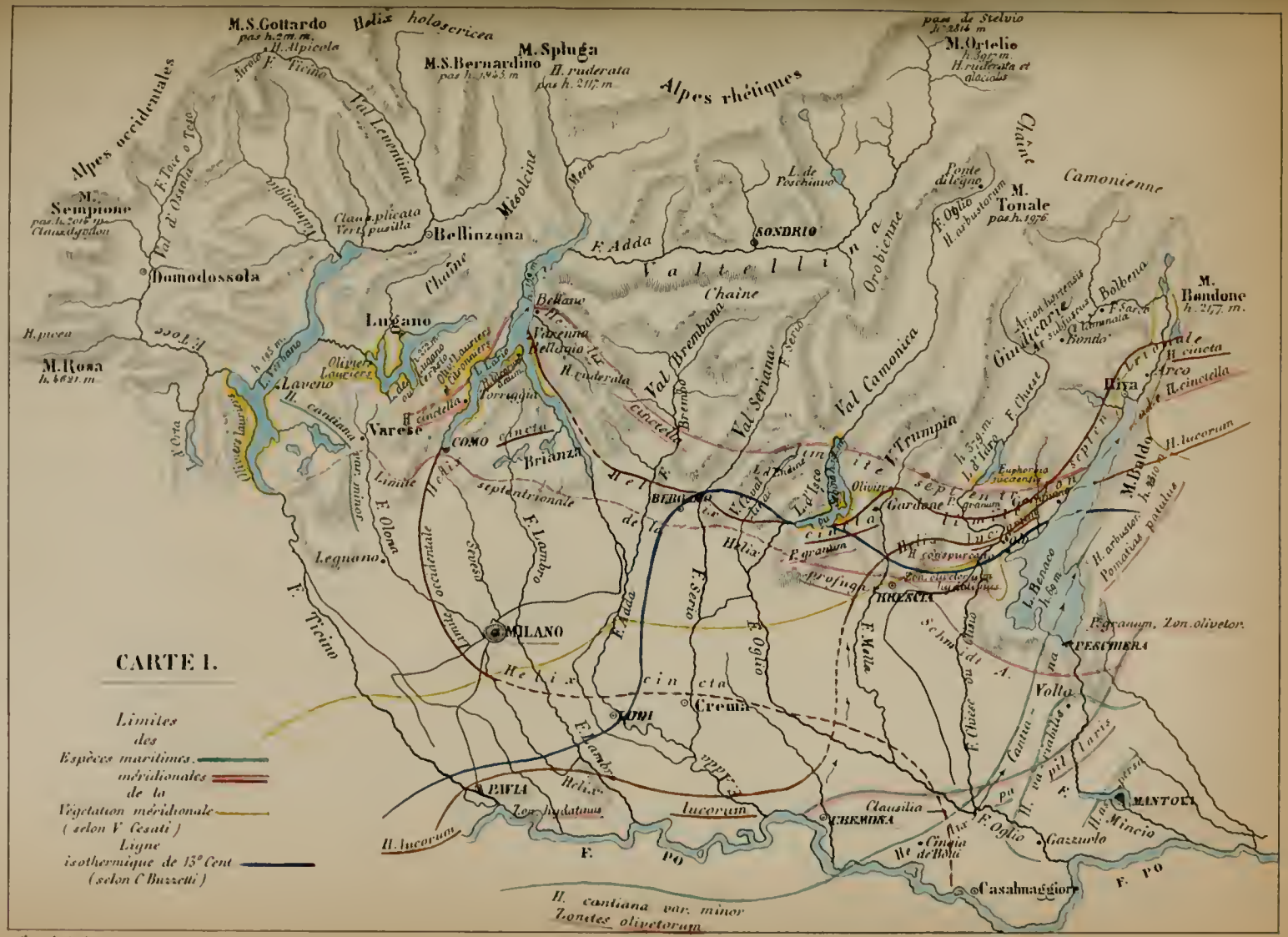
du Tessin et descend dans la plaine; mais tous les deux en quittant les hauteurs perdent leur coloration vivace, *c. a. d.* les bandes ou les rayons (*H. fruticum* unicolor, *B. detritus* unicolor).

Et c'est encore à la prov. de Brescia que l'on voit s'étendre la plupart des formes orientales; cette province doit être donc très-riche en espèces, puisque elle abrite non seulement les espèces qui sont communes à toute la Lombardie, mais aussi presque toutes celles du midi et de l'est.

Cependant le centre de la Lombardie, *c. a. d.* la Valbrembana et la Valsassina, qui est habité par toutes les formes caractéristiques de la Lombardie, à l'exception de la *Cl. verbanensis*, n'est pas moins riche. Ce n'est que dans ces vallées que l'on recueille les *H. frigida*, *Cl. Balsamo* cum *leucensi*, *exoptata*, *Whateliana* cum *brembina*, *Pupa multidentata* et *bergomensis*, *Pom. Porro*. C'est de ce foyer que les *H. tigrina*, *Cl. latestriata*, *clavata* et *Pupa tricolor* s'étendent jusque dans la prov. de Brescia et au milieu du Comasque; c'est du même foyer que les *Cl. Strobeli* et *Pupa Ferrari* se dispersent, mais dans un cercle beaucoup plus ample. Je n'ai pas marqué ces faits dans la carte pour éviter la confusion; d'ailleurs une carte spéciale aurait été superflue.

L'*H. rubiginosa*, espèce des lieux marécageux, ne s'élève pas au-dessus de la basse plaine, l'*H. Ammonis* touche les collines, il est vrai, mais son domaine c'est la région de la plaine.

Pavie, août, 1856.


M.S.Gottardo
pas h. 2 m.
H. Alpicola
Helix holosericea
M. Spluga
M.S.Bernardino
pas h. 1955 m
H. ruderata
pas h. 2117 m
pas de Stelvio
h. 2814 m
M. Ortelio
h. 3905 m.
H. ruderata et alaciola
Alpes occidentales
Alpes rhétiques
F. Ticino
Val Leventina
Val d'Ossola
F. Toce o Tosa
Val Mesolcina
Mera
L. de Poschiavo
Ponte di legno
F. Oglio
H. arbustorum
M. Tonale
pas h. 1976
Camonienne
M. Sempione
pas h. 2010 m
Domodossola
Bellinzona
F. Adda
SONDRIO
Valtellina
Orobienne
Chaine
Val Brembana
Val Seriana
Val Camonica
Val Trumpia
M. Bondone
h. 2177 m.
Arion hortensis
Bolbena
Giudicarie
Bondo
Lugano
Bellano
Lecco
Varenna
Bellagio
H. viridata
H. cincta
Riva
H. cincta
H. cincta
H. cantiana
Varese
COMO
Brianza
Limite septentrionale
Limite occidentale
Limite orientale
Limite meridionale
F. Olona
F. Lambro
F. Seveso
F. Oglio
F. Mella
F. Chiese
F. Serio
F. Brembo
F. Trompia
M. Rosa
h. 4621 m.
Laveno
Legnano
MILANO
BERGAMO
BRESCIA
Gardone
Salò
Desenzano
Sirmione
Lonato
PESCHIERA
Volta
Cremona
LODI
PAVIA
MANTOUE
Gazzuolo
Casalmaggiore
Clausilia
CREMONA
Cingia
Bocca d'Oglio
F. PO
H. Mincio
H. lucorum
H. cantiana var. minor
Zonites olivetorum
H. arbustorum
Pomatias patulus
H. cincta
Helix cincta
Helix lucorum
Helix Zon. lapidarius
Helix Zon. olivetor.
P. granum
P. granum, Zon. olivetor.
Euphorbia lucidens
Olivier
Lauriers
Oliviers
Lauriers
Limite septentrionale
Limite meridionale
Limite occidentale
Limite orientale
CARTE I.
Limites des Espèces maritimes, méridionales de la Végétation méridionale (selon V. Cesati)
Ligne isothermique de 13° Cent (selon C. Buzzetti)

Strobel del


CARTE II.
Limites des Formes orientales
Limite septentrionale du Cyclostoma
Limites occidentales de la Hel. fruticum et du Bul. detritus
H. fruticum, B. radiatus.
H umbilicaris
H. cingulata seule
Hel. fruticum et
Bul radiatus
Bellinzona
Domodossola
H. nautiliformis
Lugano
Luino
Varese
COMO
Bellano
Valsassina
Centre
Lecco
Val Brembana
SONDRIO
V. Malenco
Helix zonata
lombardica
H. adelozona
v. rhætica
BERGAMO
BRESCIA
Gorzone
Gardone
Riva
Arca
Bolbeno
Stenico
Rendena
Cl. tumida
L. Benaco
PESCHIERA
Volta
MANTOVA
H. solaria
Schmidt
MILANO
LODI
Crema
CREMONA
PAVIA
Casalmaggiore
Limite occidentale de la
fruticum
Pom. Philippianus, Claus baldensis

Strobel del.

MEMORIA

SULLE

PRESSIONI

SOPPORTATE DAI PUNTI D'APPOGGIO DI UN SISTEMA EQUILIBRATO

ED IN ISTATO PROSSIMO AL MOTO

DELL'INGEGNERE IDRAULICO

ALESSANDRO DORNA

PROFESSORE DI MATEMATICA DI PRIMA CLASSE INCARICATO DELL'INSEGNAMENTO DELLA MECCANICA
NELLA R. ACCADEMIA MILITARE DI TORINO

Approvata nell'adunanza del 1.° febbraio 1857.

Nella parte del mio corso di meccanica, che è stata autografata all'Arsenale per gli Allievi della R. Accademia Militare, e nella quale ho trattato a lungo dell'equilibrio, tanto sotto il punto di vista dell'analisi, allorchè si rappresentano i vincoli assoggettando le coordinate dei punti di applicazione a soddisfare determinate equazioni ed ineguaglianze, quanto sotto il punto di vista della fisica, allorchè si fanno consistere tali vincoli nelle così dette forze interiori (attrazioni e repulsioni), che si esercitano vicendevolmente fra quei punti, dimostrai: che la condizione d'equilibrio di un sistema consiste sempre nell'essere uguale a zero, o minore di zero, la somma algebrica dei momenti virtuali delle forze tutte, che lo sollecitano, relativamente a ciascuno dei movimenti infinitamente piccoli, che esso può ricevere coerentemente alla sua costituzione. E feci vedere che, nel caso particolare in cui l'equilibrio corrisponde ad uno stato prossimo al moto, la somma algebrica dei momenti virtuali è uguale a zero; e viceversa, che quando questa somma è nulla, il sistema equilibrato è in uno stato prossimo al moto: notando che, per lo più, è sotto un tale aspetto, che viene

applicato il principio dei momenti virtuali, quando si considera l'equilibrio delle macchine; in quanto che, non essendo queste generalmente suscettibili che di due moti direttamente contrarii, basta calcolare le forze, che ne determinano l'equilibrio nei due stati prossimi al moto, essendo le medesime i limiti fra cui son contenute quelle da applicarsi, affinchè abbia luogo l'equilibrio in generale.

Fra le forze da determinarsi, essendomi anche occupato delle pressioni, che sono sopportate dai punti d'appoggio, pervenni alle formole generali, che ne somministrano i valori; e, posteriormente, un'attenta disamina di queste formole mi lasciò scorgere alcuni semplici teoremi sulla distribuzione delle pressioni, i quali sono affatto nuovi, che io sappia, nella scienza dell'equilibrio. Per la generalità e semplicità loro, le mie formole ed i miei teoremi parendomi degni di essere sottoposti a questa Reale Accademia, ed a ciò essendo eccitato dal benevolo avviso dell'illustre Colonnello del Genio Federico Menabrea, Professore di costruzioni nella R. Università, quest'oggi presento le une e gli altri insieme ad una mia teoria, colla quale si perviene a ricavare, con facilità, i valori delle pressioni dall'equazione dei momenti virtuali, mediante lo stesso procedimento che s'impiega per derivare da questa le altre condizioni d'equilibrio.

L'ordine, che io tengo, è il seguente:

I. — Citati alcuni esempi atti a dimostrare che, supponendo i punti d'appoggio affatto immobili, le pressioni sarebbero indeterminate, e detto come ciò si possa dimostrare col calcolo, noto quale sia l'avvertenza da usarsi affinchè le pressioni riescano determinate; e suppongo 1.° che ogni punto d'appoggio possa muoversi in tutti i sensi, come se fosse attaccato ad un punto fisso, al medesimo contiguo, mediante una spranghetta elastica infinitamente breve (1); 2.° che producendo (quando si sarà stabilito l'equilibrio fra le forze esteriori ed interiori del sistema) uno qualunque degli spostamenti, che il principio dei momenti virtuali suppone, abbiano i punti d'appoggio, nella loro qualità di fissi, a muoversi infinitamente meno di tutti gli altri punti del sistema. Con tali ipotesi pervengo a scomporre l'equazione dei momenti virtuali in due altre, una delle quali è

(1) Questa teoria, che io estraggo dal mio corso di meccanica, essendo stata da me scritta per l'insegnamento, trovai convenientissimo, per la maggior intelligenza de' miei allievi, di ideare simili spranghette elastiche per rappresentare le risultanti delle attrazioni e repulsioni, che danno origine nei sistemi alle così dette resistenze dei punti fissi.

indipendente dalle pressioni e l'altra non contiene che queste; e, fatto vedere che la prima può, in ogni caso, essere surrogata dalle note sei equazioni d'equilibrio dei sistemi rigidi e liberi, dimostro che la seconda, combinata con queste, somministra le pressioni cercate.

Tale fu la prima idea, che mi condusse alla determinazione delle pressioni, e mi vi attengo in questo scritto. Per altro essendosi fatte delle obbiezioni a tale riguardo, ho anche immaginato un'altra dimostrazione, che spero vorrà essere a tutti accetta, e la do in una Nota alla fine della presente Memoria (1).

Gli sviluppi, che in seguito faccio, sono i seguenti:

II. — Considero un grave, il quale sia trattenuto in varii punti disposti sopra una stessa retta orizzontale, e di questi calcolo le pressioni.

III. — Immagino un corpo pesante in equilibrio su di uno spigolo orizzontale, e determino la pressione, riferita all'unità di lunghezza, che il medesimo sopporta in un punto qualunque.

IV. — Calcolo la pressione, riferita all'unità di area, che un peso esercita nei singoli punti di una base orizzontale, che lo sostiene.

V. — Trovo le formole generali, che danno le pressioni sopportate dai punti d'appoggio di un sistema di forze qualunque.

VI. — Applico le formole generali delle pressioni al caso particolare, in cui il luogo geometrico dei punti di sostegno è una superficie piana, omogenea, ed il sistema è sollecitato da una forza operante in un piano, che passa per il centro di gravità della medesima, perpendicolarmente ad uno de'suoi assi principali.

Risolvo colle stesse formole le due questioni di cui infra, per illustrare con qualche esempio la definizione, che da me venne introdotta, della *pressione riferita all'unità di volume:*

VII. — Un corpo omogeneo immobile, che ha la figura di un cilindro retto a base circolare, è sollecitato da una forza operante secondo una retta, che ne incontra l'asse a perpendicolo. Determinare la pressione riferita all'unità di volume, che il medesimo sopporta a motivo di quella forza, in ciascuno de'suoi punti.

---

(1) È indubitato che qualunque concetto, il quale sia giusto e conduca a buoni risultati, è bene si faccia conoscere; quando anche, dopo essersi questi trovati, si inventino altri ragionamenti che ai medesimi più siano conformi. Non è che restando fedele a tale massima che si può avere una buona storia dei progressi di una scienza.

VIII. — Un corpo, che ha la figura di un cilindro retto a base circolare, è sollecitato da una forza, parallelamente alle sue generatrici. Determinare la pressione, riferita all'unità di volume, che il medesimo sopporta in uno qualunque dei suoi punti, a motivo di quella forza.

IX. — Chiamando *pressione ridotta* la pressione moltiplicata per la somma dei coefficienti di elasticità dei singoli punti d'appoggio, e divisa per il coefficiente di elasticità relativo al punto in cui si esercita quella pressione medesima, dimostro mediante le formole generali delle pressioni le seguenti proprietà:

1.ª I punti di sostegno, per cui la pressione ridotta è la stessa, sia in intensità che in direzione, sono situati sopra una linea retta, o *linea di livello*; e tutte le linee di livello sono parallele.

2.ª Le linee di livello, che corrispondono a pressioni ridotte di medesima intensità, sono poste su di una superficie cilindrica circolare, che io chiamo *superficie di livello*; e tutte le superficie di livello hanno uno stesso asse, il quale viene da me chiamato *asse di livello*.

3.ª La componente, secondo l'asse di livello, delle pressioni ridotte, che sono sopportate dai varii punti di sostegno, è costante ed uguale alla componente, secondo la stessa direzione, della risultante delle forze sollecitanti il sistema, supposte applicate in un medesimo punto.

4.ª La pressione ridotta *minima* è uguale alla componente anzidetta della risultante delle forze; essa è sopportata dai punti di sostegno che si trovano sull'asse di livello; ed è diretta secondo quest'asse. Di maniera che non sussiste verun *asse neutro* se non se nei due casi particolari, in cui quella risultante è zero, o normale all'asse di livello.

5.ª La direzione della pressione, che è sopportata da un punto qualunque posto fuori dell'asse di livello, è tangente alla superficie di livello, che passa per quel punto.

6.ª La componente, normale all'asse di livello, della pressione ridotta, che è sopportata dai varii punti di sostegno, che sono posti su di una stessa superficie di livello, è costante, ed è proporzionale al raggio della sezione retta di questa superficie.

Noto infine la coincidenza, che esiste fra l'asse di livello, da me trovato, e l'asse scorrevole di rotazione istantaneo, che il celebre Poinsot ha dimostrato sussistere nei sistemi in movimento; non che la perfetta analogia, che passa fra i miei teoremi, risguardanti le pressioni, e quelli relativi alle coppie risultanti, dovuti allo stesso Autore.

X. — Accenno all'avvertenza da usarsi quando il sistema, appoggiandosi semplicemente contro il luogo geometrico di sostegno, si può dal medesimo distaccare; e do la formola che risolve il caso in cui questo luogo geometrico è una porzione qualunque di superficie sferica.

I.

CONSIDERAZIONI SULLA DETERMINAZIONE DELLE PRESSIONI, E PROCEDIMENTO GENERALE PER TROVARLE.

Quando i punti d'appoggio di un sistema sono considerati come immobili, si trova che le pressioni, che i medesimi sopportano, sono generalmente indeterminate. Per esempio le pressioni, che i cardini di una porta sostengono secondo la retta che li unisce, non possono essere date dal calcolo, perchè basta un cardine solo a sostenere tutto lo sforzo che si esercita secondo quella retta, ed è indifferente quale. Medesimamente, quando si hanno tre punti fissi in linea retta, ed è esercitato uno sforzo a questa perpendicolare, riescono indeterminate le tre pressioni, perchè si può, in una infinità di modi, immaginare scomposta la forza in tre altre parallele alla medesima e dirette contro quei punti. La stessa cosa ha luogo ogni qualvolta si hanno quattro o più sostegni, sebbene non in linea retta. Tuttociò si vede col semplice ragionamento. Per dedurre le stesse conseguenze col calcolo, bisogna sostituire ai punti fissi delle forze uguali e contrarie alle pressioni, che i medesimi sopportano; e, reso così libero il sistema, applicarvi le sei equazioni d'equilibrio dei sistemi rigidi e liberi:

$$[1]\ldots\quad\begin{cases} P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0\ ; \\ P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0\ ; \\ P\cos.\gamma + P'\cos.\gamma' + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0\ ; \\ P(y\cos.\gamma - z\cos.\beta) + P'(y'\cos.\gamma' - z'\cos.\beta') + \ldots\ldots = 0\ ; \\ P(z\cos.\alpha - x\cos.\gamma) + P'(z'\cos.\alpha' - x'\cos.\gamma') + \ldots\ldots = 0\ ; \\ P(x\cos.\beta - y\cos.\alpha) + P'(x'\cos.\beta' - y'\cos.\alpha') + \ldots\ldots = 0\ ; \end{cases}$$

e cercare di ricavar da queste le pressioni.

Volendo che le pressioni dei punti d'appoggio siano determinate, è necessario supporre, giusta quanto si osserva in natura, che i medesimi, invece di essere affatto immobili, cedano agli sforzi che devono sopportare. Io non mi scosterò dal vero, nei risultati, supponendo che ogni punto di appoggio possa muoversi in tutti i sensi come se fosse attaccato ad un punto fisso, al medesimo contiguo, mediante una spranghetta elastica infinitamente breve. In tale ipotesi, chiamando

λ, la lunghezza di una di queste spranghette;
ω, la sua sezione;
Q, la pressione del punto, che essa sostiene (uguale alla tensione della medesima);
E, il suo coefficiente d'elasticità (il quale sarà pure quello della materia componente il sistema nei dintorni del punto);
$\Delta\lambda$, la variazione di λ, che è dovuta alla forza Q nella posizione d'equilibrio del sistema,

si avrà la relazione

$$(a) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad Q = \frac{E\omega}{\lambda}\Delta\lambda \ ;$$

e rappresentando con le stesse lettere accentuate le quantità analoghe, relative alle spranghette che sostengono gli altri punti d'appoggio, si avranno (potendosi queste concepire tutte di eguale lunghezza e sezione) anche le relazioni seguenti:

$$(a) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \begin{cases} Q' = \dfrac{E'\omega}{\lambda}\Delta'\lambda \ ; \\ Q'' = \dfrac{E''\omega}{\lambda}\Delta''\lambda \ ; \\ \text{ecc.} \ ; \end{cases}$$

essendo $\Delta'\lambda$, $\Delta''\lambda$, ecc. le variazioni di λ dovute alle forze Q', Q'', ecc.

Tali saranno le equazioni esistenti fra le pressioni dei sostegni e le loro depressioni, allorchè si sarà stabilito l'equilibrio fra le forze interiori ed esteriori del sistema: equilibrio che io suppongo noto di posizione.

Giacchè i punti d'appoggio sono suscettibili di muoversi, bisognerà, scrivendo l'equazione dei momenti virtuali, relativi ad uno spostamento infinitamente piccolo del sistema dalla sua posizione d'equilibrio, tenere anche conto dei momenti virtuali delle pressioni Q, Q', ecc. Pertanto

rappresentando con

$$S(P\Delta p)\ ; \qquad S(L\Delta l)$$

le somme dei momenti virtuali delle forze esteriori ed interiori, e lasciando in evidenza quelli delle pressioni Q, Q'..... si avrà l'equazione

$$[2]\ldots\ldots S(P\Delta p)+S(L\Delta l)+Q\Delta q+Q'\Delta q'+\ldots\ldots=0\ .$$

Ma si deve notare, a tal riguardo, che volendo ancora considerare i sostegni come fissi, rispetto agli altri punti del sistema, è necessario supporre che i medesimi si muovano infinitamente meno di questi, e che, per conseguenza, i momenti virtuali delle pressioni Q, Q', ecc. siano infinitamente piccoli rispetto a quelli delle altre forze applicate a punti mobili. Ciò fa sì che l'equazione [2] si scompone nelle seguenti:

$$[3]\ldots\ldots\ldots\qquad S(P\Delta p)+S(L\Delta l)=0\ ;$$

$$[4]\ldots\ldots\ldots\qquad Q\Delta q+Q'\Delta q'+\ldots=0\ ,$$

la prima delle quali è indipendente dalle pressioni, e la seconda non contiene che queste.

Osservo ora, che gli spazietti Δq, $\Delta q'$, ecc., descritti dai punti di sostegno durante gli spostamenti che il principio dei momenti virtuali suppone, sono le variazioni di quelli descritti dai medesimi punti mentre si stabilisce l'equilibrio, i quali rappresentai con $\Delta\lambda$, $\Delta'\lambda$, ecc.; si ha dunque

$$\Delta q=\Delta.\Delta\lambda\ ; \qquad \Delta q'=\Delta.\Delta'\lambda\ ; \qquad \text{ecc.}\ ,$$

e quindi (*a*)

$$(b)\ \ldots\ldots\ \Delta q=\frac{\lambda}{E\omega}\Delta Q\ ; \qquad \Delta q'=\frac{\lambda}{E'\omega}\Delta Q'\ ; \qquad \text{ecc.}\ ,$$

e l'equazione [4] prenderà la forma

$$[5]\ldots\ldots\qquad \frac{Q}{E}\Delta Q+\frac{Q'}{E'}\Delta Q'+\ldots\ldots=0\ .$$

Occorrendo, io la scriverò abbreviatamente come segue:

$$[6]\ldots\ldots\qquad S\left(\frac{Q}{E}\Delta Q\right)=0\ ,$$

e chiamerolla *equazione determinatrice delle pressioni.*

L'equazione [4], sussistendo contemporaneamente all'equazione [3], che determina l'equilibrio del sistema nell'ipotesi dei punti fissi, dovrà essere soddisfatta da tutti i valori, che si potranno dare agli spazietti Δq, $\Delta q'$, ecc. senza alterare quest'equilibrio. Pertanto, avuto riguardo alle (*b*), l'equazione [5] sussisterà per tutti i valori, che attribuire si potranno alle variazioni ΔQ, $\Delta Q'$, ecc. subordinatamente alle equazioni d'equilibrio del sistema, delle quali faranno certamente parte le pressioni Q, Q', ecc., sempre che si riduca il medesimo ad essere libero. Siano queste equazioni

$$[7] \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \varphi(Q, Q', \ldots\ldots) = 0 \ ; \\ \psi(Q, Q', \ldots\ldots) = 0 \ ; \\ \text{ecc.} \ ; \end{cases}$$

differenziandole rispetto a Q, Q', ecc. si avrà

$$\frac{d\varphi}{dQ}\Delta Q + \frac{d\varphi}{dQ'}\Delta Q' + \ldots\ldots = 0 \ ;$$

$$\frac{d\psi}{dQ}\Delta Q + \frac{d\psi}{dQ'}\Delta Q' + \ldots\ldots = 0 \ ;$$

$$\text{ecc.} \ ;$$

ed eliminando, mediante queste equazioni differenziali, dalla [5] tante delle variazioni ΔQ, $\Delta Q'$, ecc. quante si potranno, i coefficienti delle altre dovranno essere tutti eguali a zero. Scrivendo adunque le equazioni che in tal modo risulteranno, ed unendole alle [7], il loro numero sarà uguale a quello delle pressioni Q, Q', ecc. e ne somministreranno i valori.

Intanto si noti, che le pressioni sopportate dai punti d'appoggio di un sistema equilibrato qualunque non cambiano, supponendo che il medesimo diventi rigido; e quindi che le equazioni [7] rappresentano in ogni caso le [1] dei sistemi rigidi e liberi (*). Volendo determinare le pressioni, che i punti di sostegno sopportano, si comincierà adunque a rendere libero il sistema sostituendo ai sostegni le forze uguali e contrarie

(*) Per dedurre queste equazioni dall'equazione dei momenti virtuali è necessario, che si supponga prima libero il sistema, annoverando fra le forze sollecitanti delle forze uguali e contrarie alle pressioni, e che si proceda quindi come fa Poisson nella sua Meccanica (n.° 340), attribuendo al sistema i moti virtuali, che può ancora avere nella ipotesi che sia invariabile.

alle pressioni o, meglio, le loro componenti;

$$(c) \ldots\ldots \qquad -p\,,\quad -q\,,\quad -r\,;\quad -p'\,,\quad \text{ecc.}$$

secondo tre assi ortogonali. Quindi si scriveranno le equazioni [1] come se il sistema fosse rigido, comprendendo fra le forze sollecitanti anche le (c); si differenzieranno in seguito tali equazioni rispetto a queste ultime, e mediante le differenziali ottenute si elimineranno dall'equazione determinatrice delle pressioni:

$$[8] \ldots\ldots \quad \frac{p}{E}\Delta p + \frac{q}{E}\Delta q + \frac{r}{E}\Delta r + \frac{p'}{E'}\Delta p' + \ldots\ldots = 0\,,$$

tante delle variazioni Δp, Δq, ecc. quante sono quelle equazioni nel caso che si ha da trattare. I coefficienti delle variazioni che rimarranno, uguagliati a zero, somministreranno le equazioni da unirsi alle [1] per determinare i valori delle incognite p, q, r, p', ecc.

Il metodo più acconcio per l'eliminazione è quello noto dei fattori indeterminati. Io procederò quindi in ogni caso come segue: moltiplicata che avrò ciascuna equazione d'equilibrio per una quantità indeterminata, addizionerò queste equazioni membro a membro con la [5] o la [8], secondo che avrò di mira le pressioni o le loro componenti; ed uguagliati a zero i coefficienti delle singole variazioni, che essa contiene, eliminerò dalle equazioni risultanti le indeterminate che avrò introdotte.

Passo ora a svolgere la teoria che ho esposto: io tratterò principalmente i casi in cui, i punti d'appoggio essendo in numero infinito, la somma [6] si scambia in un integrale. In tale ipotesi non sarà più questione di calcolare la pressione assoluta, che i varii punti di sostegno sopportano, ma sibbene la pressione relativa, cioè la pressione riferita all'unità di lunghezza, o di area, o di volume, secondo che il luogo geometrico di sostegno sarà una linea, o una superficie, od un solido (*).

(*) Riguardo alla definizione della *pressione riferita all'unità di volume*, che io sono stato indotto a stabilire dalla generalità dei risultati ottenuti, osservo, che: siccome per *pressione riferita all'unità di lunghezza, o di area*, di un punto dato, si intende la risultante degli sforzi, uguali a quelli del punto, supposti esercitati nella stessa direzione contro i singoli punti, che costituiscono la linea, o la superficie, rappresentata da quell'unità; così per *pressione, riferita all'unità di volume, di un dato punto*, io intendo la risultante degli sforzi esercitati contro i singoli punti componenti il solido, che con quell'unità è designato supposti tutti sollecitati nella stessa guisa

II.

PROBLEMA.

Un grave essendo trattenuto, nella sua posizione d'equilibrio, in n punti collocati sopra una stessa retta orizzontale, determinare le pressioni, che sono sopportate dai medesimi.

Prendendo per asse la retta dei punti di sostegno, e chiamando

p, il peso del grave;
β, l'ascissa del suo punto di applicazione;
$\alpha, \alpha' \ldots x$, le ascisse degli n punti di sostegno e di uno qualunque di essi;
$E, E', \ldots$ i loro rispettivi coefficienti di elasticità;
$Q, Q', \ldots$ le pressioni che si cercano;

le equazioni d'equilibrio saranno

$$[9] \ldots\ldots \begin{cases} -P+Q+Q'+\ldots\ldots=0 ; \\ -\beta P+\alpha Q+\alpha' Q'+\ldots\ldots=0 ; \end{cases}$$

e le loro differenziali:

$$[10] \ldots\ldots \begin{cases} \Delta Q+\Delta Q'+\ldots\ldots\ldots=0 ; \\ \alpha\Delta Q+\alpha'\Delta Q'+\ldots\ldots\ldots=0 ; \end{cases}$$

Moltiplicando queste equazioni per le indeterminate H, K, e addizionandole con l'equazione determinatrice delle pressioni:

$$\frac{Q}{E}\Delta Q+\frac{Q'}{E'}\Delta Q'+\ldots\ldots\ldots=0 ,$$

---

del punto che si considera. Dimostrerò più oltre (§ V), che, allorquando il luogo geometrico di sostegno è omogeneo, e che le forze sollecitanti sono riducibili in una risultante diretta attraverso al centro di gravità del medesimo, i varii punti di sostegno sono premuti ciascuno nella direzione di questa, e con intensità uguale al suo valore diviso per il numero rappresentante l'estensione di quel luogo geometrico. Pertanto quando si assumerà per quest'ultimo lo stesso volume di un corpo, immobile sotto l'azione del proprio peso, saravvi identità fra la pressione riferita all'unità di volume quale da me viene intesa ed il peso dell'unità di volume del corpo. Quest'esempio mi pare anche sufficiente a spiegare sotto quale punto di vista della Fisica io consideri la ripartizione della pressione, riferita all'unità di volume, in un sistema materiale immobile sotto l'azione di forze date (§§ VII e VIII).

si trova la seguente somma:

$$[11] \ldots\ldots \qquad S\left(H+Kx+\frac{Q^{(i)}}{E^{(i)}}\right)\Delta Q^{(i)}=0 \ ,$$

nella quale si dovranno attribuire alla lettera x indistintamente tutti i valori α, α'..... delle ascisse dei punti di sostegno, e sostituire ad (i) gli accenti che si devono dare ad α.

Ciò posto, egli è evidente che uguagliando a zero, nell'equazione (11), i coefficienti di ΔQ, $\Delta Q'$, ecc., ed eliminando H e K, le $n-2$ equazioni risultanti saranno quelle, che si otterrebbero eliminando, mediante le [10], due delle n variazioni ΔQ, $\Delta Q'$, ecc. dell'equazione [11], ed eguagliando in seguito a zero i coefficienti delle altre. Io pongo adunque l'equazione

$$[12] \ldots\ldots \qquad H+Kx+\frac{Q^{(i)}}{E^{(i)}}=0 \ ,$$

la quale mi somministrerà i seguenti valori delle pressioni:

$$Q=-E\,(H+K\alpha) \ ;$$

$$Q'=-E'(H+K\alpha') \ ;$$

ecc.

Sostituendo quindi queste espressioni nelle equazioni [9], avrò le due seguenti, che mi daranno H e K:

$$H(E+E'+\ldots\ldots)+K(E\alpha+E'\alpha'+\ldots\ldots)+P=0 \ ;$$

$$H(E\alpha+E'\alpha'+\ldots\ldots)+K(E\alpha^2+E'\alpha'^2+\ldots\ldots)+P\beta=0 \ ;$$

La maniera più semplice e più elegante di determinare H e K consiste nel supporre, che nei singoli punti di sostegno siano collocate delle masse rispettivamente uguali ai coefficienti di elasticità E, E', ecc., e di prendere per origine delle coordinate il loro centro di gravità; poichè così operando si avrà

$$E\alpha+E'\alpha'+\ldots\ldots=0 \ .$$

Ponendo inoltre per brevità

$$E+E'+\ldots\ldots=\Sigma \ ;$$

$$E\alpha^2+E'\alpha'^2+\ldots\ldots=a^2\Sigma \ ;$$

si trova

$$H = -\frac{P}{\Sigma}\,; \qquad K = -\frac{P\beta}{a^2\Sigma}\,,$$

e le pressioni saranno espresse come segue:

$$[13]\ \ldots\ldots\ \begin{cases} Q = \dfrac{E}{\Sigma}\left(1 + \dfrac{\alpha\beta}{a^2}\right).P\,; \\ Q' = \dfrac{E'}{\Sigma}\left(1 + \dfrac{\alpha'\beta}{a^2}\right).P\,; \\ \text{ecc.} \end{cases}$$

Quando i punti di sostegno sono omogenei si ha

$$\Sigma = n\,E\,,$$

e le pressioni diventano

$$Q = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{\alpha\beta}{a^2}\right).P\,;$$

$$Q' = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{\alpha'\beta}{a^2}\right).P\,;$$

ecc. ,

essendo

$$a^2 = \frac{\alpha^2 + \alpha'^2 + \ldots\ldots}{n}\,.$$

Pertanto in tale caso le pressioni sono indipendenti dal coefficiente di elasticità.

Se, inoltre, la direzione del peso passerà per il centro di gravità dei punti di sostegno, l'ascissa β sarà uguale a zero, e quindi si avrà

$$Q = Q' = \ldots\ldots = \frac{1}{n}.P\,;$$

la pressione si ripartirà adunque uniformemente.

Avuto riguardo ai valori $\{(a),\ \text{I.}\}$ l'equazione [12] dimostra che prima del cedimento la linea di sostegno era anche rettilinea.

III.

PROBLEMA.

Un grave si appoggia, nella sua posizione d'equilibrio, sopra uno spigolo rettilineo ed orizzontale. Determinare la pressione, riferita all'unità di lunghezza, che è sopportata da un punto qualunque del medesimo.

Prendendo per asse lo spigolo di sostegno, e chiamando

x, l'ascissa di un suo punto qualunque;
Q, la pressione riferita all'unità di lunghezza, che il medesimo sopporta;

l'elemento lineare

$$\omega = dx \ ,$$

sopporterà la pressione

$$Q\omega \ .$$

Pertanto, chiamando inoltre

l, la lunghezza dello spigolo di sostegno;
P, il peso del grave;
β, l'ascissa del suo punto di applicazione;
l', l'', le parti in cui l'origine delle coordinate divide la lunghezza l dello spigolo;

le equazioni d'equilibrio saranno

$$[14] \ldots\ldots \quad \begin{cases} -P + \int_{l''}^{l'} Q\,\omega = 0 \ ; \\ -P\beta + \int_{l''}^{l'} Qx\omega = 0 \ ; \end{cases}$$

e l'equazione determinatrice delle pressioni ⎧[6], I.⎫ sarà

$$[15] \ldots\ldots \quad \int_{l''}^{l'} \Delta Q . \frac{Q}{E}\omega = 0 \ .$$

Ciò posto, differenziando le equazioni [14] rispetto a Q, moltiplicandole per due indeterminate H, K, e addizionandole con la [15], si avrà

$$\int_{l''}^{l'} \Delta Q . \left(H + Kx + \frac{Q}{E} \right) \omega = 0 \ ;$$

ed eguagliando a zero il coefficiente di ΔQ in questa equazione, ne risulterà [conformemente alla [12]] la seguente

$$H + Kx + \frac{Q}{E} = 0 \ ;$$

e quindi la pressione

$$Q = -E(H + Kx) \ .$$

Le costanti H, K si determineranno sostituendo questo valore di Q nelle equazioni [14] ed integrandole.

Simboleggiando le integrazioni si trova:

$$P + H \int_{l''}^{l'} E \ \omega + K \int_{l''}^{l'} Ex \ \omega = 0 \ ;$$

$$P\beta + H \int_{l''}^{l'} Ex\omega + K \int_{l''}^{l'} Ex^2\omega = 0 \ ;$$

e supponendo distribuita della materia lungo lo spigolo di sostegno in modo che la massa riferita all'unità di lunghezza sia eguale in ogni punto al rispettivo coefficiente di elasticità, e posta l'origine delle coordinate nel centro di gravità della stessa materia, si avrà

$$\int_{l''}^{l'} Ex\omega = 0 \ ;$$

cosicchè rappresentando con

$$\overline{\Sigma} = \int_{l''}^{l'} E \omega$$

la massa totale, e chiamando

a, il raggio di girazione della medesima, rispetto alla perpendicolare allo spigolo, condotta pel suo centro di gravità, il quale raggio è dato dall'equazione

$$a^2 \overline{\Sigma} = \int_{l''}^{l'} Ex^2\omega \ ,$$

le costanti H e K saranno così espresse:

$$H=-\frac{P}{\Sigma}\ ; \qquad K=-\frac{P\beta}{a^2\Sigma}\ ,$$

e la formola della pressione sarà [conformemente alle [13]] della forma

$$[16]\ \ldots\ldots\ldots \qquad Q=\frac{E}{\Sigma}\left(1+\frac{\beta x}{a^2}\right)\cdot P\ .$$

Nell'ipotesi che il coefficiente di elasticità sia costante in tutto lo spigolo di sostegno si ha

$$\Sigma=El\ ; \qquad a^2=\frac{1}{12}l^2\ ,$$

e la formola [15] si riduce come segue

$$Q=\left(1+\frac{12\beta x}{l^2}\right)\cdot\frac{P}{l}\ .$$

Quando si mette l'origine delle coordinate in una delle estremità dello spigolo, questa formola diventa più complicata, infatti ridotta alla sua massima semplicità essa è della forma

$$[17]\ \ldots\ldots\ldots \qquad Q=2\left(\frac{2l-3\beta}{l}-3\frac{l-2\beta}{l}\cdot\frac{x}{l}\right)\cdot\frac{P}{l}\ .$$

Il Cav. Mossotti, nella Meccanica razionale che ha in corso di stampa, tratta esso pure questo problema nell'ipotesi dell'omogeneità, e dà una formola, che si riduce alla [17].

Nel caso particolare, in cui lo spigolo di sostegno è omogeneo, la pressione è indipendente dal coefficiente di elasticità E; e, se la direzione del peso P passerà inoltre per il punto di mezzo dello spigolo, si avrà

$$Q=\frac{P}{l}\ ;$$

cioè, la pressione si ripartirà uniformemente.

In ogni caso, sostituendo nell'equazione [16] il valore di Q, che si ricava dalla $\{(a),\ \text{I.}\}$, si viene a riconoscere che lo spigolo di sostegno era anche rettilineo prima del suo cedimento.

Chiamando

β', β'', due ascisse del punto di applicazione del peso P, da segnarsi

sulle parti dello spigolo che ho rappresentato da principio con l', l'', e ponendo

$$\beta' = \frac{a^2}{l''} \; ; \qquad \beta'' = \frac{a^2}{l'} \; ,$$

risulta dalla formola [16] che quando la direzione del peso P incontrerà lo spigolo fra i due punti, che hanno per ascisse β' e β'', la pressione sarà dappertutto positiva.

Nel caso dell'omogeneità si ha

$$l' = l'' = \frac{1}{2} l \; ; \qquad a^2 = \frac{1}{12} l^2 \; ,$$

e quindi

$$\beta' = \beta'' = \frac{1}{6} l \; ,$$

è adunque necessario, affinchè la pressione sia positiva, che, dividendo lo spigolo in tre parti eguali, la direzione del peso incontri quella di mezzo.

IV.

PROBLEMA.

Determinare la pressione, riferita all'unità di superficie, che un grave esercita su di una base orizzontale, che lo sostiene.

Riferendo la base a due assi ortogonali scelti nel suo piano, e chiamando

x, y, le coordinate di un suo punto qualunque, e

Q, la pressione, riferita all'unità di superficie di questo punto; l'elemento superficiale

$$\omega = dx\,dy$$

sopporterà la pressione

$$Q\omega \; .$$

Pertanto, chiamando

P, il peso del grave, ed

α, β, le coordinate del punto d'incontro della sua direzione con la base di sostegno, le equazioni d'equilibrio saranno le seguenti:

$$[18] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} -P + \iint Q \; \omega = 0 \; ; \\ -P\alpha + \iint Q x \omega = 0 \; ; \\ -P\beta + \iint Q y \omega = 0 \; ; \end{cases}$$

e l'equazione determinatrice delle pressioni sarà \{[6], I.\}:

$$[19] \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \iint \Delta Q \cdot \frac{Q}{E}\omega = 0 \ ,$$

essendo E il coefficiente di elasticità della base di sostegno, e dovendosi, tanto nelle equazioni [18] che nella [19], estendere le integrazioni a limiti che comprendano l'intera superficie della base.

Differenziando le equazioni [18] rispetto a Q, moltiplicandole in seguito per le indeterminate G, H, K, e addizionandole con la [19] si trova l'equazione

$$\iint \Delta Q \cdot \left(G + Hx + Ky + \frac{Q}{E}\right)\omega = 0 \ ,$$

la quale deve sussistere qualunque sia la variazione ΔQ.

Uguagliando adunque a zero il coefficiente di questa si avrà

$$G + Hx + Ky + \frac{Q}{E} = 0 \ ,$$

e quindi la pressione

$$[20] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad Q = -E(G + Hx + Ky) \ .$$

Le costanti G, H, K si determineranno sostituendo il valore di Q testè ricavato nelle equazioni [18], ed effettuando le integrazioni fra limiti che le medesime contengono. La maniera più semplice e più elegante di procedere è la seguente:

Fatta l'indicata sostituzione si scrivano le equazioni [18] come infra:

$$[21] \ldots \begin{cases} P + G\iint E\ \omega + H\iint Ex\ \omega + K\iint Ey\ \omega = 0 \ ; \\ P\alpha + G\iint Ex\omega + H\iint Ex^2\omega + K\iint Exy\omega = 0 \ ; \\ P\beta + G\iint Ey\omega + H\iint Exy\omega + K\iint Ey^2\ \omega = 0 \ . \end{cases}$$

Si immagini, quindi, in ogni punto della base di sostegno, distribuita della materia in modo che la massa, riferita all'unità di area, sia dappertutto eguale al coefficiente di elasticità; e si faccia coincidere l'origine delle coordinate col centro di gravità della massa totale, prendendo inoltre per asse delle coordinate gli assi principali della medesima, si avrà in tal modo

$$\iint Ex\ \omega = 0\ ;$$

$$\iint Ey\ \omega = 0\ ;$$

$$\iint Exy\omega = 0\ .$$

Pertanto, posando le equazioni

$$[22] \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \iint E\ \omega = \Sigma\ ; \\ \iint Ex^2\omega = b^2\Sigma\ ; \\ \iint Ey^2\omega = a^2\Sigma\ ; \end{cases}$$

le equazioni [21] si ridurranno alle seguenti:

$$P + G\ \Sigma = 0\ ;$$

$$P\alpha + Hb^2\Sigma = 0\ ;$$

$$P\beta + Ka^2\Sigma = 0\ .$$

Ed eliminando mediante queste le indeterminate G, H, K dall'equazione [20], si avrà finalmente la pressione sotto la seguente forma:

$$[23] \ldots\ldots\ldots \quad Q = \frac{E}{\Sigma}\left(1 + \frac{\alpha x}{b^2} + \frac{\beta y}{a^2}\right).P\ .$$

Quando la base di sostegno è omogenea, la pressione è indipendente dal coefficiente di elasticità. Infatti chiamando

Ω, l'area della base, in tale caso si ha

$$\Sigma = E\Omega\ ,$$

e la formola [23] si riduce alla seguente

$$Q = \left(1 + \frac{\alpha x}{b^2} + \frac{\beta y}{a^2}\right).\frac{P}{\Omega}\ .$$

Supponendo inoltre

$$\alpha = 0\ , \qquad \beta = 0\ ,$$

si trova

$$Q = \frac{P}{\Omega}\ .$$

Volendo adunque che la pressione si ripartisca uniformemente bisognerà che la direzione del peso P passi attraverso al centro di gravità dell'area della base.

Dal confronto dell'equazione [20] con l'equazione $\{[a], \text{I.}\}$ risulta, che, essendo la base di sostegno piana nella posizione d'equilibrio del grave, di necessità è anche stata piana prima del suo cedimento.

A tale riguardo noto, che l'Ingegnere Bresse, il quale nelle sue *Ricerche analitiche sopra la resistenza e l'inflessione dei pezzi curvi*, determina le pressioni, che una forza esercita normalmente contro di una base piana di sostegno, appoggiandosi all'ipotesi Euleriana (la quale consiste nel supporre che la superficie sia piana prima e dopo del cedimento), trova una formola che è identica con l'equazione [23].

Non cerco le condizioni a cui devono soddisfare le coordinate del punto di applicazione della forza P, affinchè la pressione [23] sia dappertutto positiva, perchè siffatta questione venne già mirabilmente trattata dal prefato Autore.

V.

PROBLEMA GENERALE.

Un corpo, od un sistema di più corpi sollecitati comunque da forze, è trattenuto in quanti punti si vogliono, sia isolati che disposti in modo continuo secondo date linee, superficie, o solidi di sostegno. Determinare la pressione, assoluta o relativa, che ciascuno di questi punti sopporta.

Ragionerò come se il luogo geometrico di sostegno fosse continuo, in quanto che le formole, che così si trovano per le pressioni, sono anche ugualmente applicabili ai punti isolati [II, III]. Ciò posto, rappresentando con

x, y, z, le coordinate di un punto qualunque del luogo geometrico di sostegno riferito a tre assi ortogonali;

ω, l'elemento di lunghezza, o di area, o di volume del medesimo (secondo che è una linea, od una superficie, od un solido), considerato nel punto x, y, z;

p, q, r, le componenti della pressione (riferita all'unità di lunghezza, o di area, o di volume, secondo i varii casi);

l'elemento ω sopporterà parallelamente ai tre assi le pressioni

$$p\omega\ ; \qquad q\omega\ ; \qquad r\omega\ ;$$

e rappresentando con

$$X,\ Y,\ Z\ ; \qquad L,\ M,\ N$$

le somme delle componenti delle forze e dei loro momenti di rotazione rispetto ai tre assi, le equazioni d'equilibrio saranno

$$[24]\ \ldots\ldots \begin{cases} -X+\iint p\,\omega=0\ , \\ -Y+\iint q\,\omega=0\ , \\ -Z+\iint r\,\omega=0\ : \\ -L+\iint (ry-qz)\,\omega=0\ , \\ -M+\iint (pz-rx)\,\omega=0\ , \\ -N+\iint (qx-py)\,\omega=0\ . \end{cases}$$

Inoltre, chiamando

E, il coefficiente di elasticità del luogo geometrico di sostegno relativamente al punto (x, y, z), l'equazione determinatrice delle pressioni sarà $\{[6],\ \text{I.}\}$:

$$[25]\ \ldots\ldots\ldots \iint \left(\frac{p}{E}\Delta p+\frac{q}{E}\Delta q+\frac{r}{E}\Delta r\right)\omega=0\ .$$

Pertanto, differenziando le equazioni [24] rispetto a p, q, r, moltiplicandole per le indeterminate

$$G,\ H,\ K; \qquad G',\ H',\ K'\ ,$$

e addizionandole con l'equazione [25], ne risulterà la seguente:

$$[26]\ldots \iint \left\{ \begin{array}{l} \left(G-K'y+H'z+\dfrac{p}{E}\right)\Delta p \\ +\left(H-G'z+K'x+\dfrac{q}{E}\right)\Delta q \\ +\left(K-H'x+G'y+\dfrac{r}{E}\right)\Delta r \end{array} \right\}\omega=0\ ,$$

la quale dovrà essere soddisfatta, qualunque siano le variazioni Δp, Δq, Δr; uguagliando perciò a zero i loro coefficienti, ne risulteranno i valori delle tre componenti della pressione, che è sopportata dal punto (x, y, z):

$$[27] \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} p = -(G - K'y + H'z), \\ q = -(H - G'z + K'x), \\ r = -(K - H'x + G'y). \end{cases}$$

Per determinare le costanti G, H, ecc. si sostituiscano i valori [27] nelle equazioni [24], e, simboleggiando le integrazioni, si scrivano le medesime come segue:

$$[28] \ldots\ldots \begin{cases} X + G\iint E\omega - K'\iint E\omega y + H'\iint E\omega z = 0, \\ Y + H\iint E\omega - G'\iint E\omega z + K'\iint E\omega x = 0, \\ Z + K\iint E\omega - H'\iint E\omega x + G'\iint E\omega y = 0; \end{cases}$$

$$[29] \ldots\ldots \begin{cases} \left.\begin{array}{l} L + K\iint E\omega y - H'\iint E\omega xy + G'\iint E\omega y^2 \\ -H\iint E\omega z + G'\iint E\omega z^2 - K'\iint E\omega xz \end{array}\right\} = 0, \\ \left.\begin{array}{l} M + G\iint E\omega z - K'\iint E\omega yz + H'\iint E\omega z^2 \\ -K\iint E\omega x + H'\iint E\omega x^2 - G'\iint E\omega xy \end{array}\right\} = 0, \\ \left.\begin{array}{l} N + H\iint E\omega x - G'\iint E\omega xz + K'\iint E\omega x^2 \\ -G\iint E\omega y + K'\iint E\omega y^2 - H'\iint E\omega yz \end{array}\right\} = 0 \end{cases}$$

Immaginando quindi che il coefficiente di elasticità E rappresenti la massa, riferita all'unità di lunghezza, o di area, o di volume del luogo geometrico di sostegno, supposto in tal modo materiale, e concependo che gli assi delle coordinate siano i tre assi principali, che si intersecano nel centro di gravità del medesimo, saranno

$$\iint E\,\omega\,x = 0\ ; \qquad \iint E\,\omega\,y = 0\ ; \qquad \iint E\,\omega\,z = 0\ ;$$

$$\iint E\,\omega\,xy = 0\ ; \qquad \iint E\,\omega\,xz = 0\ ; \qquad \iint E\,\omega\,yz = 0\ ,$$

e le equazioni [28] e [29] si ridurranno alle seguenti

$$X + G\iint E\,\omega = 0\ ,$$

$$Y + G\iint E\,\omega = 0\ ,$$

$$Z + G\iint E\,\omega = 0\ ;$$

$$L + G'\iint E\,\omega\,(y^2+z^2) = 0\ ,$$

$$M + H'\iint E\,\omega\,(x^2+z^2) = 0\ ,$$

$$N + K'\iint E\,\omega\,(x^2+y^2) = 0\ .$$

Chiamando adunque

$\overline{\Sigma}$, la massa totale, che si finge essere nei punti di sostegno;

a, b, c, i raggi di girazione della medesima rispetto agli assi, i quali sono dati dalle equazioni

[30] .....

$$\begin{cases} \overline{\Sigma} = \iint E\,\omega\ , \\ a^2\overline{\Sigma} = \iint E\,\omega\,(y^2+z^2)\ , \\ b^2\overline{\Sigma} = \iint E\,\omega\,(x^2+z^2)\ , \\ c^2\overline{\Sigma} = \iint E\,\omega\,(x^2+y^2)\ , \end{cases}$$

si avrà

$$G = -\frac{X}{\Sigma}\ ; \qquad H = -\frac{Y}{\Sigma}\ ; \qquad K = -\frac{Z}{\Sigma}\ ;$$

$$G' = -\frac{L}{a^2\Sigma}\ ; \qquad H' = -\frac{M}{b^2\Sigma}\ ; \qquad K' = -\frac{N}{c^2\Sigma}\ ,$$

e sostituendo questi valori nelle equazioni [27] si troverà finalmente

$$[31] \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} p=\frac{E}{\Sigma}\left(X-\frac{Ny}{c^2}+\frac{Mz}{b^2}\right); \\ q=\frac{E}{\Sigma}\left(Y-\frac{Lz}{a^2}+\frac{Nx}{c^2}\right); \\ r=\frac{E}{\Sigma}\left(Z-\frac{Mx}{b^2}+\frac{Ly}{a^2}\right), \end{cases}$$

le quali formole somministreranno in tutti i casi le componenti p, q, r della pressione, che è sopportata da un punto qualunque (x, y, z) del luogo geometrico di sostegno.

Chiamando

Q, questa pressione, ed

α, β, γ, gli angoli fatti dalla sua direzione coi tre assi, si avrà dunque altresì

$$[32] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad Q=$$

$$\frac{E}{\Sigma}\cdot\sqrt{\left(X-\frac{Ny}{c^2}+\frac{Mz}{b^2}\right)^2+\left(Y-\frac{Lz}{a^2}+\frac{Nx}{c^2}\right)^2+\left(Z-\frac{Mx}{b^2}+\frac{Ly}{a^2}\right)^2};$$

$$[33] \quad \begin{cases} \cos.\alpha=\dfrac{X-\frac{Ny}{c^2}+\frac{Mz}{b^2}}{\sqrt{\left(X-\frac{Ny}{c^2}+\frac{Mz}{b^2}\right)^2+\left(Y-\frac{Lz}{a^2}+\frac{Nx}{c^2}\right)^2+\left(Z-\frac{Mx}{b^2}+\frac{Ly}{a^2}\right)^2}}; \\ \cos.\beta=\dfrac{Y-\frac{Lz}{a^2}+\frac{Nx}{c^2}}{\sqrt{\left(X-\frac{Ny}{c^2}+\frac{Mz}{b^2}\right)^2+\left(Y-\frac{Lz}{a^2}+\frac{Nx}{c^2}\right)^2+\left(Z-\frac{Mx}{b^2}+\frac{Ly}{a^2}\right)^2}}; \\ \cos.\gamma=\dfrac{Z-\frac{Mx}{b^2}+\frac{Ly}{a^2}}{\sqrt{\left(X-\frac{Ny}{c^2}+\frac{Mz}{b^2}\right)^2+\left(Y-\frac{Lz}{a^2}+\frac{Nx}{c^2}\right)^2+\left(Z-\frac{Mx}{b^2}+\frac{Ly}{a^2}\right)^2}}. \end{cases}$$

Risulta da queste formole che la direzione della pressione è sempre, ed ovunque, indipendente dal coefficiente di elasticità E; ed avuto riguardo alle equazioni [30], la formola [32] dimostra che, allorquando questo coefficiente è costante, è pure da esso indipendente la stessa pressione Q.

Quando le forze sono riducibili ad una risultante R, la cui direzione passi per l'origine, si ha

$$L=0\ ;\qquad M=0\ ;\qquad N=0\ ,$$

e le formole [32] e [33] si riducono alle seguenti:

$$Q=\frac{E}{\Sigma}\cdot R\ ;$$

$$\cos.\alpha=\frac{X}{R}\ ;$$

$$\cos.\beta=\frac{Y}{R}\ ;$$

$$\cos.\gamma=\frac{Z}{R}\ .$$

Adunque, in tal caso, la pressione di un punto qualunque è proporzionale al rispettivo coefficiente di elasticità; e la medesima è dovunque parallela alla risultante R. Di maniera che si verifica questa bella legge della natura, che *la pressione si distribuisce per modo, che i varii punti di sostegno vengano a sopportare lo sforzo R, ciascuno in proporzione della propria resistenza.*

Se, inoltre, il luogo geometrico di sostegno sarà omogeneo, la pressione si ripartirà dovunque uniformemente, e la pressione relativa sarà

$$Q=\frac{R}{\Omega}\ ,$$

essendo Ω l'estensione del luogo geometrico di sostegno.

Le formole [32] e [33] sono generali: io non mi arresto a dedurre da esse le formole [13], [15] e [23], che risolvono i problemi precedenti; mi fermerò piuttosto a considerare un altro esempio, che riceve eziandio la sua applicazione nella pratica.

VI.

PROBLEMA.

Una forza opera nel piano, che passa per il centro di gravità di una superficie piana di sostegno, perpendicolarmente ad un suo asse principale. Determinare la pressione, riferita all'unità di area, che la medesima sopporta.

Assumendo la superficie di sostegno per piano yz e chiamando

y, z, le coordinate di un suo punto qualunque riferito ai due assi principali del centro di gravità della medesima;

X, Z, le componenti della forza secondo i due assi della x e della z;

α, γ, le coordinate del suo punto di applicazione;

E, il coefficiente di elasticità della superficie di sostegno nel punto (y, z);

Σ, la massa totale di questa, nella finzione che E rappresenti la massa, riferita all'unità di area, del medesimo punto;

b, il raggio di girazione della stessa massa rispetto all'asse delle y;

bisognerà, per ridurre le formole [31] al caso particolare che si considera, porre nelle medesime

$$Y = 0 \; ; \qquad L = 0 \; ; \qquad N = 0 \; ;$$

$$M = X\gamma - Z\alpha \; ; \qquad x = 0 \; .$$

Ora, facendo queste sostituzioni, si trova

$$[34] \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} p = \dfrac{E}{\Sigma}\left(X + \dfrac{X\gamma - Z\alpha}{b^2} z\right) ; \\ q = 0 \; ; \\ r = \dfrac{E}{\Sigma} \cdot Z \; . \end{cases}$$

Quando la forza, che sollecita il sistema, è parallela alla superficie di sostegno si ha

$$X = 0 \; ,$$

e le formole [34] si riducono alle seguenti:

$$[35] \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} p = -\dfrac{E}{\Sigma} \cdot \dfrac{\alpha z}{b^2} \cdot Z \; ; \\ q = 0 \; ; \\ r = \dfrac{E}{\Sigma} \cdot Z \; . \end{cases}$$

Se inoltre la direzione della forza passerà per la superficie di sostegno sarà

$$\alpha = 0 \; ,$$

ed invece delle [35] si avranno le formole seguenti:

$$[36] \ldots\ldots \qquad p = 0 \; ; \qquad q = 0 \; ; \qquad r = \frac{E}{\Sigma} \cdot Z \; .$$

La pressione p, che è data dalla formola [34], è quella che si ottiene supponendo che la superficie di sostegno sia anche stata piana prima del suo cedimento, e che il movimento de' suoi punti sia stato quale risulterebbe da una traslazione e da una rotazione contemporanea attorno all'asse, che passa pel suo centro di gravità a perpendicolo della direzione della forza; precisamente adunque giusta le ipotesi, che servono di base alle teorie più recenti della resistenza all'inflessione dei materiali, ed alla determinazione delle pressioni, che si manifestano nelle varie sezioni normali degli archi.

Le formole [34], [35] e [36], che danno r, provano, che ogni qualvolta la forza non è perpendicolare alla superficie di sostegno, vi è una *pressione di scorrimento*, la quale è la stessa per tutti i punti, che hanno un medesimo coefficiente di elasticità. Per conseguenza, in tali casi, il sistema scorrerà sempre sulla superficie di sostegno, mentre si stabilirà in equilibrio; e non vi sarà mai asse neutro, questo non potendo aver luogo che nel caso particolare in cui la forza è perpendicolare a quella superficie.

Noterò per ultimo il seguente risultato che è comprovato dalle formole [34]: *la pressione, riferita all'unità di superficie, che una base piana di sostegno sopporta sotto l'azione di una forza diretta attraverso al suo centro di gravità, è la stessa, sia che questa operi a perpendicolo della base, sia che operi nella stessa base.*

VII.

PROBLEMA.

Un corpo omogeneo immobile, che ha la figura di un cilindro retto a base circolare, è sollecitato da una forza operante secondo una retta, che ne incontra l'asse a perpendicolo. Determinare la pressione, riferita all'unità di volume, che il medesimo sopporta, a motivo di quella forza, in ciascuno de' suoi punti.

Metto l'origine delle coordinate nel centro di figura del cilindro, e prendendo per assi delle x, y, z l'asse di questo, una retta parallela alla

forza, ed una perpendicolare ad entrambi, chiamo

ρ, il raggio della base del cilindro;
l, la sua lunghezza;
P, la forza;
α, l'ascissa del suo punto di applicazione;
x, y, z, le coordinate di un punto qualunque del corpo;
V, il volume del medesimo.

Ciò posto, osservo che per applicare le formole [31] al caso particolare, che ora considero, bisogna fare:

$$X=0\ ;\qquad Y=P\ ;\qquad Z=0\ ;$$

$$L=0\ ;\qquad M=0\ ;\qquad N=P\alpha\ ;$$

$$c^2=\frac{1}{12}(l^2+3\rho^2)\ .$$

In tal modo si trova

$$p=-\frac{12\alpha y}{l^2+3\rho^2}\cdot\frac{P}{V}\ ;$$

$$q=\left(1+\frac{12\alpha x}{l^2+3\rho^2}\right)\cdot\frac{P}{V}\ ;$$

$$r=0\ .$$

Questi risultati sono troppo semplici e non mi fermo a discuterli. La verità loro si rende affatto ovvia coll' immaginare che il corpo possa muoversi cedendo alla forza P.

VIII.

PROBLEMA.

Un corpo omogeneo immobile, che ha la figura di un cilindro retto a base circolare, è sollecitato da una forza, parallelamente alle sue generatrici. Determinare la pressione riferita all'unità di volume, che il medesimo sopporta in uno qualunque de' suoi punti, a motivo di quella forza.

Messa l'origine delle coordinate nel centro di gravità del cilindro, e presi per assi coordinati delle z, delle y e delle x il suo asse di figura e due perpendicolari al medesimo, rappresento con

ρ, il raggio della base del cilindro;
l, la sua lunghezza;
P, la forza;
α, β, le coordinate del suo punto di applicazione;
x, y, z, quelle di un punto qualunque del corpo;
V, il volume del medesimo.

Premesso tutto ciò osservo, che volendo applicare le formole [31] al caso attuale devesi fare:

$$X=0\ ; \qquad Y=0\ ; \qquad Z=P\ ;$$

$$L=P\beta\ ; \qquad M=-P\alpha\ ; \qquad N=0\ ;$$

$$a^2=b^2=\frac{1}{12}(l^2+3\rho^2)$$

Ora, facendo queste sostituzioni, si trova

$$p=-\frac{12\alpha z}{l^2+3\rho^2}\cdot\frac{P}{V}\ ;$$

$$q=-\frac{12\beta z}{l^2+3\rho^2}\cdot\frac{P}{V}\ ;$$

$$r=\left\{1+\frac{12(\alpha x+\beta y)}{l^2+3\rho^2}\right\}\cdot\frac{P}{V}\ .$$

I valori di p e di q variando entrambi proporzionalmente all'ordinata z, ne risulta che la componente della pressione, normale all'asse del cilindro, è costante in ogni sezione retta del medesimo, e varia in ragione della distanza di queste dalla sezione media.

Il valore di r poi fa vedere, che la legge con cui si distribuisce la pressione, che si esercita parallelamente all'asse del cilindro, è la stessa per tutte le sezioni rette del medesimo.

IX.

LINEE E SUPERFICIE DI LIVELLO.

Per maggior brevità e chiarezza, poste, [31] e [32], le equazioni

$$\frac{\Sigma}{E}\cdot Q=Q_1\ ;$$

$$\frac{\Sigma}{E}\cdot p = p_1 \ ;$$

$$\frac{\Sigma}{E}\cdot q = q_1 \ ;$$

$$\frac{\Sigma}{E}\cdot r = r_1 \ ;$$

la quantità

Q_1, verrà da me chiamata *pressione ridotta*; e la considererò come una vera pressione operante nella direzione di Q. Per conseguenza, le quantità

p_1, q_1, r_1, saranno le componenti della pressione ridotta, secondo i tre assi; e, più generalmente,

$Q_1 \cos.\vartheta$, sarà la componente della stessa pressione, secondo una retta qualunque, la quale faccia l'angolo ϑ con la direzione di Q.

Chiamerò inoltre:

Linee di livello le linee sulle quali si trovano i punti, che sopportano le pressioni di uguale intensità e di medesima direzione; e

Superficie di livello le superficie, che sono formate delle linee di livello corrispondenti alle pressioni di una medesima intensità.

E finalmente poserò anche le equazioni

$$\frac{L}{a^2} = L_1 \ ;$$

$$\frac{M}{b^2} = M_1 \ ;$$

$$\frac{N}{c^2} = N_1 \ .$$

Le formole [31] riceveranno così la seguente forma:

$$[37] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} p_1 = X - N_1 y + M_1 z \ ; \\ q_1 = Y - L_1 z + N_1 x \ ; \\ r_1 = Z - M_1 x + L_1 y \ . \end{cases}$$

Ciò posto, moltiplicando la prima di queste equazioni per L_1, la seconda per M_1, e la terza per N_1, e, addizionandole insieme membro a membro, si trova la seguente espressione:

$$[38] \ldots\ldots \quad L_1 p_1 + M_1 q_1 + N_1 r_1 = L_1 X + M_1 Y + N_1 Z \ ,$$

che è indipendente dalle coordinate x, y, z, e mediante la quale ciascuna delle equazioni [37] è una conseguenza delle altre due.

Ciò prova che il luogo geometrico dei punti, corrispondenti alla pressione ridotta, che ha per componenti p_1, q_1, r_1, e la quale, pertanto, è la stessa per tutti, sia in intensità, che in direzione, è una retta avente per equazioni le equazioni [37]. Variando p_1, q_1, r_1 si hanno una infinità di rette parallele, le quali godono della medesima proprietà. Adunque le linee di livello sono tante rette, parallele fra di loro, e facienti coi tre assi gli angoli λ, μ, ν, che sono dati dalle seguenti formole:

$$[39] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \cos.\lambda = \dfrac{L_1}{\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}} ; \\ \cos.\mu = \dfrac{M_1}{\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}} ; \\ \cos.\nu = \dfrac{N_1}{\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}} ; \end{cases}$$

e le superficie di livello sono tante superficie cilindriche, anche parallele fra di loro, ed inclinate ai tre assi degli stessi angoli λ, μ, ν.

L'equazione generale di queste superficie è [32] la seguente:

$$[40] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (X-N_1y+M_1z)^2 + (Y-L_1z+N_1x)^2+(Z-M_1x+L_1y)^2-Q_1^2=0 .$$

Analizzandola, si viene a riconoscere che essa rappresenta delle superficie cilindriche circolari aventi tutte il medesimo asse; come verrà pienamente confermato dai risultati che darò fra poco.

L'asse comune delle superficie di livello sarà da me chiamato *asse di livello*; le coordinate della sua traccia sul piano x, y sono le seguenti:

$$[41] \ldots \begin{cases} x_1 = \dfrac{M_1(L_1X+M_1Y+N_1Z)-Y(L_1^2+M_1^2+N_1^2)}{N_1(L_1^2+M_1^2+N_1^2)} ; \\ y_1 = -\dfrac{L_1(L_1X+M_1Y+N_1Z)-X(L_1^2+M_1^2+N_1^2)}{N_1(L_1^2+M_1^2+N_1^2)} , \end{cases}$$

e la sua direzione fa, come tutte le altre linee di livello, gli angoli λ, μ, ν coi tre assi.

Introducendo i coseni di questi angoli nell'equazione [38] si trova

$$p_1 \cos.\lambda + q_1 \cos.\mu + r_1 \cos.\nu = X \cos.\lambda + Y \cos.\mu + Z \cos.\nu \ .$$

Chiamando adunque

φ, l'angolo fatto con l'asse di livello dalla risultante R delle forze, che sollecitano il sistema (supposte applicate tutte in un medesimo punto); e

Θ, quello fatto col medesimo asse dalla pressione, si ha

$$[42] \ldots\ldots\ldots \qquad Q_1 \cos.\Theta = R \cos.\varphi \ ;$$

risultato bellissimo, che somministra il seguente teorema:

La componente, secondo l'asse di livello, della pressione ridotta è costante, ed uguale alla componente, secondo la stessa direzione, della risultante delle forze, che sollecitano il sistema, supposte applicate in un medesimo punto.

Inoltre, la pressione Q_{1m} essendo quella, che corrisponde al massimo di $\cos.\theta$, è data dalla formola

$$[43] \ldots\ldots\ldots \qquad Q_{1m} = R \cos.\varphi \ ;$$

e cercando il luogo geometrico dei punti corrispondenti a questa pressione, si trova essere una retta, che incontra il piano xy nel punto $\left[x_1, y_1\ [41]\right]$ e fa coi tre assi gli λ, μ, ν [39]; trovasi, cioè, che è lo stesso asse di livello.

Si può giungere allo stesso risultato determinando l'equazione delle superficie di livello riferite ad un piano $x'y'$ perpendicolare alle loro generatrici.

Infatti, conducendo questo piano per l'origine delle coordinate, e prendendo per asse delle x' la sua traccia posta sul piano xy, e per asse delle y' una perpendicolare a questa traccia, i valori delle coordinate x, y, z, sono espressi in funzione di x', y' mediante le formole seguenti:

$$x = \frac{M_1}{K} x' - \frac{L_1 N_1}{H K} y' \ ;$$

$$y = -\frac{L_1}{K} x' - \frac{M_1 N_1}{H K} y' \ ;$$

$$z = \frac{K}{H} y' \ ,$$

nelle quali si deve fare:

$$H=\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}\ ;\qquad K=\sqrt{L_1^2+M_1^2}\ ,$$

e sostituendoli nell'equazione [40], dopo alcune belle riduzioni, si trova:

$$(x'-h)^2+(y'-k)^2=\rho^2\ ,$$

essendo

$$h=\frac{-N_1 R\cos.\varphi+Z.\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}}{\sqrt{L_1^2+M_1^2}\times\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}}\ ;$$

$$k=\frac{L_1 Y-M_1 X}{\sqrt{L_1^2+M_1^2}\times\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}}\ ;$$

$$[44]\ \ldots\ldots\qquad \rho^2=\frac{Q_1^2-R^2\cos.^2\varphi}{L_1^2+M_1^2+N_1^2}\ .$$

Faccio anche osservare che la pressione minima $Q_{1,m}$, corrispondendo al valore $\varphi=90^\circ$, come dissi più sopra, è diretta secondo l'asse di livello.

Adunque si ha quest'altro bel teorema: *la pressione ridotta minima è uguale alla componente, secondo l'asse di livello, della risultante delle forze, che sollecitano il sistema, supposte applicate in un medesimo punto; essa è sopportata dai punti, che si trovano sull'asse di livello; ed è diretta secondo quest'asse.*

Una conseguenza immediata di siffatto teorema si è che, generalmente, non avrà luogo veruna retta di livello rispetto alla quale la pressione sia nulla: quest'*asse neutro* esiste solamente nei casi particolari in cui si ha

$$R=0\ ,$$

oppure

$$\varphi=0\ ,$$

come nelle varie questioni, che ho trattato nei paragrafi II, III, IV, VI, VII e VIII.

La formola [44] dà luogo alla seguente:

$$[45]\ \ldots\ldots\qquad Q_1=\sqrt{R^2\cos.^2\varphi+\rho^2(L_1^2+M_1^2+N_1^2)}\ ,$$

la quale spiega con che legge varii l'intensità della pressione ridotta, passando da una superficie di livello ad un'altra.

Per quanto spetta alla direzione di questa pressione esiste un bel teorema: infatti, avuto riguardo ai coefficienti dell'equazione del piano

tangente alle superficie di livello [40]

$$\frac{dz}{dx} = \frac{N_1(X - N_1 y + M_1 z) - L_1(Z - M_1 x + L_1 y)}{M_1(X - N_1 y + M_1 z) - L_1(Y - L_1 z + N_1 x)} ;$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{M_1(Z - M_1 x + L_1 y) - N_1(Y - L_1 z + N_1 x)}{M_1(X - N_1 y + M_1 z) - L_1(Y - L_1 z + N_1 x)} ,$$

ed ai rapporti dei coseni degli angoli fatti dalla pressione coi tre assi [33]

$$\frac{\cos.\alpha}{\cos.\gamma} = \frac{X - N_1 y + M_1 z}{Z - M_1 x + L_1 y} ;$$

$$\frac{\cos.\beta}{\cos.\gamma} = \frac{Y - L_1 z + N_1 x}{Z - M_1 x + L_1 y} ,$$

si trova che *la pressione sopportata da un punto qualunque, il quale sia posto fuori dell'asse di livello, è diretta nel piano tangente alla superficie di livello a cui appartiene.*

Poichè in tutti i punti di una medesima superficie di livello la pressione ridotta è costante e diretta nel piano tangente a questa superficie, ed è pure costante la sua componente (ortogonale) secondo l'asse di livello, ne consegue che anche l'altra componente, normale a quest'asse, è costante e diretta secondo la tangente alla sezione retta della stessa superficie. Siccome appare dalle formole [42] e [45], il suo valore è il seguente :

[46] ..... $$Q_1 \operatorname{sen.}\Theta = \rho . \sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2} .$$

Questo è anche un bellissimo risultato, che somministra il seguente teorema :

La componente normale all'asse di livello della pressione ridotta, che è sopportata dai varii punti di una medesima superficie di livello, è costante e proporzionale al raggio della sezione retta di questa superficie.

Dividendo l'equazione [46] per l'equazione [42], membro a membro, si ottiene la seguente formola :

$$\text{tang.}\,\Theta = \frac{\rho . \sqrt{L_1^2 + M_1^2 + N_1^2}}{R \cos.\varphi} ;$$

la quale insegna quali sono le variazioni, che subisce la direzione della pressione, rispetto all'asse di livello, nel passare da una superficie di livello ad un'altra.

Giacchè i varii punti di sostegno sopportano tutti una medesima pressione nel senso dell'asse di livello, ed un'altra a questo perpendicolare, che è pure la stessa per ogni superficie di livello, e la quale è diretta secondo la tangente alla sezione retta della medesima, ed è proporzionale al raggio di questa sezione, di necessità, nello stabilirsi l'equilibrio del sistema, deve il luogo geometrico di sostegno aver girato attorno all'asse di livello, scorrendo nello stesso tempo lungo il medesimo $\}(a)$, I.$\{$, deve, cioè, avere avuto un *moto elicoidale* attorno all'asse di livello.

Io pongo fine a questa mia teoria sulle superficie di livello notando la perfetta analogia, che passa tra la retta da me definita *asse di livello* e l'*asse scorrevole di rotazione istantaneo*, che il celebre Poinsot ha dimostrato sussistere nel movimento dei sistemi; ed in generale fra i miei teoremi sulle pressioni e quelli relativi alle coppie risultanti dello stesso Autore.

X.

OSSERVAZIONE

sull'avvertenza da usarsi quando un sistema, appoggiandosi semplicemente contro il luogo geometrico dei punti di sostegno, può dal medesimo distaccarsi.

Nelle questioni trattate nei paragrafi precedenti ho supposto che i punti di sostegno resistessero in tutti i sensi, e le formole fondamentali [31] furono dedotte in tale ipotesi. Quando il sistema, che si considera, non fa che appoggiarsi contro il luogo geometrico di sostegno, e può da esso distaccarsi, la pressione è in tutti i punti normale al medesimo. Cosicchè fino a tanto che si tratterà di una retta o di un piano sollecitato da una forza, le formole saranno ancora quelle trovate nei paragrafi precedenti, in quanto che dovrà la medesima, per l'equilibrio, esservi perpendicolare. Ma, in generale, le formole che danno le componenti della pressione non saranno più le [31], perchè le variazioni Δp, Δq, Δr, le quali sono contenute nell'equazione [26], non si troveranno più indipendenti, ma legate da una o due relazioni, secondo che il luogo geometrico dei punti d'appoggio sarà una linea od una superficie.

Non potendo per ora occuparmi di simili casi, mi ristringo a riferire i risultati da me ottenuti, trattando una questione particolare di tal genere, che può ricevere la sua applicazione nella pratica.

PROBLEMA.

Un sistema si appoggia contro una porzione qualunque di superficie sferica, e può dalla medesima distaccarsi. Determinare la pressione, riferita all'unità di superficie, che un punto qualunque di essa sopporta.

Mettendo l'origine delle coordinate nel centro della sfera, e chiamando:

E, il coefficiente di elasticità, costante o variabile, della superficie di sostegno;

Σ, la massa totale della medesima, nella finzione che E rappresenti la massa, riferita all'unità di superficie, di un suo punto qualunque;

x, y, z, le coordinate di questo punto riferito ai tre assi principali del luogo geometrico di sostegno, supposto in tal modo materiale;

a, b, c, i raggi di girazione della massa Σ rispetto ai medesimi assi;

ρ, il raggio della sfera;

X, Y, Z, le somme delle componenti secondo i tre assi delle forze sollecitanti, le quali per l'equilibrio devono di necessità ridursi ad una risultante diretta contro il centro della sfera;

Q, la pressione, riferita all'unità di superficie, che è sopportata dal punto (x, y, z);

trovasi la seguente formola:

$$Q = 2\rho \cdot \frac{E}{\Sigma} \cdot \left(\frac{Xx}{b^2+c^2-a^2} + \frac{Yy}{a^2+c^2-b^2} + \frac{Zz}{a^2+b^2-c^2} \right).$$

Per esempio, quando la superficie di sostegno è una calotta omogenea disposta con la base perpendicolare all'asse delle z, e la forza Z che la sollecita è diretta secondo quest'asse, si ha

$$Q = \frac{z}{\rho - h + \frac{h^2}{3\rho}} \cdot \frac{Z}{2\pi\rho h},$$

essendo h l'altezza della calotta.

NOTA.

Nuova dimostrazione del procedimento usato nella Memoria per determinare le pressioni.

Affinchè le pressioni dei punti d'appoggio di un sistema equilibrato, ed in istato prossimo al moto, siano determinate, è necessario ammettere, giusta quanto si osserva in natura, che i medesimi, invece di essere affatto immobili, cedano agli sforzi, che devono sopportare; ed è permesso, senza alterare la verità dei risultati, di supporre che ciascuno di quei punti possa muoversi, in tutti i sensi, come se fosse attaccato ad un punto fisso, al medesimo contiguo, mediante una spranghetta elastica infinitamente breve. In tale ipotesi, chiamando

λ, la lunghezza naturale di una di queste spranghette;

ω, la sua sezione;

Q, la pressione del punto, che essa sostiene (uguale alla tensione della medesima);

E, il suo coefficiente di elasticità (il quale è pure quello della materia componente il sistema nei dintorni del punto);

$\Delta\lambda$, la variazione di λ, dovuta alla forza Q;

e, rappresentando con le stesse lettere accentuate le quantità analoghe, relative alle spranghette, che sostengono gli altri punti d'appoggio, si hanno (potendosi queste concepire tutte di egual lunghezza e sezione) le seguenti relazioni:

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q = \dfrac{E\,\omega}{\lambda}\Delta\lambda\ ; \\ Q' = \dfrac{E'\omega}{\lambda}\Delta'\lambda\ ; \\ \text{ecc.}\ ; \end{array} \right.$$

e tali saranno le equazioni esistenti fra le pressioni dei sostegni e le loro depressioni, allorchè si sarà stabilito l'equilibrio del sistema; equilibrio che io suppongo noto di posizione.

Inoltre, è pure innegabile che quando il sistema diventasse rigido, le pressioni Q, Q', ecc. si conserverebbero ancora le stesse; e che per

conseguenza, trattandosi di queste determinare, è permesso di fare una tale ipotesi.

Ciò posto, rendendo libero il sistema, col sostituire i punti fissi con le forze uguali e contrarie alle pressioni, che i medesimi sopportano, si potrà ammettere che le equazioni d'equilibrio si riducano alle sei note dei sistemi rigidi e liberi, che io rappresenterò come segue:

$$(b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \varphi(Q, Q', \ldots\ldots) = 0 \ ; \\ \psi(Q, Q', \ldots\ldots) = 0 \ ; \\ \text{ecc.} \end{cases}$$

Premesso tutto ciò, stabilisco il seguente lemma, la cui verità è abbastanza ovvia: *le equazioni* (*b*), *avuto riguardo alle equazioni* (*a*), *esprimono determinati vincoli, mediante i quali le forze* Q, Q' *ecc. si fanno equilibrio.*

Passando ad applicare il principio dei momenti virtuali, sotto un tale punto di vista, osservo che nell'equazione

$$(c) \quad \ldots\ldots\ldots \quad Q\Delta q + Q'\Delta q' + \ldots\ldots = 0 \ ,$$

relativa a tale principio, gli spazietti Δq, $\Delta q'$ ecc. sono le variazioni degli allungamenti, che rappresentai superiormente con $\Delta\lambda$, $\Delta'\lambda$ ecc.; cioè a dire, che si ha

$$\Delta q = \Delta \,.\, \Delta\lambda \ ;$$

$$\Delta q' = \Delta \,.\, \Delta'\lambda \ ;$$

ecc. ;

e, per le equazioni (α),

$$\Delta q = \frac{\lambda}{E\omega}\Delta Q \ ;$$

$$\Delta q' = \frac{\lambda}{E'\omega}\Delta Q' \ ;$$

ecc. ;

in guisa che all'equazione (*c*) si potrà dare la seguente forma:

$$(d) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{Q}{E}\Delta Q + \frac{Q}{E'}\Delta Q' + \ldots\ldots = 0 \ .$$

Quest'equazione poi, giusta la teorica del principio dei momenti virtuali,

deve sussistere per tutti i valori, che si possono dare alle variazioni ΔQ, $\Delta Q'$, ecc., subordinatamente alle equazioni (b) differenziate, come infra, rispetto a Q, Q', ecc. :

$$(e) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \frac{d\varphi}{dQ}\Delta Q + \frac{d\varphi}{dQ'}\Delta Q' + \ldots\ldots = 0 \ ; \\ \frac{d\psi}{dQ}\Delta Q + \frac{d\psi}{dQ'}\Delta Q' + \ldots\ldots = 0 \ ; \\ \text{ecc.} \ ; \end{cases}$$

di maniera che, eliminando, mediante le medesime, dalle equazioni (d) tante delle variazioni ΔQ, $\Delta Q'$, ecc. quante si potranno, i coefficienti delle altre dovranno essere tutti eguali a zero. Scrivendo adunque le equazioni, che in tal modo risulteranno, ed unendole alla (d), il loro numero sarà uguale a quello delle pressioni incognite Q, Q', ecc., e ne somministreranno i valori.

Chiamando p, q, r; p', q', r'; ecc. le componenti delle pressioni Q, Q', ecc., secondo tre assi ortogonali, si ha

$$Q\Delta Q = p\Delta p + q\Delta q + r\Delta r \ ;$$
$$Q'\Delta Q' = p'\Delta p' + q'\Delta q' + r'\Delta r' \ ;$$
$$\text{ecc.}$$

Pertanto si potrà, occorrendo, surrogare l'equazione (d) con la seguente:

$$(f) \ldots\ldots\ldots \quad S\left(\frac{p}{E}\Delta p + \frac{q}{E}\Delta q + \frac{r}{E}\Delta r\right) = 0 \ ,$$

nella quale vuolsi intendere che la lettera S rappresenti la somma di tutti i trinomi, simili a quello scritto, che sono relativi ai varii punti di sostegno.

Il metodo più acconcio per l'eliminazione è quello noto dei fattori indeterminati. Si procederà quindi in ogni caso come segue: moltiplicata ciascuna delle equazioni (e) per una quantità indeterminata, si addizioneranno insieme, membro a membro, con l'equazione (d), o con l'equazione (f), secondo che si avranno di mira le pressioni o le loro componenti, ed uguagliati a zero i coefficienti delle variazioni, che l'equazione somma conterrà, si elimineranno dalle equazioni risultanti le indeterminate, che saranno state introdotte.

MÉMOIRE

Sur un rapprochement nouveau entre la Théorie moderne de la propagation linéaire du Son, *dans un tuyau cylindrique horizontal d'une longueur indéfinie, et la Théorie des* pulsions, *exposée par* Newton *dans les deux Propositions* XLVII *et* XLIX *du second Livre des* Principes

PAR

JEAN PLANA

Lu dans la Séance du 20 décembre 1857.

Ces deux Propositions que, dans le dernier siècle, plusieurs Auteurs ont regardées comme inintelligibles et même fausses, sont celles qui ont réveillé le génie du jeune Louis Lagrange à l'âge de 23 ans. Il est à la fois curieux et instructif de comparer la manière dont il jugeait en 1759 et en 1760 le raisonnement de Newton, avec la manière dont il l'a jugé 27 années après, dans un de ses Mémoires publié dans le Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1786. Maintenant que nous possédons la solution complète de cette question, on admire davantage toute la finesse du Commentaire de Lagrange; mais, en dernière analyse, on est forcé d'avouer qu'il était impossible en 1759 comme en 1786, non de trouver, mais de *démontrer*, sans réplique, la loi de la propagation uniforme du son. Alors, les idées acquises sur l'emploi des fonctions *discontinues*, et surtout les idées relatives à leurs transformations étaient encore trop incomplètes pour faire disparaître plusieurs objections capitales. A la vérité, Lagrange vers l'année 1764 avait jeté le fondement de leurs

solutions par un trait de génie éminemment lumineux, consigné dans les pages 260 et 261 du 3.ème Volume des *Miscellanea Taurinensia*. Mais ce trait de génie offrait une transformation, bornée à la possibilité d'exprimer des *portions* de fonctions d'une seule variable en séries de quantités périodiques, et n'établissait pas la possibilité d'exprimer par des intégrales définies doubles, relatives à d'autres variables auxiliaires, toutes les valeurs d'une fonction continue ou discontinue, quelle que soit la valeur de la variable comprise entre l'infini négatif et l'infini positif. Cette extension qui, seule, pouvait fournir une solution complète du problème de la propagation du son, et de plusieurs autres, a été faite par Fourier vers le commencement de ce siècle. Cette mémorable découverte offrait en outre le moyen d'exprimer, assez souvent, sous forme finie, la somme réelle de deux quantités imaginaires sans l'intervention du symbole de l'imaginaire. Ainsi, il n'est pas surprenant, si les premières découvertes de Lagrange n'ont pas fait cesser entièrement les objections soulevées par D'Alembert contre sa théorie du son, et si en 1768 il concluait de ses raisonnements « qu'en faisant même les suppositions les plus favo-» rables au calcul, il ne paraît pas possible de réduire à des formules » analytiques exactes les lois du mouvement des particules de l'air, ni, » par conséquent, de rendre raison de la propagation du son, telle que » l'expérience nous l'a fait connaître (pages 144 et 145 du Tome V des » *Opuscules*). »

La théorie de Lagrange de 1759 était fort satisfaisante relativement au problème des cordes vibrantes; mais étendue aux vibrations d'une colonne aérienne *indéfinie*, elle cessait d'avoir le même degré de certitude. Néanmoins D'Alembert n'a pas fait cette distinction d'une manière explicite dans ses réflexions publiées dans les pages 65-73 du 1.er Volume de ses *Opuscules*.

Ces faits remarquables et d'autres du même genre, qu'on trouve dans les Mémoires d'Euler et D. Bernoulli, semblent prouver qu'il fallait avoir établi sur une plus large base la théorie *des osculations finies*, conformément aux idées de Fourier, publiées dans sa *Théorie de la chaleur*. Et que, de plus, il fallait étendre et perfectionner cette théorie pour bien saisir les conditions de son existence, ainsi que les exceptions et limitations qui lui sont inhérentes; ce qui exigeait la combinaison de connaissances variées et profondes.

Les travaux de Poisson, en général admirables, sont ceux qui ont le

plus contribué à l'extension des découvertes de Fourier, et aux applications de l'analyse aux actions nées des forces moléculaires.

La question que je me propose de traiter dans ce Mémoire est une des plus simples, du genre de celles qui exigent l'emploi des fonctions discontinues; on peut la croire épuisée, abstraction faite de l'histoire de la science; mais ceux qui désirent fixer, d'une manière tout-à-fait claire, leurs idées sur les conceptions de Newton et de Lagrange, relatives à la propagation du son, reconnaîtront peut-être que les développements que je vais exposer ajoutent au Commentaire de Lagrange plusieurs explications indispensables pour sentir tout le mérite de leurs découvertes, et mettre en évidence les difficultés qui ont été surmontées pour les compléter. Pour interpréter avec justesse les deux Propositions de Newton, dont il est ici question, il faut avoir une connaissance complète de la théorie générale de la propagation du son, et voir, si, bornée au cas particulier de la propagation linéaire, on peut en faire ressortir, par le développement de ses conséquences, la vérité de ces mêmes Propositions, et démontrer par là en quel sens et jusqu'à quel point on doit les regarder comme renfermant le germe de cette théorie, conformément à l'opinion émise par Lagrange dans la maturité de son âge.

Quoique la loi de la propagation uniforme des ondes, excitées à la surface d'un liquide incompressible, ait été à peine pressentie par Newton comme proportionnelle à la racine quarrée de leur *largeur*, il en voyait néanmoins la cause dans la pesanteur d'une colonne d'eau verticale. En appliquant cette idée à une ligne physique d'air, il a senti que la vitesse de propagation du son, après un ébranlement communiqué subitement à une petite portion, était due à l'élasticité de l'air, développée par la pression d'un poids égal à celui d'une colonne d'air homogène, dont la hauteur d'environ 7950 mètres, balance la colonne de mercure dans le baromètre. Mais de ce premier aperçu à la composition de la théorie de Newton il y a néanmoins une telle distance que, lui seul, pouvait tenter de la traverser, vers l'année 1687, avec son génie et le secours des nouveaux calculs qu'il avait inventés. Les découvertes postérieures ont mis en évidence l'insuffisance de sa théorie, mais elles ont dévoilé en même temps tout ce qu'il y avait d'admirable dans ce premier pas qui a été fait pour soumettre au calcul le mouvement vibratoire des fluides élastiques. Nous ferons voir qu'il avait obtenu la véritable équation différentielle de ce mouvement, sous une forme équivalente à celle

que nous écrivons avec les deux coefficients différentiels du second ordre d'une même fonction entre deux variables indépendantes. Et que l'imperfection de sa solution tient à la manière dont il formulait un cas particulier de l'intégrale de cette même équation. Toutefois ce n'est pas d'après des généralités seulement qu'on peut s'emparer des différentes parties qui concourent à la solution de ce problème. Il est essentiel de les examiner dans un ordre convenable qui les éclaire mutuellement; et je vais exposer d'une manière, à quelques égards, nouvelle, celui que j'ai cru plus propre à remplir le but que je me suis proposé dans ce Mémoire, en m'appuyant sur les profondes recherches publiées par Poisson, qui se rattachent à mon sujet.

Relativement à la Proposition XLVI du second Livre des Principes, où Newton traite de la propagation des ondes dans un bassin d'eau stagnante, il n'est pas surprenant, s'il s'est contenté de faire une comparaison inexacte. Car, même la solution de Lagrange, donnée en 1781, cesse d'être admissible à l'exception d'un cas particulier. Ce cas est celui où la profondeur de l'eau est très-petite, tandis que le phénomène s'observe, en général, avec des circonstances qui le rendent comparable à celui où la profondeur du liquide serait, au contraire, très-grande et même infinie. Son Commentaire sur la même Proposition XLVI, publié en 1786, est borné au seul cas de la profondeur très-petite et constante. La solution de ce problème, analogue à celui des températures stationnaires d'un corps solide, a été donnée par Poisson en 1815, après les premières recherches analytiques de Fourier sur la manière d'exprimer par des intégrales définies la somme réelle de deux quantités imaginaires. C'est en cela que consiste l'écueil qui n'avait pas été surmonté par Lagrange.

La solution du cas particulier de la profondeur très-petite n'a été donnée par Poisson que pour le mouvement des molécules d'eau placées à la surface: mais cela ne suffit pas; il faut aussi considérer le mouvement des molécules intérieures. C'est de quoi je donnerai une solution, que je crois nouvelle, dans une Note placée à la suite de ce Mémoire. Il sera par là analytiquement démontré que, même dans ce cas, un ébranlement primitif n'est pas transmis *instantanément* à la masse totale d'un liquide incompressible; mais que la transmission est *successive* d'une manière analogue à celle des fluides élastiques.

Le problème des Ondes est un des plus difficiles. Poisson en a donné une Notice historique dans la préface de son Mémoire. Mais en 1828,

dans le Tome VIII des Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, il a donné une analyse fort intéressante de son premier travail, et des recherches non moins profondes, publiées par feu M.r Cauchy dans sa Pièce couronnée en 1816.

Toutefois, cette question est loin d'être épuisée. Même dans le cas où la profondeur du fluide est très-grande, qui est le plus simple après celui de la profondeur très-petite, l'équation transcendante, trouvée par Poisson, pour déterminer la vitesse *uniforme* de la propagation des ondes à la surface du fluide, exige une modification importante, afin de rendre tout-à-fait exacte l'expression analytique de cette propagation. J'ai exposé dans deux Notes, placées à la suite de ce Mémoire, l'analyse délicate qui m'a conduit à ce résultat, nouveau que je sache.

La vitesse uniforme, que j'ai trouvée, diffère de celle de Poisson dans le rapport des nombres 42 et 37, lorsque les ondes sont produites dans un canal de largeur constante. J'aurai voulu pouvoir citer quelques expériences en faveur de ce résultat; mais celles qui sont à ma connaissance ne sont pas applicables à la théorie, relativement aux ondes dont la vitesse est variable avec les circonstances initiales.

On verra que j'ai, probablement, retrouvé la pensée même de Newton, et le raisonnement qu'il faisait pour établir sa Proposition XLVI du second Livre des Principes: *Undarum velocitas est in subduplicata ratione latitudinum.* Le Commentaire de Lagrange sur cette même Proposition, publié dans le Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1786 (pag. 192-98), présente le raisonnement de Newton sous un autre point de vue, d'ailleurs remarquable; mais il n'offre pas le moindre indice d'explication, relativement à la manière avec laquelle, Newton, introduisait la *largeur des ondes* dans l'expression de la vitesse; et c'est en cela que consiste la véritable interprétation de cette Proposition, que Lagrange lui-même devait regarder comme erronée. Car, il croyait la vitesse de cette propagation, dans tous les cas, proportionnelle à la racine carrée d'un tout autre élément, celui de la *profondeur* du liquide.

La Proposition de Newton est vraie *in abstracto;* mais son analyse était tout-à-fait impuissante pour former *a priori*, non seulement l'équation qui détermine la largeur des ondes, mais aussi pour donner, sans indétermination, l'argument du terme périodique, par lequel il exprimait l'élévation et la dépression du liquide au-dessus de la surface de niveau.

L'analyse de Lagrange, au contraire, donnait exactement l'équation

aux différences partielles, qui renferme les lois de ce phénomène; lois qu'il fallait faire ressortir par le mode de son intégration. C'est en cela que consiste le mérite éminent de cette découverte faite par POISSON en 1815.

L'explication de la Proposition XLVI, dont je viens de parler, démontre que NEWTON n'a nullement envisagé le mouvement des ondes comme un *véritable mouvement de translation*, ainsi que cela est affirmé par FLAUGERGUES dans un Mémoire qu'il a publié en 1789 dans le *Journal des Savans*. Cette fausse interprétation, reproduite en 1802 comme une vérité importante dans le 3.ème Volume de l'Histoire des Mathématiques par MONTUCLA, doit être repoussée.

§ I.

Soit D la densité naturelle du fluide élastique dans l'état de repos; et $D(1-s)$ sa densité pendant qu'il est en mouvement. Sa force élastique, mesurée par le poids d'une colonne du même fluide de la hauteur H, sera exprimée par $g.DH\omega$; g étant la force accélératrice de la gravité, et ω la surface constante de la petite section normale à l'axe du tube cylindrique, dans lequel le mouvement est censé avoir lieu, après un ébranlement primitif subitement communiqué à une portion de la colonne aérienne. Dans l'état de mouvement, qui s'établit après cet ébranlement primitif, l'élasticité de la fibre sonore varie, non seulement en proportion de sa densité actuelle, mais aussi en vertu de l'action du calorique qui se dégage, sans pouvoir se dissiper, sous forme rayonnante, pendant la très-courte durée des vibrations. Par ces deux causes simultanées, la force élastique, pendant les vibrations, doit être exprimée par $gHD(1-\gamma s)\omega$; où γ désigne une constante positive plus grande que l'unité. Après des recherches profondes sur la Physique Mathématique et sur la Physique Expérimentale, maintenant bien connues des Savans, on est parvenu à démontrer et à vérifier, que le coefficient γ est égal au rapport de la chaleur spécifique du gaz soumis à une *pression constante*, et la chaleur spécifique du même gaz sous un *volume constant*. On conçoit aisément, que la première doit surpasser la seconde, mais il fallait entreprendre des expériences fort délicates pour déterminer leur rapport avec exactitude. On doit à LAPLACE d'avoir fait disparaître, vers le commencement de ce siècle, par la découverte de la cause et la mesure

de son effet, la discordance qu'il y avait entre la théorie et l'expérience, relativement à la vitesse uniforme de propagation du son. Sur ce point, les idées étaient si peu avancées quelques années auparavant, que LAGRANGE, en 1788, croyait que cette différence (d'environ un sixième) « ne pouvait « être attribuée qu'à l'incertitude des résultats fournis par l'expérience » (Voyez la page 511 de la 1.ère Édition de la Mécanique Analytique).

Je suppose connu le raisonnement par lequel on démontre que, en faisant $gH\gamma = a^2$, les équations du mouvement linéaire du fluide sont;

$$[1] \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = a^2 \dfrac{ds}{dx} ; \\ \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{du}{dx} ; \end{cases}$$

où la lettre u représente une fonction des deux variables t et x, propre à exprimer à un instant quelconque t, compté depuis l'instant de l'ébranlement primitif, la vitesse de la tranche fluide placée à la distance x de l'origine; l'axe des x étant l'axe même du tuyau cylindrique ou prismatique. De même, la lettre s représente une autre fonction des mêmes variables t et x, propre à donner la densité $D(1-s)$ de la même tranche fluide à un instant quelconque du mouvement. La première de ces deux équations exprime l'égalité qu'il doit y avoir entre la différence

$$gHD(1-\gamma s)\omega - gHD\omega\left\{(1-\gamma s) + \frac{d.(1-\gamma s)}{dx}dx\right\}$$

des deux pressions exercées sur les deux faces opposées du petit cylindre ωdx, et la force née du produit de la masse $D\omega(1-s)dx$ par la force accélératrice $\dfrac{du}{dt}$, en négligeant la quantité du second ordre $s\dfrac{du}{dt}$, ainsi que la pesanteur du fluide.

La seconde des équations [1] exprime l'invariabilité de la masse

$$\omega D(1-s)dx = \omega D(1-s)udt$$

pendant le mouvement: car, la variation de cette masse étant

$$\omega Ddt.\left\{(1-s)\frac{du}{dx}dx - udt.\frac{ds}{dt}\right\} = \omega Ddt.\left\{(1-s)\frac{du}{dx}dx - dx.\frac{ds}{dt}\right\},$$

on doit avoir

$$(1-s)\frac{du}{dx}dx-dx.\frac{ds}{dt}=0\ ;$$

c'est-à-dire $\frac{ds}{dt}=\frac{du}{dx}$, en négligeant la quantité du second ordre $s\frac{du}{dx}$.

Ainsi, l'égalité entre la force motrice et la force accélératrice, et l'invariabilité de chacun des élémens cylindriques de la masse mobile, sont les deux propriétés analytiquement exprimées par les équations [1]. Tels sont les effets simples de la force de l'élasticité de l'air sans cesse agissante, et il faut en déduire les effets composés, en cherchant, par l'intégration, les deux fonctions de t et x désignées par u et s. Mais cela ne suffirait pas pour obtenir une solution déterminée: il faut en outre satisfaire aux conditions initiales: conditions que nous supposons telles, que, en faisant $t=0$ dans les deux fonctions u et s, l'on ait

$$[2]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \begin{cases} u=f_1(x)\ ; \\ s=\frac{1}{a^2}F_1(x)\ ; \end{cases}$$

$f_1(x)$ et $F_1(x)$ étant deux fonctions indépendantes de la seule variable x, données arbitrairement d'une manière continue ou discontinue.

§ II.

La seule inspection des équations [1] porte naturellement à les différentier par rapport au temps t; alors on obtient

$$[3]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2}=a^2\frac{d^2u}{dx^2}\ ; \\ \frac{d^2s}{dt^2}=a^2\frac{d^2s}{dx^2}\ ; \end{cases}$$

et il est évident que, considérées isolément, leurs intégrales complètes sont;

$$[4]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \begin{cases} u=\Theta\,(x+at)+\Gamma\,(x-at)\ ; \\ s=\Theta_1(x+at)+\Gamma_1(x-at)\ ; \end{cases}$$

où Θ, Γ; Θ_1, Γ_1 désignent quatre fonctions arbitraires. En faisant $t=0$, on doit avoir d'après les équations [2];

$$[5] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} f_1(x) = \Theta(x) + \Gamma(x) \ ; \\ \frac{1}{a^2} F_1(x) = \Theta_1(x) + \Gamma_1(x) \ . \end{cases}$$

D'un autre côté, en intégrant par rapport à t les équations [1], l'on a

$$u = a^2 \int dt \, \frac{d.\Theta_1(x+at)}{dx} + a^2 \int dt \, \frac{d.\Gamma_1(x-at)}{dx} \ ;$$

$$s = \int dt \, \frac{d.\Theta(x+at)}{dx} + \int dt \, \frac{d.\Gamma(x-at)}{dx} \ ;$$

ou bien

$$u = a \int \frac{d.\Theta_1(x+at)}{dx} \, d(at) - a \int \frac{d.\Gamma_1(x-at)}{dx} \, d(-at) \ ;$$

$$s = \frac{1}{a} \int \frac{d.\Theta(x+at)}{dx} \, d(at) - \frac{1}{a} \int \frac{d.\Gamma(x-at)}{dx} \, d(-at) \ .$$

Mais il est clair, que ces intégrations devant être exécutées en traitant x comme quantité constante, l'on a

$$d(at) = d(x+at) \ ; \qquad d(-at) = d(x-at) \ ;$$

et par conséquent

$$u = a\Theta_1(x+at) - a\Gamma_1(x-at) \ ;$$

$$s = \frac{1}{a}\Theta(x+at) - \frac{1}{a}\Gamma(x-at) \ .$$

En faisant $t = 0$, pour accorder ces équations avec les mêmes équations [2], on doit avoir

$$[6] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} f_1(x) = a\Theta_1(x) - a\Gamma_1(x) \ ; \\ \frac{1}{a^2} F_1(x) = \frac{1}{a}\Theta(x) - \frac{1}{a}\Gamma(x) \ . \end{cases}$$

Cela posé, il est manifeste que des équations [5] et [6] on tire;

$$\Theta(x) = \frac{1}{2} f_1(x) + \frac{1}{2a} F_1(x) \ ;$$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2} f_1(x) - \frac{1}{2a} F_1(x) \ ;$$

$$\Theta_1(x) = \frac{1}{2a^2} F_1(x) + \frac{1}{2a} f_1(x) \ ;$$

$$\Gamma_1(x) = \frac{1}{2a^2} F_1(x) - \frac{1}{2a} f_1(x) \ .$$

Il suit de là, et des équations [4], que les intégrales complètes des équations [1] sont telles que l'on a;

$$[7] \ldots\ldots \quad u = \frac{1}{2}\{f_1(x+at) + f_1(x-at)\} + \frac{1}{2a}\{F_1(x+at) - F_1(x-at)\} \ ;$$

$$[8] \ldots\ldots \quad a^2 s = \frac{1}{2}\{F_1(x+at) + F_1(x-at)\} + \frac{a}{2}\{f_1(x+at) - f_1(x-at)\} \ ;$$

et que, par conséquent, les vitesses u et les condensations s de la tranche fluide ω, placée à la distance x du milieu de l'ébranlement primitif, sont, à chaque instant, liées par l'équation

$$[9] \ldots\ldots \quad u + as = f_1(x+at) + \frac{1}{a} F_1(x+at) \ ;$$

ce qui est conforme aux équations [2] dans le cas particulier où $t = 0$.

§ III.

Supposons maintenant, que l'ébranlement primitif n'a eu lieu que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \varepsilon$ du côté des abscisses positives, et depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -\varepsilon$ du côté des abscisses négatives. Alors, les deux fonctions $f_1(x)$, $F_1(x)$ doivent être telles que l'on ait $f_1(x) = 0$, $F_1(x) = 0$ pour toute valeur de x, positive ou négative, qui surpasse ε. On sait que ces conditions sont impossibles à remplir, en général, par des fonctions à la fois continues et explicites de la variable x. Mais, d'après la théorie *des oscillations finies*, on peut remplacer la fonction discontinue $f_1(x)$ par une fonction continue qui en exprime la valeur (censée toujours finie) pour toute valeur réelle de x, comprise entre les limites $x = -\infty$, $x = +\infty$, à l'aide de la transformation

$$[10] \ldots \quad f_1(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} e^{-k\xi}\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty} dx' f_1(x')\cos.(\xi x'-\xi x)\ ;$$

qui, dans le cas actuel, devient

$$[11] \ldots \quad f_1(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} e^{-k\xi}\,d\xi\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx' f_1(x')\cos.(\xi x'-\xi x)\ ;$$

puisque, par hypothèse, les valeurs de $f_1(x')$ sont nulles pour toute valeur positive ou négative de x' plus grande que ε. Ici, π désigne, à l'ordinaire, le rapport de la circonférence au diamètre, et le coefficient k qui multiplie la variable ξ dans l'exposant de la base e des logarithmes hyperboliques est une quantité auxiliaire dont rien ne limite la petitesse, que l'on doit supposer infiniment petite et même nulle, après que les intégrations indiquées sont exécutées. Elle devient la base d'un artifice analytique propre à faciliter la démonstration de la formule.

Sur cela, voici quelques éclaircissements capables de mieux fixer le sens des transformations de ce genre. Tandis que pour exprimer, par exemple, les valeurs de $f_1(x)=x^2$, depuis $x=-\varepsilon$ jusqu'à $x=+\varepsilon$, on peut employer la série

$$f_1(x)=\frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}\cdot\sum_1^{\infty}\frac{\cos.n\pi}{n^2}\cos.\left(\frac{n\pi x}{\varepsilon}\right)$$

composée de termes périodiques, il faudra faire

$$f_1(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} e^{-k\xi}\,d\xi\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx' x'^2\cdot\cos.(\xi x'-\xi x)\ ,$$

si l'on veut une fonction de x qui soit égale à x^2, depuis $x=-\varepsilon$ jusqu'à $x=+\varepsilon$; et égale à zéro, depuis $x=-\varepsilon$ jusqu'à $x=-\infty$, ainsi que depuis $x=+\varepsilon$ jusqu'à $x=\infty$.

De même, les ordonnées $\sqrt{\varepsilon^2-x'^2}$ d'un demi-cercle décrit avec le rayon ε, seront exprimées par

$$f_1(x)=\frac{\pi\varepsilon}{4}+\frac{1}{\varepsilon}\cdot\sum_1^{\infty}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx'\cdot\sqrt{\varepsilon^2-x'^2}\cdot\cos.\left[n\pi\,\frac{(x'-x)}{\varepsilon}\right],$$

en termes périodiques. Mais si la fonction de x doit être égale à zéro pour toute valeur de x plus grande que ε, il faudra faire

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\infty e^{-k\xi} d\xi \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx' . \sqrt{\varepsilon^2 - x'^2} . \cos.(\xi x' - \xi x) \ .$$

L'ordonnée

$$f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - \varepsilon^2}$$

d'un segment de cercle dont la corde est 2ε et le rayon r, est exprimée en termes périodiques par

$$f_1(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx' \cdot \left\{ \sqrt{r^2 - x'^2} - \sqrt{r^2 - \varepsilon^2} \right\}$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \cdot \sum_1^\infty \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx' \cdot \left\{ \sqrt{r^2 - x'^2} - \sqrt{r^2 - \varepsilon^2} \right\} \cos. \left[n\pi \frac{(x - x')}{\varepsilon} \right] ,$$

pour toute valeur de x comprise entre les limites $\mp \varepsilon$.

Mais si l'on exige en outre que, en dehors de ces limites, on ait $f_1(x) = 0$, pour toute valeur de x comprise entre les limites $\pm(\varepsilon + \infty)$, il faudra faire

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\infty e^{-k\xi} d\xi \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx' . \left\{ \sqrt{r^2 - x'^2} - \sqrt{r^2 - \varepsilon^2} \right\} \cos.(\xi x' - \xi x) \ .$$

Les ordonnées $f_1(x)$ du contour d'un triangle isoscèle dont la base est a, et θ l'inclinaison des côtés sur la base, est exprimée en termes périodiques par

$$f_1(x) = \frac{2 \text{ tang. } \theta}{a} \cdot \sum_1^\infty \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} x' dx' \sin. \left(\frac{n\pi x'}{a} \right) \\ \displaystyle + \int_{\frac{a}{2}}^{a} (a - x') dx' \sin. \left(\frac{n\pi x'}{a} \right) \end{array} \right\} \sin. \left(\frac{n\pi x}{a} \right)$$

$$= \frac{4a}{\pi^2} \text{tang. } \theta \cdot \sum_0^\infty . (-1)^i \frac{\sin. \left[(2i+1) \frac{\pi x}{a} \right]}{(2i+1)^2} \ ;$$

de sorte que, pour toute valeur de x plus petite que $\frac{a}{2}$, le second membre de cette équation s'approchera indéfiniment de $x\,\text{tang.}\,\theta$. Et pour toute valeur de x plus grande que $\frac{a}{2}$, exprimée par $\frac{a}{2}+u$, le même second membre deviendra égal à

$$\left[a-\left(\frac{a}{2}+u\right)\right]\text{tang.}\,\theta=\left(\frac{a}{2}-u\right)\text{tang.}\,\theta\;;$$

ce qui est le caractère de l'ordonnée du contour d'une courbe qui a une osculation finie avec le contour d'un triangle isoscèle. Mais si, en dehors des limites $x=0$, $x=a$ on exige que les ordonnées soient nulles pour toute valeur négative de x, et pour toute valeur positive de x depuis $x=a$ jusqu'à $x=a+\infty$ il faudra faire

$$f_1(x)=\frac{\text{tang.}\,\theta}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-h\xi}d\xi\left\{\int_0^{\frac{a}{2}}x'dx'\cos.(\xi x'-\xi x)+\int_{\frac{a}{2}}^{a}(a-x')dx'\cos.(\xi x'-\xi x)\right\}.$$

L'ordonnée $f_1(x)$ du contour d'un trapèze dont a et $2b$ sont les *bases* parallèles, et θ l'*égale* inclinaison des deux côtés sur la base a, est exprimée, en termes périodiques, depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$, par

$$f_1(x)=$$

$$\frac{2\,\text{tang.}\,\theta}{a}\cdot\sum_1^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}-b}x'dx'.\sin.\left(\frac{n\pi x'}{a}\right)+\int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}+b}\left(\frac{a}{2}-b\right)dx'\sin.\left(\frac{n\pi x'}{a}\right)\\ \displaystyle+\int_{\frac{a}{2}+b}^{a}(a-x')dx'\sin.\left(\frac{n\pi x'}{a}\right)\end{array}\right\}\sin.\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

En exécutant les intégrations indiquées l'on aura

$$f_1(x)=\frac{4a\,\text{tang.}\,\theta}{\pi^2}\cdot\sum_0^{\infty}(-1)^i\frac{\cos.\left[(2i+1)\pi\frac{b}{a}\right]\sin.\left[\frac{(2i+1)\pi x}{a}\right]}{(2i+1)^2}\;.$$

Mais si l'on demande que l'on ait $f_1(x)=0$ pour toute valeur de x,

positive ou négative, en dehors des limites $x=0$, $x=a$, il faudra faire

$$f_1(x)=$$

$$\frac{\text{tang. }\theta}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} e^{-k\xi}\,d\xi\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}-b} dx'.x'\cos.(\xi x'-\xi x)+\left(\frac{a}{2}-b\right)\int_{\frac{a}{2}-b}^{\frac{a}{2}+b} dx'\cos.(\xi x'-\xi x)\\ \displaystyle+\int_{\frac{a}{2}+b}^{a}(a-x')\,dx'\cos.(\xi x'-\xi x)\end{array}\right\}.$$

Si l'on demande une fonction de x qui soit égale à $\sin.\frac{\pi x}{\varepsilon}$, depuis $x=-\varepsilon$ jusqu'à $x=+\varepsilon$, et qui soit égale à zéro pour toute valeur de x, positive ou négative, plus grande que ε, il faudra faire

$$f_1(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\infty} e^{-k\xi}\,d\xi\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx'.\sin.\left(\frac{\pi x'}{\varepsilon}\right)\cos.(\xi x'-\xi x)\ .$$

Ces exemples démontrent clairement en quoi consiste le caractère distinctif de ces deux transformations. Lagrange avait trouvé la première, mais la seconde appartient à Fourier. On doit à Poisson une démonstration claire et élégante des formules générales [10] et [11] qu'il a donnée en 1815 à l'article (5) de son Mémoire *Sur la Théorie des Ondes*. C'est d'après cette démonstration qu'on voit que, aux deux limites $\mp\varepsilon$, le second membre de l'équation [11] devient égal à $\frac{1}{2}f_1(\mp\varepsilon)$, et non à $f_1(\pm\varepsilon)$. Sur cela, il faut observer, que les séries composées de termes périodiques ne sont pas toujours sujettes à la même exception. Par exemple, dans le cas de $f_1(x)=x^2$, si l'on fait $x=\varepsilon$, l'on a

$$\varepsilon^2=\frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}\left\{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}\right\}\ ;$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon^2=\frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{4\varepsilon^2}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}\ ,$$

en remplaçant la suite infinie par sa valeur $\frac{\pi^2}{6}$.

Si dans le second membre de l'équation [10] on remplace le coefficient k par une quantité *déterminée* que je désigne par z; alors la formule

$$[12] \ldots\ldots \quad \varphi = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\infty e^{-\xi z} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dx' f_1(x') \cos.(\xi x' - \xi x)$$

représente la valeur réelle de la somme

$$[13] \ldots\ldots \quad \varphi = \frac{1}{2} f_1(x + z.\sqrt{-1}) + \frac{1}{2} f_1(x - z.\sqrt{-1}) \; ;$$

pourvu que la fonction φ des deux variables x et z soit assujettie à la condition de donner $\varphi = 0$, en y faisant $z = \infty$, quelle que soit la valeur de x. En effet, cette fonction donne identiquement

$$[14] \ldots\ldots \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0 \; .$$

Or il est clair, que le second membre de l'équation [12] satisfait à cette équation, et à la condition d'avoir toujours une quantité réelle pour la valeur du second membre de l'équation [13], puisque nous supposons *réelles* et *finies* toutes les valeurs de $f_1(x')$ comprises entre les limites $= \infty$ de x'. En outre, si l'on observe, qu'en intégrant par rapport à ξ, l'on a;

$$[15] \ldots\ldots \quad \int_0^\infty e^{-\xi z} d\xi \cos.(\xi x' - \xi x) = \frac{z}{z^2 + (x' - x)^2} \; ;$$

et par conséquent

$$[16] \ldots\ldots \quad \varphi = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z f_1(x') dx'}{z^2 + (x' - x)^2} \; ,$$

on en conclura, que la condition $\varphi = 0$, lorsque $z = \infty$ est satisfaite quelle que soit la valeur de x.

Dans les cas où cette dernière condition n'a pas lieu, on pourrait croire qu'il suffit de remplacer le second membre de l'équation [12] par

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\infty \left(e^{-\xi z} + e^{\xi z} \right) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dx' f_1(x') \cos.(\xi x' - \xi x) \; ,$$

pour avoir la valeur réelle du double du second membre de l'équation [13]. Mais une telle transformation n'est pas admissible en général. Et sur cela, il est essentiel d'avoir présentes à l'esprit les explications publiées en 1823 par Poisson dans le 19.ème Cahier (pages 457-463) du Journal de l'École Polytechnique, afin d'éviter les méprises auxquelles on pourrait être entraîné en admettant, sans restriction, la proposition énoncée par Fourier à la page 559 de sa *Théorie de la Chaleur* publiée en 1822. En supposant que le second membre de l'équation [13] est assujetti aux conditions ;

$$[17]\ldots\ldots\quad \begin{cases} \frac{1}{2}.f_1(z.\sqrt{-1})+\frac{1}{2}.f_1(-z.\sqrt{-1})=0\ ; \\ \frac{1}{2}.f_1(a+z.\sqrt{-1})+\frac{1}{2}.f_1(a-z.\sqrt{-1})=0\ , \end{cases}$$

quelle que soit la valeur de z, celle de la quantité constante a étant donnée, on obtiendra la valeur de φ par la suite infinie et convergente

$$[18]\ldots\quad \varphi=\frac{2}{a}.\sum_1^\infty.\left[\int_0^a dx' f_1(x')\sin.\left(\frac{n\pi x'}{a}\right)\right]e^{-\frac{n\pi z}{a}}\sin.\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\ ,$$

qui devient celle donnée la première fois par Lagrange en y faisant $z=0$. On peut présenter ce résultat sous forme finie, quelle que soit la valeur de z, à l'aide de la formule connue ;

$$\sum_1^\infty.4p^n.\sin.n\varphi.\sin.n\theta=$$
$$\frac{1-p^2}{1-2p\cos.(\varphi-\theta)+p^2}-\frac{1-p^2}{1-2p\cos.(\varphi+\theta)+p^2}\ .$$

§ IV.

Après cette digression, nécessaire pour répandre une plus grande lumière sur la question que je traite, je reprends la continuation des §§ I et II. On conçoit que pour une valeur donnée de x, du côté des abscisses positives (pour fixer les idées), le mouvement et la condensation de la tranche fluide, exprimés par les équations [7] et [8] ne pourra avoir

lieu, qu'autant que l'on ait

$$x-at<\varepsilon\ ,\qquad x-at-at'<-\varepsilon\ ,$$

puisque, pour des valeurs plus grandes, l'on a nécessairement $u=0$, $a^2s=0$. De sorte que le mouvement de la tranche fluide, placée à la distance x du centre de l'ébranlement primitif, commencera à l'instant où l'on a $x-at=\varepsilon$, et finira à l'instant où l'on a $x-at-at'=-\varepsilon$, ou bien $\varepsilon-at'=-\varepsilon$. La durée t' du mouvement de toute la tranche fluide ayant une longueur égale à 2ε; tranche, communément nommée *fibre sonore*, sera donc

$$[19]\ \ldots\ldots\ldots\qquad t'=\frac{2\varepsilon}{a}\ .$$

Ainsi, en partageant l'axe du tube cylindrique rempli d'air en parties égales à 2ε, représentées par

etc. 2ε ; 2ε ; 2ε ; 2ε ; 2ε ; 2ε ; 2ε ; etc. ;

etc. 3 ; 2 ; 1 ; 0 ; -1 ; -2 ; -3 ; etc. ;

ces parties sont celles, qui deux à deux (n et $-n$) à égale distance du centre de l'ébranlement primitif, seront mises successivement en mouvement dans le même temps. La durée de ce mouvement sera pour chacune égale à $\frac{2\varepsilon}{a}$; et un repos absolu succédera à ce mouvement, conformément aux équations $u=0$, $s=0$.

La formule [9] exprime une propriété remarquable de ce mouvement: car, pendant son existence, le second membre de cette équation est absolument nul, et l'on a entre les vitesses u et les condensations simultanées l'équation

$$[20]\ \ldots\ldots\ldots\qquad u+as=0\ ,$$

pour toute fibre sonore, à l'exception de la première, née en vertu de l'ébranlement primitif. Pour celle-ci l'on a

$$[21]\ \ldots\ldots\ldots\quad u+as=f_1(x)+\frac{1}{a}F_1(x)\ ,$$

puisque, pour chacun de ses points, les valeurs des fonctions arbitraires $f_1(x)$, $F_1(x)$ sont censées, en général, différentes de zéro.

Telle est la véritable explication de ce mouvement de *propagation*; telle est la véritable manière de démontrer l'impossibilité d'un mouvement simultané pour toute la longueur de la colonne aérienne indéfiniment prolongée. La quantité ou ligne a est évidemment, par sa nature, la mesure de cette vitesse de propagation. La production des fibres sonores, nommées *pulsus* par NEWTON a été saisie par lui comme un fait conforme à l'expérience; mais sa déduction théorique du simple fait d'un ébranlement primitif ne pouvait pas être une conséquence de sa théorie, bornée aux Propositions XLVII et XLIX du second Livre des Principes.

L'équation [13], remarquée par EULER, offre l'explication du phénomène, par lequel les fibres sonores *secondaires*, qui naissent de la primitive, se propagent dans *un seul sens*, et non dans les deux sens opposés. Pour empêcher cette impossibilité, il faudrait que l'équation

$$[22] \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad f_1(x) + \frac{1}{a} F_1(x) = 0 \ ;$$

fût satisfaite par l'ébranlement primitif.

§ V.

Il y a un cas particulier, où les équations [7] et [8] ne peuvent pas être satisfaites par la transformation exprimée à l'aide de la formule [10]. C'est celui où pour une valeur donnée, X, de x l'on aurait

$$f_1(X) = A \ ;$$

A étant quantité constante donnée, et

$$f_1(x) = 0$$

pour toute autre valeur de x différente de X. Dans ce cas il faut remplacer la constante A par une fonction convenable de x; ce qui est possible en supposant *finie* (et non infinie) la longueur du tuyau cylindrique, au milieu duquel l'on aurait communiqué à la tranche ω la vitesse A à toutes ses molécules. Soit $2L$ la longueur de ce tuyau, et π à l'ordinaire le rapport de la circonférence au diamètre. Si l'on fait

$$[23] \ldots\ldots\ldots \qquad f_1(x) =$$

$$\frac{2A}{n+1}\left\{\begin{array}{l}\sin.\left(\frac{\pi X}{2L}\right)\sin.\left(\frac{\pi x}{2L}\right)+\sin.\left(\frac{2\pi X}{2L}\right)\sin.\left(\frac{2\pi x}{2L}\right)\\ +\sin.\left(\frac{3\pi X}{2L}\right)\sin.\left(\frac{3\pi x}{2L}\right)+\ldots\ldots\ldots+\sin.\left(\frac{n\pi X}{2L}\right)\sin.\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)\end{array}\right|$$

ce polynome satisfaira à la condition de donner $f_1(X)=A$, et $f_1(x)=0$. En effet, si l'on fait

$$Z=\frac{\pi(X-x)}{2L}, \qquad Z'=\frac{\pi(X+x)}{2L};$$

$$[24]\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} Q=1+\cos.Z+\cos.2Z+\cos.3Z+\ldots\ldots+\cos.nZ;\\ Q'=1+\cos.Z'+\cos.2Z'+\cos.3Z'+\ldots\ldots+\cos.nZ';\end{array}\right.$$

l'équation [23] deviendra équivalente à celle-ci;

$$[25] \ldots\ldots\ldots \qquad f_1(x)=\frac{A}{n+1}(Q-Q').$$

Or on sait, d'après une formule connue, qu'en sommant les termes qui composent le second membre des équations [24], l'on a

$$[26] \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} Q=\frac{1}{2}+\frac{\sin.(nZ+\frac{1}{2}Z)}{2\sin.\frac{1}{2}Z};\\ Q'=\frac{1}{2}+\frac{\sin.(nZ'+\frac{1}{2}Z')}{2\sin.\frac{1}{2}Z'};\end{array}\right.$$

et par conséquent

$$[27] \ldots \quad Q-Q'=\frac{\sin.(nZ+\frac{1}{2}Z)\sin.\frac{1}{2}Z'-\sin.(nZ'+\frac{1}{2}Z')\sin.\frac{1}{2}Z}{\cos.(\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}Z')-\cos.(\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}Z')}.$$

Donc en remplaçant Z et Z' par leurs valeurs, et faisant, pour plus de simplicité,

$$[28] \ldots\ldots\ldots \qquad Q-Q'=\frac{N}{D},$$

l'on obtiendra

$$[29]\ldots\begin{cases} N= \cos.\left\{\frac{\pi x}{2L}-\frac{g\pi(X+x)}{2L}\right\}-\cos.\left\{\frac{\pi X}{2L}-\frac{g\pi(X+x)}{2L}\right\} \\ \quad +\cos.\left\{\frac{\pi X}{2L}-\frac{g\pi(X-x)}{2L}\right\}-\cos.\left\{\frac{\pi x}{2L}+\frac{g\pi(X-x)}{2L}\right\}; \\ D= \cos.\left(\frac{\pi x}{2L}\right)-\cos.\left(\frac{\pi X}{2L}\right); \end{cases}$$

où $g=n+1$. Maintenant, si nous supposons *rationnels* les deux rapports $\frac{X}{2L}$, $\frac{x}{2L}$, rien n'empêche de faire

$$\frac{X}{2L}=\frac{m'}{g}=\frac{m'}{n+1}\ ; \qquad \frac{x}{2L}=\frac{m}{g}=\frac{m}{n+1}\ ;$$

et de considérer m' et m comme deux nombres entiers. Alors l'expression précédente de N devient

$$N= \cos.\left(\frac{\pi m}{n+1}-\pi(m+m')\right)-\cos.\left(\frac{\pi m'}{n+1}-\pi(m+m')\right)$$

$$+\cos.\left(\frac{\pi m'}{n+1}-\pi(m'-m)\right)-\cos.\left(\frac{\pi m}{n+1}+\pi(m'-m)\right);$$

c'est-à-dire

$$N=\left\{\cos.\left(\frac{\pi m}{n+1}\right)-\cos.\left(\frac{\pi m'}{n+1}\right)\right\}\left\{\cos.\pi(m'+m)-\cos.\pi(m'-m)\right\};$$

$$N=2\left\{\cos.\left(\frac{\pi m'}{n+1}\right)-\cos.\left(\frac{\pi m}{n+1}\right)\right\}\sin.(\pi m).\sin.(\pi m')\ .$$

Or m et m' étant des nombres entiers, il est clair que cette dernière équation donne $N=0$. Et comme le dénominateur

$$D=\cos.\left(\frac{\pi m}{n+1}\right)-\cos.\left(\frac{\pi m'}{n+1}\right),$$

on doit accorder que l'équation [23] donnera effectivement $f_1(x)=0$ pour toute valeur de x différente de X. Mais dans le cas de $m'=m$ qui répond à $X=x$, l'on a

$$Z=0\ , \qquad Z'=\frac{2\pi X}{2L}=\frac{2\pi m'}{n+1}\ .$$

Alors, la première des équations [24] donne $Q=n+1$, et la seconde des équations [26] donne

$$Q' = \frac{1}{2} + \frac{\sin.\left(\frac{\pi m'}{n+1}\right)\left(2(n+1)-1\right)}{2\sin.\frac{\pi m'}{n+1}} ;$$

$$Q' = \frac{1}{2} + \frac{\sin.\left(2\pi m' - \frac{\pi m'}{n+1}\right)}{2\sin.\frac{\pi m'}{n+1}} ;$$

$$Q' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos.(2\pi m') = 0 .$$

Il suit de là et de l'équation [25], que dans le cas de $x = X$, l'on a

$$f_1(X) = \frac{A}{n+1}(n+1) = A .$$

Donc, en supposant $F_1(x) = 0$ (pour plus de simplicité), les formules [7] et [8] donneront pour la solution de ce cas particulier de la théorie du son;

[30] ..... $u =$

$$\frac{A}{n+1}\left\{\begin{array}{l}\sin.\left(\frac{\pi X}{2L}\right)\sin.\frac{\pi(x+at)}{2L} + \sin.\left(\frac{2\pi X}{2L}\right)\sin.\frac{2\pi(x+at)}{2L} \\ + \ldots\ldots\ldots + \sin.\left(\frac{n\pi X}{2L}\right)\sin.\frac{n\pi(x+at)}{2L}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{A}{n+1}\left\{\begin{array}{l}\sin.\left(\frac{\pi X}{2L}\right)\sin.\frac{\pi(x-at)}{2L} + \sin.\left(\frac{2\pi X}{2L}\right)\sin.\frac{2\pi(x-at)}{2L} \\ + \ldots\ldots\ldots + \sin.\left(\frac{n\pi X}{2L}\right)\sin.\frac{n\pi(x-at)}{2L}\end{array}\right\} ;$$

[31] ..... $as =$

$$\frac{A}{n+1}\left\{\begin{array}{l}\sin.\left(\frac{\pi X}{2L}\right)\sin.\frac{\pi(x+at)}{2L} + \sin.\left(\frac{2\pi X}{2L}\right)\sin.\frac{2\pi(x+at)}{2L} \\ + \ldots\ldots\ldots + \sin.\left(\frac{2\pi X}{2L}\right)\sin.\frac{n\pi(x+at)}{2L}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{A}{n+1}\left\{\begin{array}{l}\sin.\left(\frac{\pi X}{2L}\right)\sin.\frac{\pi(x-at)}{2L} + \sin.\left(\frac{2\pi X}{2L}\right)\sin.\frac{2\pi(x-at)}{2L} \\ + \ldots\ldots\ldots + \sin.\left(\frac{n\pi X}{2L}\right)\sin.\frac{n\pi(x-at)}{2L}\end{array}\right\} ;$$

Pour toute valeur positive de x, la première partie de ces expressions de u et as sera nulle; et la seconde partie deviendra égale à A pour la vitesse u, et à $-A$ pour as, au moment où l'on aura $x-at=X$. Ainsi le mouvement se propage uniformément, mais *sans la formation* des fibres ou ondes sonores, puisque pour chaque tranche de la colonne aérienne le mouvement est *instantané*, et non vibratoire comme celui considéré dans le § IV. Mais le cas particulier que nous venons d'analyser, n'est pas celui qui a lieu dans l'état où l'on peut faire l'expérience; et on doit le regarder seulement comme possible mathématiquement parlant. Lagrange n'avait pas fait cette importante distinction dans son 1.er Mémoire, où il supposait qu'une *seule* particule de la ligne aérienne avait reçu l'ébranlement primitif, et en s'appuyant sur la formule [30], qu'il croyait applicable même dans le cas où la longueur de la ligne aérienne est infinie, il en concluait que le son « ne se propage » pas par une espèce d'ondulation et que cette hypothèse de Newton » est tout-à-fait insoutenable » (Lisez la page 89 du 1.er Volume des *Miscellanea Taurinensia*). Mais dans son second Mémoire, publié dans le second Volume de la même Collection, Lagrange a reconnu la nécessité de la distinction dont je viens de parler, et il en a clairement défini le caractère (Lisez la page 49).

Rien ne limite la grandeur du nombre entier u dans la formule [30]: mais si on voulait l'appliquer au cas de $u=\infty$, la solution serait fautive. Cette assertion ne peut pas être démontrée en peu de mots: mais on en sentira toute la force et la vérité en lisant les pages 404-409 du 19.ème Cahier du Journal de l'École Polytechnique publié en 1823. Et si on désire des explications sur la formule [10], qui constitue un des points fondamentaux de la théorie du son, il est essentiel d'avoir sans cesse présentes à l'esprit les réflexions exposées à son égard par Poisson dans les pages 205-211 de sa *Théorie Mathématique de la Chaleur* publiée en 1835.

§ VI.

Reprenons la considération des fibres sonores définies dans le § IV, et proposons nous de déterminer les excursions des molécules qui les composent.

La formule [7] donne, du côté des abscisses positives,

$$[32] \ldots\ldots\ldots \quad u = \frac{1}{2} f_1(x-at) - \frac{1}{2a} F_1(x-at) \ ;$$

pour expression de la vitesse avec laquelle le mouvement a lieu à chaque instant. Donc, en désignant par λ le double de l'excursion totale, composée de l'*allée* et *du retour* de la molécule à son point de départ, il est clair que nous avons

$$[33] \ldots \quad \lambda = \int_t^{t+t'} u\,dt = \frac{1}{2} \cdot \int_t^{t+t'} dt f_1(x-at) - \frac{1}{2a} \cdot \int_t^{t+t'} dt F_1(x-at) \ ,$$

ou bien

$$\lambda = -\frac{1}{2a} \cdot \int_t^{t+t'} f_1(x-at)\,d(x-at) + \frac{1}{2a^2} \cdot \int_t^{t+t'} F_1(x-at)\,d(x-at) \ .$$

Il suit de là, que si l'on fait

$$[34] \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} f_2(x) = \int dx f_1(x) \ , \\ F_2(x) = \int dx F_1(x) \ , \end{cases}$$

l'on aura

$$\lambda = -\frac{2}{2a} \left\{ f_2(-\varepsilon) - f_2(\varepsilon) \right\} + \frac{2}{2a^2} \left\{ F_2(-\varepsilon) - F_2(\varepsilon) \right\} \ ;$$

ce qui revient à dire, que

$$[35] \ldots\ldots\ldots \quad \lambda = \frac{1}{a} \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx f_1(x) - \frac{1}{a^2} \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx F_1(x) \ .$$

Chaque valeur de $f_1(x)$ est, par sa nature, une fraction fort petite de la vitesse de propagation a: et chaque valeur de $\frac{1}{a^2} F_1(x)$ est, par sa nature, un nombre absolu plus petit que l'unité, puisque

$$D \left\{ 1 - \frac{1}{a^2} F_1(x) \right\}$$

représente la densité du fluide en un point quelconque de l'ébranlement primitif, par hypothèse, compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$. Donc, en supposant

que ka soit la plus grande valeur de $f_1(x)$, et que k' soit la plus grande valeur de $\frac{1}{a^2}F_1(x)$, abstraction faite du signe, nous aurons

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx f_1(x) < ka \cdot 2\varepsilon \; ; \qquad \frac{1}{a^2} \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx F_1(x) < k' \cdot 2\varepsilon \; .$$

Ainsi, en prenant toujours positivement les deux parties qui composent le second membre de l'équation [35], on peut affirmer que l'on a

$$\lambda < k \cdot 2\varepsilon + k' \cdot 2\varepsilon \; ;$$

c'est-à-dire

[36] ..... $$\frac{\lambda}{2} < k\varepsilon + k'\varepsilon \; .$$

On voit par là, que la longueur $\frac{\lambda}{2}$ de l'excursion sera toujours une fort petite fraction de la longueur 2ε de l'ébranlement primitif; ou, en d'autres termes, que l'excursion de chaque molécule de la fibre sonore sera fort petite en comparaison de sa longueur 2ε. Le temps requis pour achever l'excursion $\frac{\lambda}{2}$ est (en le nommant t'')

[37] ..... $$t'' = \frac{\varepsilon}{a} \; ,$$

conformément à la formule [12].

§ VII.

Pour considérer toutes les phases de ce mouvement, remarquons que, si l'on fait, en général

[38] ..... $$w = \int u dt \; ,$$

on en tire

[39] ..... $$\frac{dw}{dx} = \int \frac{du}{dx} dt = \int \frac{ds}{dt} dt = s \; .$$

Donc en vertu des équations [1], l'on a

[40] ..... $$\frac{d^2w}{dt^2} = a^2 \frac{d^2w}{dx^2} = a^2 \frac{ds}{dx} \; .$$

On conçoit d'après cela que, en remplaçant les équations [1] par les équations [38], [39], [40] on doit prendre

$$[41] \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{dw}{dt} = f_1(x) , \\ \dfrac{dw}{dx} = \dfrac{1}{a^2} F_1(x) , \end{cases}$$

pour les valeurs initiales de $\dfrac{dw}{dt}$ et $\dfrac{dw}{dx}$. Mais l'équation [7] donne

$$w = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \int dt\, f_1(x+at) + \int dt\, f_1(x-at) \right\} + \frac{1}{2a} \cdot \left\{ \int dt\, F_1(x+at) - \int dt\, F_1(x-at) \right\} ;$$

donc, en vertu des équations [34] on peut établir l'équation

$$[42] \ldots \quad w = \frac{1}{2a} \left\{ f_2(x+at) - f_2(x-at) \right\} + \frac{1}{2a^2} \left\{ F_2(x+at) + F_2(x-at) \right\} ,$$

qui est effectivement l'intégrale complète de l'équation [40] assujettie à remplir les conditions initiales.

Ainsi, l'espace w parcouru depuis le commencement de son mouvement jusqu'à l'instant t par toute molécule d'air, placée du côté des abscisses positives, appartenante à une fibre sonore est

$$[43] \ldots\ldots \quad w = \frac{1}{2a^2} F_2(x-at) - \frac{1}{2a} f_2(x-at) ;$$

et la vitesse u qu'elle a, au même instant, est

$$[44] \ldots\ldots \quad u = -\frac{1}{2a} F_1(x-at) + \frac{1}{2} f_1(x-at) .$$

§ VIII.

Soit w' la valeur de w correspondante à $x-h$: d'après l'équation [42], nous avons

$$[45] \ldots\ldots \quad w' = \frac{1}{2a}\{f_2(x-h+at)-f_2(x-h-at)\}$$
$$+\frac{1}{2a^2}\{F_2(x-h+at)+F_2(x-h-at)\}\ .$$

En nommant w'' la valeur de w correspondante à $x+h$, la même formule [42] donne

$$[46] \ldots\ldots \quad w'' = \frac{1}{2a}\{f_2(x+h+at)-f_2(x+h-at)\}$$
$$+\frac{1}{2a^2}\{F_2(x+h+at)+F_2(x+h-at)\}\ .$$

Il suit de là que

$$[47] \ldots\ldots \quad w'+w'' = \frac{1}{2a}\left\{\begin{array}{l} f_2(x-h+at)+f_2(x+h+at) \\ -f_2(x-h-at)-f_2(x+h-at)\end{array}\right\}$$
$$+\frac{1}{2a^2}\left\{\begin{array}{l} F_2(x-h+at)+F_2(x+h+at) \\ +F_2(x-h-at)+F_2(x+h-at)\end{array}\right\}\ .$$

En ajoutant la valeur de $-2w$, conformément à l'équation [42], nous aurons

$$[48] \ldots\ w'+w''-2w = \frac{1}{2a}\left\{\begin{array}{l} f_2(x-h+at)+f_2(x+h+at) \\ -2f_2(x+at)-f_2(x-h-at) \\ -f_2(x+h-at)+2f_2(x-at)\end{array}\right\}$$
$$+\frac{1}{2a^2}\left\{\begin{array}{l} F_2(x-h+at)+F_2(x+h+at) \\ -2F_2(x+at)+F_2(x-h-at) \\ +F_2(x+h-at)-2F_2(x-at)\end{array}\right\}\ .$$

Or il est évident que, en développant le second membre suivant les puissances de h, et négligeant le cube de h, l'on a, en divisant les deux membres par h^2;

$$[49] \ldots\ \frac{(w'-w)-(w-w'')}{h^2} = \frac{1}{2a}\{f_1'(x+at)-f_1'(x-at)\}$$
$$+\frac{1}{2a^2}\{F_1'(x+at)+F_1'(x-at)\}\ ;$$

où,

$$f_1'(x)=\frac{d.f_1(x)}{dx}\ ; \qquad F_1'(x)=\frac{d.F_1(x)}{dx}\ .$$

Mais la même équation [42] par une double différentiation relative à x donne

$$[50]\ \ldots\ldots\quad \frac{d^2w}{dx^2}=\frac{1}{2a}\Big\{f_1'(x+at)-f_1'(x-at)\Big\}$$

$$+\frac{1}{2a^2}\Big\{F_1'(x+at)+F_1'(x-at)\Big\}\ .$$

Donc nous avons l'équation

$$[51]\ \ldots\ldots\quad \frac{(w'-w)-(w-w'')}{h^2}=\frac{d^2w}{dx^2}\ .$$

Il suit de là que l'équation [40] peut être écrite ainsi; savoir

$$[52]\ \ldots\ldots\quad \frac{d^2w}{dt^2}=a^2\left\{\frac{(w'-w)-(w-w'')}{h^2}\right\}\ .$$

Maintenant observons, que cette équation revient à dire que

$$[53]\ \ldots\ldots\quad \frac{d^2w}{dt^2}=a^2\left\{\frac{1}{h+w-w'}-\frac{1}{h+w''-w}\right\}\ .$$

En effet, cette équation donne

$$\frac{d^2w}{dt^2}=\frac{a^2\Big\{(w'-w)-(w-w'')\Big\}}{h^2\left\{1+\dfrac{w-w'}{h}\right\}\left\{1+\dfrac{w''-w}{h}\right\}}\ ;$$

mais nous avons

$$w'=w-h\frac{dw}{dx}+\text{etc.}\ : \qquad w''=w+h\frac{dw}{dx}+\text{etc.}\ :$$

partant nous tirons de là

$$\frac{d^2w}{dt^2}=\frac{a^2\Big\{(w'-w)-(w-w'')\Big\}}{h^2\left(1+\dfrac{dw}{dx}\right)^2}\ .$$

Et comme la quantité $\frac{dw}{dx}$ est, par sa nature, fort petite en comparaison de l'unité, on peut réduire à l'unité le facteur $\left(1+\frac{dw}{dx}\right)^2$, ce qui

fait coïncider cette dernière équation avec l'équation [52], et démontre la vérité de l'équation [53]. Or l'équation [53], qui n'est qu'une transformation de notre équation aux différences partielles [40], est précisément celle, que NEWTON formait par le raisonnement exposé dans sa Proposition XLVII, en partant du principe, que la force élastique est en raison inverse de l'intervalle qui sépare les tranches (ou les molécules) de la fibre sonore, et que la force motrice doit être estimée par la différence

$$\frac{a^2}{h+w-w'}-\frac{a^2}{h+w''-w}$$

des forces qui agissent des deux côtés opposés. Ici h représente l'intervalle constant des molécules d'air dans l'état de repos; et $h+w-w'$; $h+w''-w$ sont les intervalles qui ont lieu à droite et à gauche de la molécule d'air dont on considère le mouvement; c'est-à-dire, l'espace parcouru, exprimé par w. L'équation [53], étant ainsi formée par une propriété physique; NEWTON voyait son équivalence avec l'équation [52], et même l'équivalence du second membre avec le produit a^2 par la fluxion seconde $\frac{d^2w}{dx^2}$ de l'espace parcouru.

§ VIII.

L'idée qu'une telle équation avait une infinité de solutions, *toutes* comprises dans la formule [42], ne pouvait pas être saisie par NEWTON. Mais il sentait, comme par instinct, que dans cette variabilité de solutions, due aux variabilités des circonstances initiales, il y avait un *phénomène constant;* celui de la vitesse de la propagation du mouvement. Un seul cas particulier devait suffire pour déterminer cette vitesse. D'après cela NEWTON voyait que les équations [51], [52], et par conséquent l'équation [40], étaient satisfaites en posant

$$[54] \ldots\ldots\ldots \qquad w=\frac{\lambda}{4}+\frac{\lambda}{4}\cos.\frac{\pi}{\varepsilon}(x-at)\ ,$$

et il en concluait qu'en faisant $x-at=\pm\varepsilon$ on avait $w=0$; et $w=\frac{\lambda}{2}$, en faisant $x-at=2\varepsilon$. De sorte que la molécule revenait au point de départ après une vibration, où l'espace parcouru était $2.\frac{\lambda}{2}=\lambda$.

L'équation [54] donne

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\lambda}{4}\cdot\frac{\pi a}{\varepsilon}\,\text{sin.}\,\frac{\pi}{\varepsilon}(x-at)\ ;$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{\lambda}{4}\cdot\frac{\pi}{\varepsilon}\,\text{sin.}\,\frac{\pi}{\varepsilon}(x-at)\ :$$

donc, en faisant $t=0$, on aura, conformément aux équations [41];

$$[55]\ \ldots\ \left\{ f_1(x)=\frac{\lambda}{4}\cdot\frac{\pi}{\varepsilon}a\,.\,\text{sin.}\,\frac{\pi}{\varepsilon}x\ ;\quad F_1(x)=-\frac{\lambda}{4}\cdot\frac{\pi}{\varepsilon}a^2.\,\text{sin.}\,\frac{\pi}{\varepsilon}x\right\}\ ;$$

pour les valeurs initiales de $f_1(x)$, $F_1(x)$. Or il est évident que ces expressions ne sauraient donner

$$f_1(x+at)=0\ ,\qquad F_1(x+at)=0\ ,$$

pour toute valeur positive de x, depuis $x>\varepsilon$ jusqu'à $x=\infty$. Ainsi les conditions initiales d'un ébranlement primitif, limité à la longueur 2ε, comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$, ne peut être remplie par les fonctions *continues* de x exprimées par le second membre des équations [55]. Mais à l'aide de la formule générale [11] on peut faire

$$[56]\ldots\left\{ f_1(x)=\frac{\lambda a}{4\varepsilon}\cdot\int_0^{\infty}d\xi\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}dx'\,\text{sin.}\left(\frac{\pi x'}{\varepsilon}\right)\cos.(\xi x'-\xi x)\ ;\right.$$

$$\left. F_1(x)=-af_1(x)\ ;\right.$$

et par là faire disparaître l'impossibilité inhérente aux équations [55].

D'après les équations [34], nous avons donc

$$[57]\ldots\left\{ f_2(x)=-\frac{\lambda a}{4\varepsilon}\cdot\int_0^{\infty}\frac{d\xi}{\xi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}dx'\,\text{sin.}\left(\frac{\pi x'}{\varepsilon}\right)\text{sin.}\,(\xi x'-\xi x)\ ;\right.$$

$$\left. F_2(x)=-af_2(x)\ ;\right.$$

et à l'aide de cette transformation, rien n'empêche de former les seconds membres des équations [7], [8], [42], et de légitimer l'hypothèse, que, au-delà des limites $\pm\varepsilon$, les valeurs de $f_1(x)$, $F_1(x)$ sont nulles tandis qu'entre ces mêmes limites leurs valeurs sont conformes aux équations [55].

Mais une telle analyse était impossible du temps de NEWTON, et la solution indirecte du cas particulier qu'il considérait devait être illusoire, et insuffisante pour *démontrer la production successive* des pulsions ou ondes sonores. C'est de quoi nous allons donner une démonstration claire, en exposant avec le langage algébrique les différentes parties du raisonnement de NEWTON.

§ IX.

Imaginons un point matériel parcourant l'espace X sous l'action d'une force accélératrice exprimée par

$$\frac{a^2\pi^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{\lambda}{4}-X\right) :$$

l'on aura pour l'équation différentielle de ce mouvement;

$$[58] \ldots\ldots \qquad \frac{d^2X}{dt^2}=\frac{a^2\pi^2}{\varepsilon^2}\left(\frac{\lambda}{4}-X\right) .$$

Son intégrale est

$$X=\frac{\lambda}{4}+N\cos.\left(\frac{a\pi t}{\varepsilon}\right)+N'\sin.\left(\frac{a\pi t}{\varepsilon}\right) ,$$

N et N' étant deux constantes arbitraires. Pour avoir $X=0$ lorsque $t=0$, il faut prendre $N=-\frac{\lambda}{4}$. Et si l'on veut que la vitesse $\frac{dX}{dt}$ soit nulle, à l'instant où $t=0$, et à l'instant où $t=\frac{\varepsilon}{a}$, il faudra prendre $N'=0$. Cela posé nous avons

$$[59] \ldots\ldots \qquad X=\frac{\lambda}{4}-\frac{\lambda}{4}.\cos.\left(\frac{\pi a t}{\varepsilon}\right) ,$$

pour expression de l'espace parcouru en fonction du temps t, et

$$[60] \ldots\ldots \qquad \frac{dX}{dt}=\frac{\lambda}{4}.\frac{a\pi}{\varepsilon}.\sin.\left(\frac{\pi a t}{\varepsilon}\right) ;$$

pour l'expression de la vitesse correspondante.

On voit par l'équation [59], que l'espace parcouru dans le temps $t=\frac{2\varepsilon}{a}$ par le point mobile dans son allée et son retour au point de départ est égal à λ. Mais ce mouvement ne cesse pas, comme celui des

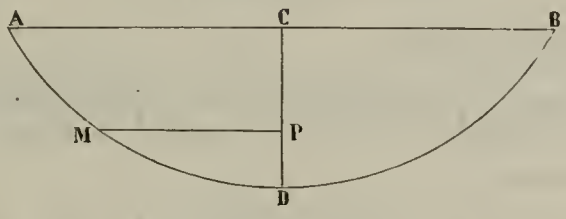
fibres sonores; il est oscillatoire sur la même ligne droite. En sommant les espaces ainsi parcourus, on aurait un espace égal à celui qui, dans le même temps, est devenu successivement mobile, en suivant la loi exprimée par l'équation [35] pour chacune de ses parties égales à 2ε. Mais cette similitude ne suffit pas pour établir une identité entre les deux mouvements régis par les équations [40] et [58]. Revenons à cette dernière équation. En y faisant

$$G = \frac{\pi^2 a^2 \lambda}{2\varepsilon^2},$$

elle devient

$$[61] \ldots\ldots \qquad \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{2G}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{4} - X\right).$$

Cela posé, considérons une cycloïde dont la hauteur soit égale à $\frac{\lambda}{2}$; c'est-à-dire une cycloïde ayant $\frac{\lambda}{2}$ pour diamètre du cercle générateur.



Soit $AMDB$ cette cycloïde renversée située dans un plan vertical. En plaçant un point matériel au point A, et le supposant soumis à une gravité verticale et constante égale à $\frac{G}{2}$; le mouvement de ce point sur la cycloïde sera réglé par l'équation

$$[62] \ldots\ldots \qquad \frac{d^2 S}{dt^2} = -\frac{G}{2\lambda} \cdot S \ ;$$

où $CD = \frac{\lambda}{2}$, et S représente un axe quelconque DM de la cycloïde, compté depuis le point plus bas, D. En intégrant cette équation de manière que l'on ait $AMD = S = \lambda$, lorsque $t = 0$, l'on a

$$[63] \ldots\ldots \qquad S = \lambda \cos.\left(t \cdot \sqrt{\frac{G}{2\lambda}}\right).$$

Donc ce point arrivera au point D, lorsque

$$t=\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{2\lambda}{G}}\ ;$$

de là, il remontera l'axe DB, et parviendra au point B à l'instant où

$$t=\pi\cdot\sqrt{\frac{2\lambda}{G}}=\frac{2\varepsilon}{a}\ .$$

Ainsi, ce temps est égal à celui de l'excursion totale λ de la molécule appartenante à une fibre aérienne.

En tirant l'ordonnée MP, et faisant $CP=X'$; et par conséquent $DP=\frac{\lambda}{2}-X'$, nous avons par la propriété de la rectification de la cycloïde;

[64] ..... $$S^2=2\lambda\left(\frac{\lambda}{2}-X'\right)\ ;$$

mais l'équation [63] donne

$$S^2=\lambda^2\cos.^2\left(t\cdot\sqrt{\frac{G}{2\lambda}}\right)=\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\cos.\left(2t\cdot\sqrt{\frac{G}{2\lambda}}\right)\ ;$$

partant nous avons

$$2\lambda\left(\frac{\lambda}{2}-X'\right)=\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^2}{2}\cos.\left(2t\cdot\sqrt{\frac{G}{2\lambda}}\right)\ ;$$

d'où l'on tire

[65] ... $$X'=\frac{\lambda}{4}-\frac{\lambda}{4}\cos.\left(2t\cdot\sqrt{\frac{G}{2\lambda}}\right)=\frac{\lambda}{4}-\frac{\lambda}{4}\cos.\left(\frac{\pi a t}{\varepsilon}\right)\ .$$

Cette valeur de X' coïncide avec la valeur de X, déterminée par l'équation [59]. De sorte qu'un point mobile (simultanément avec celui qui se meut sur la cycloïde) sur le diamètre CD, parviendra du point C au point D, et remontera du point D au même point C dans le temps $t=\frac{2\varepsilon}{a}$, égal à la durée du mouvement de la molécule aérienne. Mais l'équation [62], ainsi que l'équation [58], ne saurait exprimer un mouvement conforme à l'équation [40], quoique la durée $\frac{2\varepsilon}{a}$ de la vibration

totale (l'allée et le retour compris) soit la même dans les trois mouvements réglés par ces trois équations. Et comme les mouvements considérés par Newton dans les Propositions XLVII et XLIX du second Livre des Principes sont ceux des équations [58] et [62], on ne saurait accorder, que les deux lois principales; celle de la propagation uniforme du son *quelles que soient les circonstances initiales;* et celle de la production successive des fibres, ou ondes sonores, aient été démontrées par Lui d'une manière exempte de plusieurs objections fort graves. Newton *a supposé* que les *pulsus* ou fibres sonores se formaient successivement après un ébranlement primitif, communiqué seulement à une petite longueur 2ε de la colonne aérienne; et de plus il a supposé que, au lieu de son équation [53] (*qui est le point capital de son aperçu théorique*), il pouvait substituer l'équation [62]. Et cela, avec d'autant plus de raison, qu'il voyait dans la valeur du temps

$$t = 2\pi . \sqrt{\frac{2\lambda}{G}} = \frac{4\varepsilon}{a} = \frac{4\varepsilon}{\sqrt{gH}}$$

une vitesse de propagation, $\sqrt{gH}$, à-peu-près conforme à l'expérience.

Considérons un pendule dont la longueur soit L: l'équation de son mouvement, borné aux oscillations d'une petite amplitude est

$$[66] \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad L.\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta \ ;$$

d'où l'on tire en intégrant

$$[67] \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \theta = \beta \cos.\left(t.\sqrt{\frac{g}{L}}\right) .$$

Soit $\sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{a\pi}{\varepsilon}$, l'on aura $L = \frac{g\varepsilon^2}{a^2\pi^2} = \frac{\varepsilon^2}{\pi^2 H q}$. Le temps des oscillations isochrones de ce pendule est donc égal à $\frac{\varepsilon}{a}$: et $\frac{2\varepsilon}{a}$ est le temps d'une double oscillation qui comprend l'allée et le retour au point de départ. En faisant $\beta = \frac{\lambda}{4}$ l'on aura

$$[68] \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \theta = \frac{\lambda}{4} \cos.\left(\frac{\pi a t}{\varepsilon}\right) \ ;$$

ce qui revient à dire, que $2 \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$ est l'espace parcouru dans une oscillation, et λ l'espace parcouru dans une double oscillation. Mais tout cela démontre qu'il est impossible d'identifier le mouvement vibratoire déterminé par l'équation

$$[69] \ldots \ldots \ldots \qquad \frac{\varepsilon^2}{\pi^2 H \gamma} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta \ ,$$

avec le mouvement, à la fois vibratoire et ondulatoire déterminé par l'équation [40], qui, en y substituant pour a^2 sa valeur, devient

$$[70] \ldots \ldots \ldots \qquad \frac{1}{H\gamma} \cdot \frac{d^2 w}{dt^2} = g \frac{d^2 w}{dx^2} \ .$$

La théorie de Newton étant ainsi comparée avec la véritable, on conçoit qu'elle était fort éloignée d'offrir une explication satisfaisante du mécanisme par lequel un ébranlement primitif, d'une fort petite étendue, doit néanmoins faire naître dans les deux sens opposés d'une colonne cylindrique aérienne des fibres sonores, qui se propagent uniformément avec un mouvement vibratoire qui conserve la même intensité à toute distance.

NOTE

Sur le mouvement des ondes excitées dans un canal rectangulaire indéfini; la profondeur et la largeur du fluide étant fort petite et constante dans toute la longueur du canal.

Je suppose que l'on a sous les yeux le Mémoire de Poisson, publié dans le Tome 1.er de l'Académie des Sciences de Paris, duquel j'emprunte (page 89) la formule

$$(1) \ldots\ldots \quad \varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} da \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha . ZF(\alpha)(\cos. q\alpha + \cos. q'\alpha)$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int dt \int_0^{\infty} da \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha . Zf(\alpha)(\cos. q\alpha + \cos. q'\alpha) \ ;$$

après avoir fait, pour plus de simplicité,

$$(2) \ldots\ldots \quad Z = \frac{e^{a(h-z)} + e^{-a(h-z)}}{e^{ah} + e^{-ah}} \ ;$$

$$(3) \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} q = x + t.\sqrt{gh} - \alpha \ , \\ q' = x - t.\sqrt{gh} - \alpha \ . \end{array} \right.$$

On doit se rappeler, que z désigne la profondeur variable, et h la profondeur constante du liquide. Nous admettons l'équation $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, afin d'exprimer que le mouvement des molécules fluides est nul dans le sens de la largeur du canal. L'axe horizontal des x est placé dans le sens de sa longueur, au milieu du plan de niveau du fluide, et l'axe des z positives coïncide avec la direction de la pesanteur. L'origine des coordonnées x et z est placée à l'origine de l'intervalle ε, pris sur l'axe des x: cet intervalle comprend toutes les abscisses positives des deux courbes initiales

$$\varphi = F(x) \; ; \qquad \frac{d\varphi}{dt} = f(x) \; ,$$

censées données d'une manière continue ou discontinue. Par cette disposition, toutes les abscisses α, correspondantes aux valeurs différentes de zéro de $f(\alpha)$, $F(\alpha)$, sont *positives*, et l'on a $f(\alpha) = 0$, $F(\alpha) = 0$, relativement à toute valeur *négative* de α, et à toute valeur positive plus grande que ε.

Cela posé, si l'on fait

$$z = 0 \; ; \qquad \text{et} \qquad \int dx f(x) = f_1(x) \; ,$$

la formule (1), étant combinée avec le théorême de Fourier, donne immédiatement;

$$(4) \ldots\ldots \quad \varphi = \frac{1}{2.\sqrt{gh}} \left\{ f_1\left(x + t.\sqrt{gh}\right) - f_1\left(x - t.\sqrt{gh}\right) \right\}$$
$$+ \frac{1}{2} \left\{ F\left(x + t.\sqrt{gh}\right) + F\left(x - t.\sqrt{gh}\right) \right\} \; ;$$

d'où l'on tire

$$(5) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = gh \frac{d^2\varphi}{dx^2} \; ;$$

c'est-à-dire une équation aux différences partielles du second ordre tout-à-fait semblable à celle qui détermine le mouvement linéaire du son: proposition, que Lagrange a démontrée le premier (lisez la page 197 du Volume de l'Académie Royale des Sciences de Berlin pour l'année 1781). Il suit de là que, dans le cas d'une profondeur du liquide fort petite, les ondes, en apparence mobiles, se propagent à la surface avec une vitesse uniforme, indépendante de l'ébranlement primitif, exprimée par $\sqrt{gh}$, et dont la largeur constante est égale à celle de la ligne ε.

En tirant de l'équation (4) les valeurs de

$$\frac{d\varphi}{dt} = gz \; ; \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = g\frac{dz}{dt} = gv \; ; \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{dx}{dt} = u \; ,$$

on aura les vitesses horizontale et verticale u et v, ainsi que l'ordonnée verticale

$$z = \frac{1}{2g}\left\{f(x+t.\sqrt{gh})+f(x-t.\sqrt{gh})\right\}$$

$$+\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{h}{g}}\left\{F'(x+t.\sqrt{gh})-F'(x-t.\sqrt{gh})\right\}$$

de toute molécule superficielle du liquide à un instant quelconque du mouvement. Sur cela, l'analyse serait semblable à celle du son; il est inutile de la reproduire ici; mon but étant d'examiner les conséquences de la formule (1) relativement au mouvement des molécules fluides intérieures, pour lesquelles les valeurs de z ne sont pas égales à zero.

En premier lieu j'observe que, en développant la fonction Z de z, à l'aide de la série, donnée par LEGENDRE à la page 169 du second Volume des *Exercices de Calcul Intégral*, l'on a

$$(6)\ \ldots\ldots\quad Z=\frac{2\pi}{h}.\sum_{0}^{\infty}.\frac{(-1)^i\left(\frac{2i+1}{2h}\right)\cos.\left[(2i+1)\frac{\theta}{2}\right]}{a^2+\left[\pi\frac{(2i+1)}{2h}\right]^2},$$

où l'on fait

$$(7)\ \ldots\ldots\quad \theta=\frac{\pi(h-z)}{h}=\pi-\pi.\frac{z}{h}.$$

Le cas d'exception défini par LEGENDRE à la page 170 ne peut avoir lieu ici, puisque la valeur de z étant nécessairement positive, l'on a toujours $h-z<h$.

L'intégration relative à la variable a peut être exécutée à l'aide de la formule connue;

$$(8)\ \ldots\ldots\quad \int_{0}^{\infty}\frac{2m\,dw\cos.\beta w}{m^2+w^2}=\pi.e^{-\beta m},$$

en se rappelant que l'exposant $-\beta m$ doit être *nécessairement négatif*.

En appliquant cette formule au second membre de l'équation (1), et remplaçant les limites $\mp\infty$ par les limites $\alpha=0$, $\alpha=\varepsilon$, l'on aura

$$(9)\ldots\varphi=\frac{1}{2h}\int_{0}^{\varepsilon}d\alpha F(\alpha).\sum_{0}^{\infty}.(-1)^i\cos.\left[(2i+1).\frac{\theta}{2}\right]\left\{Q^{2i+1}+Q'^{2i+1}\right\}$$

$$+\frac{1}{2h}\int dt\int_{0}^{\varepsilon}d\alpha f(\alpha).\sum_{0}^{\infty}.(-1)^i\cos.\left[(2i+1).\frac{\theta}{2}\right]\left\{Q^{2i+1}+Q'^{2i+1}\right\},$$

où l'on a fait

$$(10)\ \ldots\ldots\ldots \left\{ Q = e^{-\frac{\pi q}{2h}}, \qquad Q' = e^{-\frac{\pi q'}{2h}} \right\}.$$

Donc en posant

$$(11)\ \ldots \begin{cases} R\,Q = Q\cos.\frac{\theta}{2} - Q^3\cos.\frac{3}{2}\theta + Q^5\cos.\frac{5}{2}\theta - \text{etc.}\ ; \\ R'Q' = Q'\cos.\frac{\theta}{2} - Q'^3\cos.\frac{3}{2}\theta + Q'^5\cos.\frac{5}{2}\theta - \text{etc.}\ , \end{cases}$$

il est clair que l'on a

$$(12)\ \ldots\ldots\ldots \quad \varsigma = \frac{1}{2h}\int_0^t d\alpha F(\alpha)(QR + Q'R')$$

$$+ \frac{1}{2h}\int dt \int_0^t d\alpha f(\alpha)(QR + Q'R')$$

Pour sommer les suites infinies désignées par R, R', remarquons que, les équations connues;

$$\frac{1 - X\cos.\psi}{1 - 2X\cos.\psi + X^2} = 1 + X\cos.\psi + X^2\cos.2\psi + X^3\cos.3\psi + \text{etc.}\ ;$$

$$\frac{1 + X\cos.\psi}{1 + 2X\cos.\psi + X^2} = 1 - X\cos.\psi + X^2\cos.2\psi - X^3\cos.3\psi + \text{etc.}\ ,$$

donnent

$$\frac{1 - X\cos.\psi}{1 - 2X\cos.\psi + X^2} - \frac{1 + X\cos.\psi}{1 + 2X\cos.\psi + X^2}$$

$$= 2X\cos.\psi + 2X^3\cos.3\psi + 2X^5\cos.5\psi + \text{etc.}$$

Cela posé, si l'on change X en $X.\sqrt{-1}$, on tirera de là la formule

$$(13)\ \ldots\ \frac{X\left\{1 + (X^2 - 1)\cos.\psi\right\}}{1 + 2X^2\cos.2\psi + X^4} = X\cos.\psi - X^3\cos.3\psi + X^5\cos.5\psi - \text{etc.}\ ,$$

qui démontre, que l'on a sous forme finie;

$$(14)\ \ldots\ldots\ldots\ \begin{cases} R = \dfrac{2+(Q^2-1)\cos.\dfrac{\theta}{2}}{1+2Q^2\cos.\theta+Q^4}\ ; \\ R' = \dfrac{2+(Q'^2-1)\cos.\dfrac{\theta}{2}}{1+2Q'^2\cos.\theta+Q'^4}\ ; \end{cases}$$

où

$$\cos.\theta = -\cos.\frac{\pi z}{h}\ , \qquad \cos.\frac{\theta}{2} = \sin.\frac{\pi z}{2h}\ .$$

Les équations (3) donnent

$$\alpha = (x+t.\sqrt{gh}) - q\ ; \qquad \alpha = (x-t.\sqrt{gh}) - q'\ ;$$

ou bien

$$\alpha = x' - q\ ; \qquad \alpha = x_1' - q'\ ,$$

en faisant

$$x' = x + t.\sqrt{gh}\ ; \qquad x_1' = x - t.\sqrt{gh}\ .$$

D'après la remarque faite, en écrivant la formule (8), on doit considérer comme positives les valeurs de q et q'. Et comme nous avons placé l'origine des x de manière que toutes les valeurs de α sont aussi positives, l'on prendra $d\alpha = -dq$; ou $d\alpha = -dq'$, suivant que l'intégration se rapporte à q ou à q'. D'après cela, l'équation (12) deviendra équivalente à celle-ci ;

$$(15)\ \ldots\quad \varphi = \frac{1}{2h}\int_{x'-\varepsilon}^{x'} dq\, F(x'-q)\,Q\,R + \frac{1}{2h}\int dt \int_{x'-\varepsilon}^{x'} dq\, f(x'-q)\,Q\,R$$

$$+ \frac{1}{2h}\int_{x_1'-\varepsilon}^{x_1'} dq'\, F(x_1'-q')\,Q'R' + \frac{1}{2h}\int dt \int_{x_1'-\varepsilon}^{x_1'} dq' f(x_1'-q')\,Q'R'$$

La variable z entre seulement dans R et R' : et comme l'équation (7) donne $\dfrac{d\theta}{dz} = -\dfrac{\pi}{h}$, il est clair que de cette expression de φ l'on tire

$$(16)\ldots\ \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{\pi}{2h^2}\int_{x'-\varepsilon}^{x'} dq\, F(x'-q)\,Q\,\frac{dR}{d\theta} - \frac{\pi}{2h^2}\int dt \int_{x'-\varepsilon}^{x'} dq\, f(x'-q)\,Q\,\frac{dR}{d\theta}$$

$$- \frac{\pi}{2h^2}\int_{x_1'-\varepsilon}^{x_1'} dq' F(x_1'-q')\,Q'\frac{dR'}{d\theta} - \frac{\pi}{2h^2}\int dt \int_{x_1'-\varepsilon}^{x_1'} dq' f(x_1'-q')\,Q'\frac{dR'}{d\theta}\ .$$

La même expression de φ, étant différentiée par rapport à x, donne la valeur de $\frac{d\varphi}{dx}$: pour l'écrire d'une manière plus simple nous ferons

$$\frac{dF}{dx}=F' \; ; \qquad \frac{df}{dx}=f' \; ;$$

alors l'on a ;

$$(17)... \frac{d\varphi}{dx}= \frac{1}{2h}\int_{x'-\varepsilon}^{x'} dq\, F'(x'-q)\,Q\,R+\frac{1}{2h}\int dt\int_{x'-\varepsilon}^{x'} dq\, f'(x'-q)\,Q\,R$$

$$+\frac{1}{2h}\int_{x_1'-\varepsilon}^{x_1'} dq' F'(x_1'-q')\,Q'R'+\frac{1}{2h}\int dt\int_{x_1'-\varepsilon}^{x_1'} dq' f'(x_1'-q')\,Q'R' \; ;$$

en observant que nous supposons

$$f(0)=0 \; , \qquad f(\varepsilon)=0 \; ;$$

$$F(0)=0 \; , \qquad F(\varepsilon)=0 \; ;$$

afin de rendre nuls les termes dus à la variation des limites x', $x'-\varepsilon$; x_1', $x_1'-\varepsilon$; qui sont elles-mêmes fonctions de x.

Ces formules démontrent, que le mouvement a lieu dans l'intérieur de la masse fluide avec une vitesse uniforme de propagation égale à $\sqrt{gh}$. Car, si nous considérons une tranche ω du liquide, perpendiculaire à la longueur du canal, placée du côté des x positives à une grande distance de l'origine, l'on aura

$$F\,(x'-q)=0 \; , \qquad f\,(x'-q)=0 \; ,$$

$$F'(x'-q)=0 \; , \qquad f'(x'-q)=0 \; ,$$

pour toute valeur de $x'-q$, comprise entre les limites $x'-\varepsilon$, x', puisque $x'=x+t.\sqrt{gh}$.

Mais entre les limites

$$x_1'-\varepsilon=x-t.\sqrt{gh}-\varepsilon \; ; \qquad x_1'=x-t.\sqrt{gh} \; ,$$

les valeurs de $F(x_1'-q')$, $f(x_1'-q')$, $F'(x_1'-q')$, $f'(x_1'-q')$ seront différentes de zéro, dès que la quantité $t.\sqrt{gh}$ s'approchera de la valeur de x. Alors, toutes les molécules comprises entre deux tranches ω,

séparées par un intervalle égal à ε, seront en mouvement avec une vitesse variable, de laquelle la composante verticale et horizontale est déterminée par les équations (16) et (17). La durée de ce mouvement oscillatoire, auquel succède un repos absolu, sera la même pour toutes les tranches et égale à $\frac{\varepsilon}{\sqrt{gh}}$.

Le même raisonnement a lieu pour les tranches du liquide placées du côté des x négatives; alors les quantités qui ne sont pas égales à zéro sont celles dépendantes de la variable $x'-q$.

Cela suffit pour démontrer qu'il y a une différence essentielle entre le mouvement qui a lieu, lorsque la profondeur du liquide est fort petite, et celui qui a lieu, lorsque la profondeur est, au contraire, très-grande. Dans ce dernier cas on démontre, que l'ébranlement primitif, mathématiquement parlant, se transmet instantanément à la masse totale du fluide.

Newton, dans sa Proposition XLVI du second Livre des Principes, ne faisait aucune distinction entre la profondeur grande ou petite du liquide; et ce qu'il y a d'approchant à la vérité dans son énoncé « *Undarum velocitas est in subduplicata ratione latitudinum* », a été mis en évidence la première fois par Poisson en 1815. Mais, ci-après, nous donnerons la véritable interprétation de cette Proposition à l'aide d'une analyse propre à faire retrouver la pensée même de Newton.

Il résulte de l'analyse de Poisson, fondée sur l'hypothèse d'une profondeur infinie, que, par rapport au plan de niveau, l'ordonnée verticale z de toute molécule placée à la surface, et à une grande distance du lieu de l'ébranlement primitif, est exprimée par une fonction de t et x, de la forme

$$z=\frac{U}{\sqrt{2\pi x}}\left\{\cos.\left(\frac{gt^2}{4x}\right)+\sin.\left(\frac{gt^2}{4x}\right)\right\};$$

où U désigne une fonction de $\frac{t}{x}$.

La durée fort petite t' du temps qui s'écoule entre l'instant du *maximum* et l'instant du *minimum* du binome

$$\cos.\left(\frac{gt^2}{4x}\right)+\sin.\left(\frac{gt^2}{4x}\right),$$

$\left(\text{en supposant très-grande, relativement à } x, \text{ la quantité } \frac{gt^2}{4}\right)$ est telle

que l'on a $\frac{g t t'}{2x} = \pi$. Et comme les *maxima* positifs et négatifs du même binome (en y faisant varier x seulement), sont séparés par un assez petit intervalle λ, tel que l'on a $\frac{g t^2 \lambda}{4 x^2} = \pi$, on tire de ces deux équations;

$$t' = \sqrt{\frac{\pi \lambda}{g}} = (1,7724) \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \; ; \qquad x = t \cdot \sqrt{\frac{g\lambda}{4\pi}} = (0,2821)\, t \cdot \sqrt{g\lambda} \; ;$$

par lesquelles on voit, que la largeur λ des ondes ne peut être constante sans l'isochronisme des oscillations.

Cette valeur de x étant substituée dans celle de U, l'on obtient

$$\frac{U}{\sqrt{2\pi x}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^3} \cdot \frac{H\lambda^2 \cdot \sqrt{\lambda}}{L^2 \cdot \sqrt{x}} \left\{ \text{sin.} \left(\frac{\pi L}{\lambda}\right) - \frac{\pi L}{\lambda} \text{cos.} \left(\frac{\pi L}{\lambda}\right) \right\} \; ;$$

où H désigne la fort petite flèche, et $2L$ la largeur de la base (à fleur d'eau) du segment du corps plongé, et subitement retiré, après le repos, pour la production des ondes.

Les plus grandes valeurs de λ correspondent aux points de la surface qui font les plus grandes oscillations verticales; et cette théorie apprend que l'on a alors (*);

$$\lambda = \frac{\pi L}{1,4194} = 2,2133 \, . \, L \; ; \qquad t' = (2,3083) \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \; ;$$

$$x = t \cdot \sqrt{\frac{g L}{4 \cdot 1,4194}} = (0,41968)\, t \cdot \sqrt{g L} \; .$$

En substituant ces valeurs de λ et x dans celle de z, on aura

$$z = AH \cdot \sqrt{\frac{L}{x}} \cdot \left\{ \text{cos.} \left(\frac{x \cdot 1,4194}{L}\right) + \text{sin.} \left(\frac{x \cdot 1,4194}{L}\right) \right\} \; :$$

(*) On verra ci-après qu'il faut déterminer k par l'équation

$$\left(\tfrac{2}{3} k^2 - 9\right) \text{tang.}\, k + 9k = 0 \; ,$$

et non par l'équation

$$(4k^2 - 9) \text{tang.}\, k + 9k = 0 \; ,$$

que Poisson donne à la page 122 de son Mémoire. Alors, au lieu de $k = 1,8353$ et $k = 5,8958$ pour les deux premières valeurs de k, l'on a $k = 1,4194$, $k = 5,8386$.

où l'on a fait, pour plus de simplicité,

$$A=\frac{2.\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}.(1,4194)^{\frac{5}{2}}}\left\{\sin.(1,4194)-(1,4194)\cos.(1,4194)\right\}$$

On voit par là que, abstraction faite du facteur périodique, les élévations z décroissent en raison inverse de la racine quarrée de la distance x, au lieu de l'ébranlement primitif.

Au reste, en touchant cette question, on ne peut mieux caractériser la différence qu'il y a entre la théorie ancienne et la moderne qu'en rappelant le résultat de cette dernière. Suivant la théorie de Poisson, dans le cas où l'ébranlement primitif a lieu sans vitesse initiale dans un canal rectangulaire, il y a *deux espèces d'ondes:* les unes se propagent avec un mouvement uniformément accéléré; les autres se propagent avec un mouvement uniforme. L'équation qui détermine les premières est

$$0=\int_0^1 dv\cos.\left[(1-v^2)\frac{gt^2}{4x}\right]-\frac{x}{2}\cdot\frac{d.}{dx}\int_0^1 dv\cos.\left[(1-v^2)\frac{gt^2}{4x}\right],$$

qui développée en série, en posant $p=\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^2$, devient

$$0=1+\sum_1^\infty.\frac{(-1)^n.2np^n}{1.3.5.7.\ldots.4n+1};$$

et l'équation qui détermine les secondes est

$$0=9\left(\frac{gLt^2}{4x^2}\right)-\left\{9-\frac{7}{2}\left(\frac{gLt^2}{4x^2}\right)^2\right\}\text{tang.}\left(\frac{gLt^2}{4x^2}\right).$$

Leur démonstration dépend de deux formules que j'ai publiées dans le Tome XXV des Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin.

La première donne $x=\frac{gt^2}{2}(0,3253)$; et la seconde

$$x=(0,4197)t.\sqrt{gL},$$

pour les ondes qui se propagent avec la plus grande vitesse.

En outre il y a un mouvement dans le sens vertical qui s'étend à de grandes profondeurs. Celui qui a lieu au-dessous de l'ébranlement

primitif a une vitesse w exprimée par

$$w = -\frac{Bgt}{2\pi z^2}\left\{1 - \left(1 - \frac{gt^2}{2z}\right)\int_0^1 e^{-\frac{gt^2}{4z}(1-v^2)}\,dv\right\},$$

où

$$B = \int_{-L}^{L} d\alpha\, f(\alpha) \cdot$$

Cette transmission d'un mouvement excité à la surface de l'eau, et sensible à de grandes profondeurs, détruit l'hypothèse que faisait LAGRANGE dans la Mécanique Analytique.

Turin, ce 24 août 1857.

DÉMONSTRATION DE L'ÉQUATION

$$\left(\frac{7}{2}K^2-9\right)\text{tang.}K+9K=0\ ,$$

qui doit remplacer celle donnée par Poisson *à la page 122 de son Mémoire* Sur la Théorie des Ondes.

Dans le cas où la profondeur du canal qui contient l'eau est censée infinie, la valeur de l'ordonnée z, relative à la surface, peut être exprimée, en général, sous forme finie, à l'aide d'une formule remarquable, décroissante avec le temps, que j'ai publiée, en 1820, dans le Tome XXV des Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin. Voici cette formule, qui offre l'avantage de mieux faire estimer la partie négligée, lorsqu'on retient seulement la partie principale. Soit

$$T=\int_0^\infty \frac{e^{-p^2}p^4dp}{1+p^6N^2}\ ; \qquad T'=\int_0^\infty \frac{e^{-p^2}p^8dp}{(1+p^6N^2)^2}\ ,$$

où j'ai fait

$$N=\frac{4(x-\alpha)}{gt^2}\ .$$

Quoique la valeur de T, et celle de T' soit impossible à évaluer sous forme finie, il est clair que l'on a ;

$$T<\int_0^\infty e^{-p^2}p^4dp=\frac{3}{8}\cdot\sqrt{\pi}\ ; \qquad T'<\int_0^\infty e^{-p^2}p^8dp=\frac{105}{32}\cdot\sqrt{\pi}\ .$$

Cela posé si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$W=\frac{2}{\pi.gt^2}\cdot\int_{-L}^{L}d\alpha f(\alpha)-\frac{320}{\pi.\sqrt{\pi}.(gt^2)^3}\int_{-L}^{L}T\,(x-\alpha)^3f(\alpha)d\alpha$$

$$+\frac{4096}{\pi.\sqrt{\pi}.(gt^2)^5}\int_{-L}^{L}T'(x-\alpha)^4f(\alpha)d\alpha\ ;$$

c'est-à-dire, sous une forme plus concise,

$$W=\left\{\frac{2}{\pi g t^2}+\frac{[8(x-\alpha)]^2}{g^3\pi\cdot\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d.}{dt}\left(\frac{T}{t^5}\right)\right\}\int_{-L}^{L}d\alpha f(\alpha)\ ,$$

il est démontré que l'on a (*)

$$[1]\ \ldots\ z=W+\frac{t.\sqrt{g}}{2.\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L}\frac{d\alpha f(\alpha)}{(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}}\left\{\sin.\left[\frac{gt^2}{4(x-\alpha)}\right]+\cos.\left[\frac{gt^2}{4(x-\alpha)}\right]\right\}.$$

Abstraction faite de la convergence, l'on a la série;

$$T=\frac{3}{8}\sqrt{\pi}\left\{\begin{array}{l}1-5.7.2^2\left(\frac{x-\alpha}{gt^2}\right)^2+5.7.9.11.2^4\left(\frac{x-\alpha}{gt^2}\right)^4\\ \\ -5.7.9.11.13.15.2^6\left(\frac{x-\alpha}{gt^2}\right)^6+\text{etc.}\end{array}\right\},$$

par laquelle on voit que, dans le second membre de l'équation [17] donnée à la page 116 du Mémoire de Poisson, on doit lire la série avec les signes alternativement positifs et négatifs; c'est-à-dire

$$\frac{4}{gt^2}-\frac{3.5.16(x-\alpha)^2}{g^3t^6}+\text{etc.}$$

Il est évident qu'on doit faire le même changement dans la dernière ligne de la page 156.

En négligeant le carré de $\frac{\alpha}{x}$, et faisant $\beta=\frac{gt^2}{4x^2}$, il est clair que nous avons

---

(*) Par le procédé qui conduit à cette équation, il est démontré que l'on a, en général;

$$\int_0^\infty du.\cos.u(x-\alpha)\cos.t.\sqrt{gu}=$$

$$\frac{2}{gt^2}+\frac{[8(x-\alpha)]^2}{g^3.\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d.}{dt}\left(\frac{T}{t^5}\right)+\frac{t.\sqrt{g\pi}}{2.\sqrt{2}.(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}}\left\{\sin.\frac{gt^2}{4(x-\alpha)}+\cos.\frac{gt^2}{4(x-\alpha)}\right\}.$$

Ce théorème d'analyse est en même temps la base de la solution du problème des ondes, excitées à la surface indéfinie d'un bassin d'eau, lorsqu'on traite sa profondeur comme infinie.

$$\sin.\frac{gt^2}{4(x-\alpha)} = \sin.\beta x\,.\cos.\beta\alpha + \cos.\beta x\,.\sin.\beta\alpha\ ;$$

$$\cos.\frac{gt^2}{4(x-\alpha)} = \cos.\beta x\,.\cos.\beta\alpha - \sin.\beta x\,.\sin.\beta\alpha\ ;$$

et par conséquent

$$z = W + \frac{t.\sqrt{g}}{2.\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L}\frac{d\alpha f(\alpha)}{(x-\alpha)^{\frac{3}{2}}}\left\{X\cos.\beta\alpha - X'\sin.\beta\alpha\right\},$$

où l'on a fait

$$X = \sin.\beta x + \cos.\beta x\ ; \qquad X' = \sin.\beta x - \cos.\beta x\ .$$

Donc, en remplaçant $(x-\alpha)^{-\frac{3}{2}}$ par $\frac{1}{x.\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha}{x^2.\sqrt{x}}$, l'on aura

$$[2]\ \ldots\quad z = W + \frac{t.\sqrt{g}}{2.\sqrt{2\pi}.x.\sqrt{x}}\int_{-L}^{L}d\alpha f(\alpha)\left\{X\cos.\beta\alpha - X'\sin.\beta\alpha\right\}$$

$$+\frac{3}{4}\cdot\frac{t.\sqrt{g}}{\sqrt{2\pi}.x^2.\sqrt{x}}\int_{-L}^{L}d\alpha f(\alpha)\left\{X\cos.\beta\alpha - X'\sin.\beta\alpha\right\}.$$

Maintenant, si nous supposons que la fonction initiale $f(\alpha)$ est telle que $f(\alpha) = f(-\alpha)$, l'on aura

$$[3]\ \ldots\quad \left\{\int_{-L}^{L}d\alpha f(\alpha)\sin.\beta\alpha = 0\ ;\qquad \int_{-L}^{L}d\alpha\,.\,\alpha f(\alpha)\cos.\beta\alpha = 0\right\};$$

ce qui réduit l'équation [2] à celle-ci ;

$$[4]\ \ldots\quad z = W + \frac{t.\sqrt{g}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{X}{x.\sqrt{x}}\int_{0}^{L}d\alpha f(\alpha)\cos.\beta\alpha$$

$$-\frac{3}{2}\cdot\frac{t.\sqrt{g}}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{X'}{x^2.\sqrt{x}}\int_{0}^{L}d\alpha\,.\,\alpha f(\alpha)\sin.\beta\alpha\ .$$

Et comme $\sqrt{\beta} = \frac{t.\sqrt{g}}{2x}$, cela revient à dire, que

$$[5] \ldots\ldots \quad z = H' + \frac{2.\sqrt{\beta}.X}{\sqrt{2\pi x}} \int_0^L d\alpha f(\alpha) \cos.\beta\alpha$$

$$- \frac{3.\sqrt{\beta}.X'}{x.\sqrt{2\pi x}} \int_0^L d\alpha.\alpha f(\alpha) \sin.\beta\alpha \ .$$

En intégrant par parties, et faisant $f'(\alpha) = \frac{d.f(\alpha)}{d\alpha}$, l'on a

$$\int_0^L d\alpha.\alpha f(\alpha) \sin.\beta\alpha = -\frac{1}{\beta}.f(L)\cos.\beta L$$

$$+ \frac{1}{\beta}.\int_0^L d\alpha f(\alpha)\cos.\beta\alpha + \frac{1}{\beta}.\int_0^L d\alpha.\alpha f'(\alpha)\cos.\beta\alpha \ .$$

Donc en substituant cette valeur, l'équation [5] donne

$$[6] \ldots\ldots \quad z = H' + \frac{3.X'}{\sqrt{\beta}.x.\sqrt{2\pi x}}.f(L)\cos.\beta L$$

$$+ \frac{2.\sqrt{\beta}.X}{\sqrt{2\pi x}}.\int_0^L d\alpha f(\alpha)\cos.\beta\alpha$$

$$- \frac{3.\sqrt{\beta}.X'}{\beta.x.\sqrt{2\pi x}}.\int_0^L d\alpha f(\alpha)\cos.\beta\alpha$$

$$- \frac{3.\sqrt{\beta}.X'}{\beta.x.\sqrt{2\pi x}}.\int_0^L d\alpha.\alpha f'(\alpha)\cos.\beta\alpha \ .$$

Maintenant, si nous faisons

$$f(\alpha) = \frac{H}{L^2}(L^2 - \alpha^2) \ ,$$

l'on aura $f(L) = 0$, et

$$\int_0^L d\alpha.\alpha f'(\alpha)\cos.\beta\alpha = -\frac{2H}{\beta}\sin.\beta L + 2\int_0^L d\alpha f(\alpha)\cos.\beta\alpha \ .$$

Donc l'équation [6] deviendra

$$z = H' + \frac{6H.\sqrt{\beta}}{\beta^3 x.\sqrt{2\pi x}} X' \sin.\beta L + \left\{ \frac{2.\sqrt{\beta}.X}{\sqrt{2\pi x}} - \frac{9.\sqrt{\beta}.X'}{\beta x.\sqrt{2\pi x}} \right\} \int_0^L d\alpha f(\alpha) \cos.\beta\alpha .$$

Mais la valeur précédente de $f(\alpha)$ donne

$$\int_0^L d\alpha f(\alpha) \cos.\beta\alpha = \frac{2H}{L^2\beta^3} (\sin.\beta L - \beta L \cos.\beta L) :$$

donc en posant $\beta L = K$, nous aurons

$$[7] \ldots\ldots \qquad z = H' + \frac{MX}{\sqrt{x}} - \frac{M'X'}{x.\sqrt{x}} + \frac{M''X'}{x.\sqrt{x}} ,$$

après avoir fait, pour plus de simplicité ;

$$[8] \ldots\ldots \begin{cases} M = \dfrac{4H.\sqrt{LK}}{\sqrt{2\pi}.K^3} (\sin.K - K\cos.K) ; \\ M' = \dfrac{9}{2}.\dfrac{L}{K} M ; \qquad M'' = \dfrac{6HL.\sqrt{LK}}{K^2.\sqrt{2\pi}} \sin.K . \end{cases}$$

On voit par là, que cette expression de z se compose de quatre parties, dont la principale est la *seconde*; c'est-à-dire $\frac{MX}{\sqrt{x}}$. Cette partie est la seule conservée par Poisson dans sa valeur de z, qui se trouve au commencement de la page 118 de son Mémoire. Mais, pour avoir les valeurs de x, qui rendent z un *maximum* ou un *minimum*, il faut former l'expression de $\frac{dz}{dx}$, et alors il devient nécessaire de conserver les autres parties afin d'obtenir l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$, en tenant compte de toutes les quantités du même ordre. C'est ce qui deviendra plus clair par l'analyse suivante.

En différentiant l'équation [7] par rapport à x, l'on a ;

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} = \frac{dH'}{dx} &- \frac{MX}{2x.\sqrt{x}} + \frac{3}{2}.\frac{M'X'}{x^2.\sqrt{x}} - \frac{3}{2}.\frac{M''X'}{x^2.\sqrt{x}} \\ &+ \frac{M}{\sqrt{x}}.\frac{dX}{dx} - \frac{M'}{x.\sqrt{x}}.\frac{dX'}{dx} + \frac{M''}{x.\sqrt{x}}.\frac{dX'}{dx} \\ &+ \left(\frac{dM}{dK}.\frac{X}{\sqrt{x}} - \frac{dM'}{dK}.\frac{X'}{x.\sqrt{x}} + \frac{dM''}{dK}.\frac{X'}{x.\sqrt{x}} \right) \frac{dK}{dx} . \end{aligned}$$

Mais nous avons $\frac{dK}{dx}=-\frac{2K}{x}$, $\frac{d.\beta x}{dx}=-\beta$; et

$$\frac{dX}{dx}=(\cos.\beta x-\sin.\beta x)\frac{d.\beta x}{dx}=\quad \beta X' \ ;$$

$$\frac{dX'}{dx}=(\cos.\beta x+\sin.\beta x)\frac{d.\beta x}{dx}=-\beta X \ :$$

donc en substituant l'on aura ;

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dH'}{dx}-\frac{X}{x.\sqrt{x}}\left\{\frac{1}{2}M-\beta M'+\beta M''+2K\frac{dM}{dK}\right\}$$

$$+\frac{X'}{x^2.\sqrt{x}}\left\{\frac{3}{2}M'-\frac{3}{2}M''+2K\frac{dM'}{dK}-2K\frac{dM''}{dK}+\beta Mx^2\right\}.$$

Actuellement, si l'on remarque, que $\beta=\frac{K}{L}$, $M'=\frac{9}{2}.\frac{M}{\beta}$, on réduira cette équation à celle-ci ;

$$[9]\ldots\quad \frac{dz}{dx}=\frac{dH'}{dx}+\frac{X}{x.\sqrt{x}}\left\{LM-\frac{K}{L}M''-2K\frac{dM}{dK}\right\}$$

$$+\frac{X'}{x^2.\sqrt{x}}\left\{\frac{27}{4}.\frac{LM}{K}-\frac{3}{2}M''+2K\frac{dM'}{dK}-2K\frac{dM''}{dK}+\frac{KMx^2}{L}\right\}.$$

En différentiant M par rapport à K, l'on obtient,

$$[10]\ldots\ldots\quad 2K\frac{dM}{dK}=\frac{4H.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}.K^2.\sqrt{K}}\left\{(2K^2-5)\sin.K+5K\cos.K\right\} \ ;$$

et par conséquent

$$LM-2K\frac{dM}{dK}=-\frac{4H.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}.K^2.\sqrt{K}}\left\{(2K^2-9)\sin.K+9K\cos.K\right\} \ :$$

et comme

$$M''\frac{K}{L}=\frac{3}{2}.\frac{4H.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}.K^2.\sqrt{K}}.K^2\sin.K \ ,$$

il est clair que l'on a ;

$$[11]\ldots\ldots\qquad LM-2K\frac{dM}{dK}-\frac{K}{L}M''$$

$$=\frac{4H.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}.K^2.\sqrt{K}}\left\{\left(\frac{7}{2}K^2-9\right)\sin.K+9K\cos.K\right\}.$$

D'après l'équation $M'=\frac{9}{2}L.\frac{M}{K}$, on a d'abord

$$2K\frac{dM'}{dK}=\frac{9L}{K}\left(K\frac{dM}{dK}-M\right);$$

et de là, en vertu des équations [8] et [10] on tire

$$2K\frac{dM'}{dK}=\frac{18H.L.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}.K^3.\sqrt{K}}\left\{(2K^2-7)\sin.K+7K.\cos.K\right\}.$$

Et comme

$$-2K\frac{dM''}{dK}=\frac{18H.L.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}.K.\sqrt{K}}\left(\sin.K-\frac{2}{3}K\cos.K\right),$$

la somme de ces deux dernières équations donne;

$$[12]\ldots\ldots\quad 2K\frac{dM'}{dK}-2K\frac{dM''}{dK}$$

$$=\frac{18H.L.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}.K^3.\sqrt{K}}\left\{(3K^2-7)\sin.K+\left(7-\frac{2}{3}K^2\right)K\cos.K\right\}.$$

Mais les équations [8] donnent immédiatement

$$[13]\ldots\quad \frac{27}{4}.\frac{LM}{K}-\frac{3}{2}M''=\frac{18H.L.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}.K^3.\sqrt{K}}\left\{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}K^2\right)\sin.K-\frac{3}{2}K\cos.K\right\}.$$

donc l'on a;

$$[14]\ldots\ldots\quad \frac{27}{4}.\frac{LM}{K}-\frac{3}{2}M''+2K\frac{dM'}{dK}-2K\frac{dM''}{dK}$$

$$=\frac{9H.L.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi}.K^3.\sqrt{K}}\left\{(5K^2-11)\sin.K+\left(11-\frac{4}{3}K^2\right)K\cos.K\right\}.$$

Ainsi, en vertu des équations [11] et [14], l'équation [9] est réductible à celle-ci;

$$[15]\ldots\quad \frac{dz}{dx}=\frac{dW}{dx}-\frac{L.H.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi K}.K^2}.\frac{X}{x.\sqrt{x}}\left\{\left(\frac{7}{2}K^2-9\right)\sin.K+9.K\cos.K\right\}$$

$$+\frac{9H.L.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi K}.K^3}.\frac{X'}{x^2.\sqrt{x}}\left\{(5K^2-11)\sin.K+\left(11-\frac{4}{3}K^2\right)K\cos.K\right\}$$

$$+\frac{KM}{L}.\frac{X'}{\sqrt{x}}.$$

En faisant $T=\frac{3}{8}.\sqrt{\pi}$, l'expression de W donne $-\frac{5}{K^3}\left(\frac{H}{L}\right)\left(\frac{L}{x}\right)^5$ pour le premier et plus grand terme de la valeur de $\frac{dW}{dx}$: de sorte que, ce terme peut être négligé, puisque nous supposons très-petit le rapport $\frac{L}{x}$.

Avant de conclure de ce résultat à quoi on peut réduire l'équation du *maximum* $\frac{dz}{dx}=0$, il est nécessaire de considérer aussi l'expression de $\frac{dz}{dt}$. Or, en différentiant l'équation [7] par rapport à t nous avons d'abord;

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dW}{dt}+\frac{M}{\sqrt{x}}.\frac{dX}{dt}-\frac{M'}{x.\sqrt{x}}.\frac{dX'}{dt}+\frac{M''}{x.\sqrt{x}}.\frac{dX'}{dt}$$

$$+\left\{\frac{dM}{dK}.\frac{X}{\sqrt{x}}-\frac{dM'}{dK}.\frac{X'}{x.\sqrt{x}}+\frac{dM''}{dK}.\frac{X'}{x.\sqrt{x}}\right\}\frac{dK}{dt}.$$

Et comme $\frac{dK}{dt}=\frac{2K}{t}$; $\frac{d.\beta x}{dt}=\beta x.\frac{2}{t}$; et

$$\frac{dX}{dt}=(\cos.\beta x-\sin.\beta x)\frac{d.\beta x}{dt}=-2X'.\frac{\beta x}{t}\ ;$$

$$\frac{dX'}{dt}=(\cos.\beta x+\sin.\beta x)\frac{d.\beta x}{dt}=\quad 2X.\frac{\beta x}{t}\ ,$$

il est clair que;

[16] .... $$\frac{dz}{dt}=\frac{dW}{dt}+\frac{2X}{t.\sqrt{x}}\left\{\beta(M''-M')+K\frac{dM}{dK}\right\}$$

$$-\frac{2X'}{tx.\sqrt{x}}\left\{M\beta.x^2+K\frac{dM'}{dK}-K\frac{dM''}{dK}\right\}.$$

D'après les équations [8] et [10]

$$\beta(M''-M')=-\frac{9}{2}M+\frac{3H.\sqrt{L}}{2.\sqrt{2\pi}.\sqrt{K}}\sin.K$$

$$=\frac{H.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi K}.K^2}\left\{\left(\frac{3}{2}K^2-18\right)\sin.K+18.K\cos.K\right\}\ ;$$

$$[17] \ldots\ldots\ldots \quad K\frac{dM}{dK}+\beta(M''-M')$$

$$=\frac{H.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi K}.K^2}\left\{\left(\frac{11}{2}K^2-28\right)\sin.K+28.K\cos.K\right\}.$$

Cela posé, l'équation [16] deviendra

$$[18]\ldots\ \frac{dz}{dt}=\frac{dW}{dt}+\frac{2H.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi K}.K^2}\cdot\frac{X}{t.\sqrt{x}}\left\{\left(\frac{11}{2}K^2-28\right)\sin.K+28.K\cos.K\right\}$$

$$-\frac{2X'}{tx.\sqrt{x}}\left\{M\beta.x^2+K\frac{dM'}{dK}-K\frac{dM''}{dK}\right\}.$$

Remarquons maintenant, que le *maximum* de la valeur de X, relativement au temps t, a lieu lorsque $X'=0$, ce qui donne $\beta x=\frac{gt^2}{4x}=i\pi+\frac{\pi}{4}$; i désignant un nombre entier; et $X=\pm\sqrt{2}$. Donc, quelle que soit la valeur de K, lorsque $\frac{gt^2}{4x}=i\pi+\frac{\pi}{4}$, l'on a

$$[19]\ldots\ \frac{dz}{dt}=\frac{dW}{dt}\pm\frac{2H.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi K}.K^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{t.\sqrt{x}}\left\{\left(\frac{11}{2}K^2-28\right)\sin.K+28.K\cos.K\right\}:$$

où nous avons

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{16}{3\pi}\cdot\frac{HL}{gt^3}$$

pour le premier et principal terme de la valeur de $\frac{dW}{dt}$.

De sorte que, pour toute valeur de K qui surpasse l'unité, on peut supposer $\frac{dz}{dt}=0$, si la valeur de $t.\sqrt{x}$, est fort grande, puisque la quantité $\frac{dW}{dt}$ est alors par sa nature fort petite, ainsi que la quantité $\frac{dW}{dx}$. Mais, quelle que soit la valeur de t, si $\frac{gt^2}{4}$ est quantité fort grande relativement à x, il suffira de faire subir à t un léger changement pour avoir $X'=0$: donc, en vertu des deux conditions

$$X'=0\ , \qquad \frac{dW}{dx}=0\ ,$$

l'équation [15] donnera $\frac{dz}{dx}=0$, si l'on a

$$\left(\frac{7}{2}K^2-9\right)\sin.K+9K\cos.K=0\ ,$$

ou bien

[20] ..... $$\left(\frac{7}{2}K^2-9\right)\text{tang.}\,K+9K=0\ ;$$

qui est l'équation qu'il s'agissait de démontrer.

La fonction de t et x est donc, par sa forme, telle que, sans définir la valeur de t, il suffit que le rapport $\frac{gt^2}{4x}$ soit un grand nombre pour en conclure que le *maximum* ou le *minimum* de z aura lieu, si la valeur absolue de K est déterminée par cette dernière équation.

Comme on voit, elle est une conséquence forcée de notre équation [7]. Mais en réduisant le second membre de cette équation au terme unique

[21] ..... $$z=M.\frac{X}{\sqrt{x}}\ ,$$

qui est l'équation de Poisson (Voyez le commencement de la page 118 de son Mémoire), l'on aurait $4K^2$ au lieu de $\frac{7}{2}K^2$. En effet;

$$\frac{d.\frac{M}{\sqrt{x}}}{dx}=-\frac{M}{2x.\sqrt{x}}-\frac{2K}{x.\sqrt{x}}.\frac{dM}{dK}\ ;$$

c'est-à-dire, en vertu de notre équation [10], et de l'équation $X'=0$:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{2H.\sqrt{L}}{\sqrt{2\pi xK}.xK^2}\cdot\left\{(4K^2-9)\sin.K+9K\cos.K\right\}.$$

Mais on ne saurait regarder comme exact le second facteur, puisqu'il est modifié par les autres termes qui entrent dans la valeur de z. Il est vrai qu'on peut négliger ces termes en calculant la valeur de z, mais il n'est pas permis de les négliger dans la formation de l'équation $\frac{dz}{dx}=0$. Il est remarquable que la plus *petite* racine de l'équation [20]

soit $K = 1,4194$, tandis que $K = 1,8353$ est la plus *petite* racine de l'équation

$$[22] \ldots\ldots\ldots \quad (4K^2 - 9)\,\text{tang.}\,K + 9K = 0 .$$

La théorie de Poisson, étendue aux trois dimensions d'une masse liquide, démontre que l'élévation z des ondes, à une grande distance du centre de l'ébranlement primitif, est exprimée par une série de la forme

$$z = \frac{N}{r} + \frac{N'}{r^2} + \frac{N''}{r^3} + \text{etc.} ;$$

où N, N', N'', etc. sont des fonctions; du rapport $\frac{t}{r}$, de quantités périodiques ayant pour argument $\frac{gt^2}{4r}$, et de l'angle θ que le rayon vecteur r de toute molécule superficielle fait avec une ligne fixe prise pour l'axe des x. Cette loi du décroissement de z, par rapport à r, peut être sensiblement réduite au seul premier terme $\frac{N}{r}$; de sorte qu'elle est beaucoup plus rapide que la loi du décroissement réciproque à la racine carrée de la distance, qui a lieu dans le cas précédent. En outre il est démontré que la vitesse uniforme de la propagation est plus petite (environ les $\frac{6}{7}$) que celle du canal rectangulaire.

Ces résultats, donnés par Poisson aux pages 163, 165 et 170 de son Mémoire, peuvent être établis d'une manière plus directe, et même plus exacte, à l'aide du théorème qui m'a fourni l'équation précédente désignée par [1]. C'est de quoi je vais exposer les points principaux dans la Note suivante, par laquelle on verra que, pour déterminer la vitesse uniforme de la propagation des ondes circulaires, on doit employer l'équation

$$27P + 40.k\frac{dP}{dk} = 0 ;$$

au lieu de l'équation

$$3P + 2k\frac{dP}{dk} = 0$$

donnée par Poisson à la page 168 de son Mémoire.

En vertu de ce changement on trouve $\frac{k^2}{4} = 0,9305$ pour la plus petite valeur de $\frac{k^2}{4}$; ce qui est la moitié du nombre 1,8628 que donne Poisson à la page 170. La vitesse de la propagation est assez différente; car l'on a;

$$r = (0,35998)t.\sqrt{gl} ,$$

au lieu de l'équation

$$r = (0,3027\ )t.\sqrt{gl} .$$

Sous le rapport théorique, l'analyse qui m'a conduit à ce résultat me paraît digne de quelque attention.

NOTE

SUR LA RÉDUCTION DE L'INTÉGRALE QUADRUPLE

$$z=-\frac{hll'}{g\pi^2}\cdot\frac{d^2.}{dt^2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}(1-s^2)\,sdsd\psi d\omega.Rdu\ ;$$

$$R=\cos.(u\rho\cos.\omega)\cos.(t.\sqrt{gu})\ ,$$

obtenue par Poisson *à la page 156 de son Mémoire* Sur la Théorie des Ondes, *à une autre équation entre des intégrales définies simples.*

D'après l'équation

$$\int_0^{\infty}du\cos.(u\rho\cos.\omega)\cos.(t.\sqrt{gu})=\frac{2}{gt^2}+\frac{64\,(\rho\cos.\omega)^2}{g^3.\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d.}{dt}\left(\frac{T}{t^5}\right)+\frac{\pi.\sqrt{g}}{2.\sqrt{2}}\Omega\ ;$$

où l'on a fait, pour plus de simplicité;

$$q=\frac{gt^2}{4\rho}\ ;\quad \Omega=\frac{t}{\sqrt{\pi}.\cos.^{\frac{3}{2}}\omega}\left\{\sin.\left(\frac{q}{\cos.\omega}\right)+\cos.\left(\frac{q}{\cos.\omega}\right)\right\}\ ;$$

$$T=q^2\int_0^{\infty}\frac{e^{-p^2}p^4dp}{q^2+p^4\cos.^2\omega}\ ,$$

la valeur de z deviendra;

$$[1]\ldots\ z=-\frac{3hll'}{g^2t^4}-\frac{64.hll'}{\pi^2.\sqrt{\pi}g^4}\cdot\frac{d^3.}{dt^3}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{T\rho^2\cos.^2\omega}{t^5}(1-s^2)\,sdsd\psi d\omega$$

$$-\frac{hll'}{2\pi.\sqrt{2g}}\cdot\frac{d^2.}{dt^2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Omega(1-s^2)\,sdsd\psi d\omega\ .$$

Considérons d'abord la dernière de ces trois parties de z. En nommant V l'intégrale triple, si l'on fait

$$U=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{\cos.^{\frac{3}{2}}\omega}\cos.\left(\frac{q}{\cos.\omega}\right);\qquad U'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{\cos.^{\frac{3}{2}}\omega}\sin.\left(\frac{q}{\cos.\omega}\right),$$

nous aurons

$$V=\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{t(U+U')(1-s^2)s\,ds\,d\psi}{\rho\cdot\sqrt{\rho}};$$

où la quantité ρ est indépendante de ω, puisque en faisant

$$A=l.\cos.\theta\cos.\psi+l'.\sin.\theta\sin.\psi;\qquad B=l^2.\cos.^2\psi+l'^2.\sin.^2\psi,$$

l'on a

$$\rho^2=r^2-2Ars+Bs^2.$$

Pour développer les valeurs de U et U', suivant les puissances négatives du temps t, nous ferons

$$\frac{1}{\cos.\omega}=1+x^2;$$

ce qui donne

$$U=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}dx\cdot\sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}\cos.q(1+x^2);$$

$$U'=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}dx\cdot\sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}\sin.q(1+x^2);$$

partant nous aurons

$$U+U'=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\cos.q+\sin.q)\int_0^{\infty}dx\cdot\sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}\cos.qx^2;$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\cos.q-\sin.q)\int_0^{\infty}dx\cdot\sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}\sin.qx^2.$$

Donc, en faisant $qx^2=X$, l'on aura

$$U+U'=\left(\frac{\cos.q+\sin.q}{\sqrt{\pi q}}\right)\int_0^\infty \frac{dX}{\sqrt{X}}\cdot\sqrt{\frac{q+X}{2q+X}}\cos.X$$

$$+\left(\frac{\cos.q-\sin.q}{\sqrt{\pi q}}\right)\int_0^\infty \frac{dX}{\sqrt{X}}\cdot\sqrt{\frac{q+X}{2q+X}}\sin.X\ .$$

Cette équation, en posant

$$Q=\left(1+\frac{X}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{X}{2q}\right)^{-\frac{1}{2}}-1\ ,$$

peut être écrite ainsi;

$$U+U'=\left(\frac{\cos.q+\sin.q}{\sqrt{2\pi q}}\right)\int_0^\infty \frac{dX}{\sqrt{X}}\cos.X+\left(\frac{\cos.q-\sin.q}{\sqrt{2\pi q}}\right)\int_0^\infty \frac{dX}{\sqrt{X}}\sin.X$$

$$+\left(\frac{\cos.q+\sin.q}{\sqrt{2\pi q}}\right)\int_0^\infty \frac{Q\,dX\cos.X}{\sqrt{X}}+\left(\frac{\cos.q-\sin.q}{\sqrt{2\pi q}}\right)\int_0^\infty \frac{Q\,dX\sin.X}{\sqrt{X}}\ .$$

Mais on sait que

$$\int_0^\infty \frac{dX}{\sqrt{X}}\cos.X=\int_0^\infty \frac{dX}{\sqrt{X}}\sin.X=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ ;$$

donc

$$U+U'=\frac{\cos.q}{\sqrt{q}}+\left(\frac{\cos.q+\sin.q}{\sqrt{2\pi q}}\right)\int_0^\infty \frac{Q\,dX\cos.X}{\sqrt{X}}$$

$$+\left(\frac{\cos.q-\sin.q}{\sqrt{2\pi q}}\right)\int_0^\infty \frac{Q\,dX\sin.X}{\sqrt{X}}\ .$$

Soit

$$Q=A_{(1)}\frac{X}{q}+A_{(2)}\frac{X^2}{q^2}+A_{(3)}\frac{X^3}{q^3}+\text{etc.}$$

la valeur de Q développée. D'après les formules connues l'on a (Voyez la page 368 du premier Volume des *Exercices de Calcul Intégral* de Legendre);

$$\int_0^\infty \frac{X^n dX\cos.X}{\sqrt{\pi X}}=\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\cos.(2n+1)\frac{\pi}{4}\ ;$$

$$\int_0^\infty \frac{X^n dX \sin. X}{\sqrt{\pi X}} = \Pi\left(n+\frac{1}{2}\right) \sin.(2n+1)\frac{\pi}{4} \; ;$$

$$\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5.7.....(2n-1)}{2^n} \; .$$

Il suit de là, que

$$U+U' = \frac{\cos. q}{\sqrt{q}} + \left(\frac{\cos. q + \sin. q}{\sqrt{2q}}\right) . \sum_1^\infty . \frac{A_{(n)}}{q^n} \Pi\left(n+\frac{1}{2}\right) \cos.(2n+1)\frac{\pi}{4}$$

$$+ \left(\frac{\cos. q - \sin. q}{\sqrt{2q}}\right) . \sum_1^\infty . \frac{A_{(n)}}{q^n} \Pi\left(n+\frac{1}{2}\right) \sin.(2n+1)\frac{\pi}{4} \; .$$

Mais, n étant un nombre entier, l'on a

$$\cos.(2n+1)\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos.\frac{n\pi}{2} - \sin.\frac{n\pi}{2}\right) \; ;$$

$$\sin.(2n+1)\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos.\frac{n\pi}{2} + \sin.\frac{n\pi}{2}\right) \; :$$

donc, en observant que $\frac{1}{\sqrt{q}} = \frac{2.\sqrt{\rho}}{t.\sqrt{g}}$, l'on aura

$$t.\sqrt{g}(U+U') = 2.\sqrt{\rho}\cos. q + 2.\sqrt{\rho} . \sum_1^\infty . A_{(n)} \Pi\left(n+\frac{1}{2}\right) \cos.\left(q+\frac{n\pi}{2}\right) \; .$$

En substituant cette valeur dans celle de V, nous aurons

$$\frac{\sqrt{g}}{2} . V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\cos. q . (1-s^2) s ds d\psi}{\rho}$$

$$+ \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{(1-s^2) s ds d\psi}{\rho} . \sum_1^\infty . \frac{A_{(n)}}{q^n} \Pi\left(n+\frac{1}{2}\right) \cos.\left(q+\frac{n\pi}{2}\right) \; .$$

En séparant le premier terme de la série soumise au signe $. \sum_1^\infty .$, et remarquant que $A_{(1)} = \frac{1}{4}$, $\Pi\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$, l'on aura

$$\frac{\sqrt{g}}{2}.V=\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{\cos.q.(1-s^2)sdsd\psi}{\rho}-\frac{1}{2gt^2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\sin.q.(1-s^2)sdsd\psi$$

$$+\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{(1-s^2)sdsd\psi}{\rho}.\sum_2^{\infty}.\frac{A_{(n)}}{q^n}\Pi\left(n+\frac{1}{2}\right)\cos.\left(q+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Maintenant, si l'on fait

$$M=l^2.\cos.^2\theta+l'^2.\sin.^2\theta\ ;\qquad q'=\frac{gt^2}{4r}\ ;\qquad k=\frac{q'}{r}.\sqrt{M}\ ;$$

$$\text{tang.}\,\theta'=\frac{l'}{l}\text{tang.}\,\theta\ ,$$

l'on aura l'équation

$$\rho^2=r^2-2rs.\sqrt{M}.\cos.(\psi-\theta')+Bs^2\ .$$

Or, en négligeant les termes multipliés par $\frac{l^2}{r^2}$, $\frac{l'^2}{r^2}$, on tire de là les équations suivantes, savoir;

$$\rho=r-s.\sqrt{M}\cos.(\psi-\theta')\ ;$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{r}+\frac{s.\sqrt{M}}{r^2}\cos.(\psi-\theta')\ ;$$

$$q=q'+sk\cos.(\psi-\theta')\ ;$$

$$\frac{1}{q^n}=\frac{1}{q'^n}-\frac{nsk}{q'^{n+1}}\cos.(\psi-\theta')\ ;$$

$$\frac{1}{\rho q^n}=\frac{1}{rq'^n}-\frac{(n-1)sk}{rq'^{n+1}}\cos.(\psi-\theta')\ ;$$

$$\cos.q=\cos.q'.\cos.\left[sk\cos.(\psi-\theta')\right]-\sin.q'.\sin.\left[sk\cos.(\psi-\theta')\right]\ ;$$

$$\sin.q=\sin.q'.\cos.\left[sk\cos.(\psi-\theta')\right]+\cos.q'.\sin.\left[sk\cos.(\psi-\theta')\right]\ ;$$

$$\cos.\left(q+\frac{n\pi}{2}\right)=\cos.\left(q'+\frac{n\pi}{2}\right)\cos.\left[sk\cos.(\psi-\theta')\right]$$

$$-\sin.\left(q'+\frac{n\pi}{2}\right)\sin.\left[sk\cos.(\psi-\theta')\right].$$

Après la substitution de ces valeurs dans celle de V, on verra

que le résultat de l'intégration doit être indépendant de la quantité constante θ', et que par conséquent on peut faire, de prime abord, $\theta' = 0$ sous le signe intégral.

En effet; soit, pour un moment,

$$Q' = \int_0^{2\pi} d\psi \cos.\{sk\cos.(\psi - \theta')\}$$

En différentiant par rapport à la constante θ', l'on a

$$\frac{dQ'}{d\theta'} = -sk\int_0^{2\pi} d\psi \sin.(\psi - \theta')\sin.\{sk\cos.(\psi - \theta')\} .$$

Mais l'intégrale indéfinie du second membre de cette équation est

$$\text{const.}^{e} - \cos.\{sk\cos.(\psi - \theta')\} ;$$

donc, entre les limites $\psi = 0$, $\psi = 2\pi$, l'on a $\frac{dQ'}{d\theta'} = 0$; ce qui démontre que la valeur de Q' est indépendante de θ'; et que l'on a l'équation équivalente

$$Q' = \int_0^{2\pi} d\psi \cos.(sk\cos.\psi) .$$

Il est clair que, par la même raison, l'on a la double égalité,

$$\int_0^{2\pi} d\psi \sin.\{sk\cos.(\psi - \theta')\} = \int_0^{2\pi} d\psi \sin.(sk\cos.\psi) = 0 ,$$

en observant, que les éléments de cette intégrale sont deux à deux égaux et de signe contraire.

En posant

$$R' = \int_0^{2\pi} d\psi \cos.(\psi - \theta')\cos.\{sk\cos.(\psi - \theta')\} ;$$

on aura pour $\frac{dR'}{d\theta'}$ les deux termes

$$\frac{dR'}{d\theta'} = \int_0^{2\pi} d\psi \sin.(\psi-\theta')\cos.\{sk\cos.(\psi-\theta')\}$$
$$-sk\int_0^{2\pi} d\psi\cos.(\psi-\theta')\sin.(\psi-\theta')\sin.\{sk\cos.(\psi-\theta')\};$$

ou bien, en intégrant par parties,

$$\frac{dR'}{d\theta'} = 2\int_0^{2\pi} d\psi \sin.(\psi-\theta')\cos.\{sk\cos.(\psi-\theta')\}.$$

L'intégrale indéfinie du second membre de cette équation étant

$$\text{const.}^{e} - \frac{2}{sk}\sin.\{sk\cos.(\psi-\theta')\},$$

il est clair que l'on a $\frac{dR'}{d\theta'} = 0$; et par conséquent

$$R' = \int_0^{2\pi} d\psi \cos.\psi\cos.\{sk\cos.\psi\}.$$

Mais cette intégrale est évidemment nulle, puisque des éléments du premier et quatrième quadrant sont égaux et de signe contraire à ceux du second et troisième quadrant. Donc l'on a

$$0 = \int_0^{2\pi} d\psi\cos.(\psi-\theta')\cos.\{sk\cos.(\psi-\theta')\}.$$

En posant

$$R'' = \int_0^{2\pi} d\psi\cos.(\psi-\theta')\sin.\{sk\cos.(\psi-\theta')\}$$

on en tire;

$$\frac{dR''}{d\theta'} = \int_0^{2\pi} d\psi \sin.(\psi-\theta')\sin.\{sk\cos.(\psi-\theta')\}$$
$$+sk\int_0^{2\pi} d\psi\cos.(\psi-\theta')\cos.\{sk\cos.(\psi-\theta')\}.$$

La seconde de ces parties étant nulle, l'on a

$$\text{const.}^{e} + \frac{1}{sk}\cos.\left\{sk\cos.(\psi - 0')\right\},$$

pour l'intégrale indéfinie; et par conséquent $\frac{dR''}{d\vartheta'} = 0$; ce qui donne

$$R'' = \int_0^{2\pi} d\psi \cos.\psi . \sin.\left\{sk\cos.\psi\right\}.$$

Il suit de là que, *sous le signe intégral*, on peut employer l'équation

$$\frac{\cos.\left(q + n\frac{\pi}{2}\right)}{\rho q^n} = \frac{\cos.\left(q' + n\frac{\pi}{2}\right)}{r q'^n} \cdot \cos(sk\cos.\psi) + \frac{(n-1)sk}{r q'^{n+1}} \sin.\left(q' + \frac{n\pi}{2}\right) . \cos.\psi \sin.(sk\cos.\psi) .$$

De sorte que nous avons;

$$\frac{\sqrt{g}}{2} V =$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{(1-s^2)sdsd\psi\cos.q}{\rho} - \frac{1}{2gt^2}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-s^2)sdsd\psi\sin.q$$

$$+ \frac{1}{r}.\frac{\Sigma}{2}^{\infty}.\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{A_{(n)}\Pi(n+\frac{1}{2})}{q'^n}\cos.(sk\cos.\psi)\cos.\left(q' + \frac{n\pi}{2}\right).(1-s^2)sdsd\psi$$

$$+ \frac{k}{r}.\frac{\Sigma}{2}^{\infty}.\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{(n-1)A_{(n)}\Pi(n+\frac{1}{2})}{q'^{n+1}}\cos.\psi\sin.(sk\cos.\psi)\sin.\left(q' + \frac{n\pi}{2}\right)(1-s^2)s^2dsd\psi .$$

Mais d'après les équations

$$\int_0^{2\pi} d\psi \sin.(sk\cos.\psi) = 0 \; ; \qquad \int_0^{2\pi} d\psi \cos.\psi \cos.(sk\cos.\psi) = 0 \; ;$$

il suffit de faire

$$\frac{\cos.q}{\rho} = \frac{\cos.q'}{r}\cdot\cos.(sk\cos.\psi) - \frac{\sin.q'.sk}{rq'}\cos.\psi\sin.(sk\cos\psi) \; ;$$

$$\sin.q = \sin.q'\cos.(sk\cos.\psi) \; ;$$

et alors en faisant

$$E' = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - s^2)\, s\, ds\, d\psi \cos.(sk\cos.\psi) ,$$

l'on a

$$\frac{dE'}{dk} = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - s^2)\, s^2\, ds\, d\psi \cos.\psi \sin.(sk\cos.\psi) ;$$

ce qui réduit la valeur précédente de $\frac{\sqrt{g}}{2}.V$ à celle-ci;

$$\frac{\sqrt{g}}{2}.V = \frac{E'\cos.q'}{r} + \left(8k\frac{dE'}{dk} - E'\right)\frac{\sin.q'}{2gt^2}$$
$$+ \frac{E'}{r}.\sum_2^\infty . \frac{A_{(n)}\Pi(n+\frac{1}{2})}{q'^n}\cos.\left(q' + \frac{n\pi}{2}\right)$$
$$- \frac{k}{r}\cdot\frac{dE'}{dk}.\sum_2^\infty . \frac{(n-1)A_{(n)}\Pi(n+\frac{1}{2})}{q'^{n+1}}\sin.\left(q' + \frac{n\pi}{2}\right) .$$

Il est facile d'exprimer la double intégrale désignée par E' par une intégrale simple. Car, en faisant

$$s.\cos.\psi = X , \qquad s.\sin.\psi = Y ,$$

on doit remplacer $s\,ds\,d\psi$ par $dX\,dY$, et d'après cela, si l'on fait $Y' = \sqrt{1 - X^2}$, l'on a

$$E' = 4\int_0^{Y'} \int_0^1 dY\, dX (1 - X^2 - Y^2)\cos.(kX) ;$$

d'où l'on tire $E' = \frac{3}{8}.P$, en posant

$$P = \int_0^{2\pi} dX (1 - X^2)^{\frac{3}{2}} \cos.(kX) ;$$

L'équation précédente donne donc;

$$\frac{3.\sqrt{g}}{16}.V = \frac{P\cos.q'}{r} - \frac{1}{2g}\left\{\frac{P\sin.q'}{t^2} - 4\cdot\frac{dP}{dt}\cdot\frac{\sin.q'}{t}\right\}$$
$$+ \frac{P}{r}.\sum_2^\infty . \frac{A_{(n)}\Pi(n+\frac{1}{2})}{q'^n}\cos.\left(q' + \frac{n\pi}{2}\right)$$
$$- \frac{t}{2r}\cdot\frac{dP}{dt}.\sum_2^\infty . \frac{A_{(n)}\Pi(n+\frac{1}{2})}{q'^{n+1}}\sin.\left(q' + \frac{n\pi}{2}\right) .$$

Pour tirer de là, la valeur de $\frac{d^2V}{dt^2}$, il faut observer, que l'on a directement;

$$\frac{d^2.}{dt^2}(P\cos.q') = \cos.q'\left(\frac{d^2P}{dt^2} - \frac{g^2t^2}{4r^2}.P\right) - \frac{g}{2r}\sin.q'\left(P + 2t\frac{dP}{dt}\right).$$

$$\frac{d^2.}{dt^2}\left(\frac{P\sin.q'}{t^2}\right) = -\frac{g\cos.q'}{r}\left\{\frac{3}{2}.\frac{P}{t^2} + \frac{1}{t}.\frac{dP}{dt}\right\}$$
$$-\sin.q'\left\{\frac{g^2.}{4r^2}P - \frac{6P}{t^4} + \frac{4}{t^3}.\frac{dP}{dt} - \frac{1}{t^2}.\frac{d^2P}{dt^2}\right\};$$

$$\frac{d^2.}{dt^2}\left(\frac{dP}{dt}.\frac{\sin.q'}{t}\right) = -\frac{g\cos.q'}{r}\left\{\frac{1}{2t}.\frac{dP}{dt} - \frac{d^2P}{dt^2}\right\}$$
$$-\sin.q'\left\{\frac{g^2.t}{4r^2}.\frac{dP}{dt} - \frac{2}{t^3}.\frac{dP}{dt} + \frac{2}{t^2}.\frac{d^2P}{dt^2} - \frac{1}{t}.\frac{d^3P}{dt^3}\right\}.$$

Maintenant, si l'on fait;

$$P' = -\frac{dP}{dk}\;; \qquad P'' = -\frac{d^2P}{dk^2}\;; \qquad P''' = -\frac{d^3P}{dk^3}\;;$$

l'on a;

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{2k}{t}P'\;; \quad \frac{d^2P}{dt^2} = -\frac{2k}{t^2}P' + \frac{4k^2}{t^2}P''\;; \quad \frac{d^3P}{dt^3} = \frac{8k^2}{t^3}P'' + \frac{8k'''}{t^3}P'''.$$

Donc en substituant ces valeurs, nous aurons

$$\frac{d^2.}{dt^2}(P\cos.q') = -\cos.q'\left\{P.\frac{g^2t^2}{4r^2} + \frac{2k}{t^2}P' - \frac{4k^2}{t^2}P''\right\}$$
$$-\frac{g\sin.q'}{2r}(P - 4kP')\;;$$

$$\frac{d^2.}{dt^2}\left(\frac{P\sin.q'}{t^2}\right) = -\frac{g\cos.q'}{rt^2}\left(\frac{3}{2}P - 2kP'\right)$$
$$-\sin.q'\left\{\frac{g^2P}{4r^2} - \frac{6P}{t^4} - \frac{6k}{t^4}P' - \frac{4k^2}{t^4}P''\right\};$$

$$\frac{d^2.}{dt^2}\left(\frac{dP}{dt}.\frac{\sin.q'}{t}\right) = \frac{g\cos.q'}{r}.\left(\frac{4k^2}{t^2}P'' - \frac{k}{t^2}P'\right)$$
$$+\sin q'\left\{\frac{g^2k}{2r^2}P' + \frac{8k^3}{t^4}P'''\right\}.$$

L'équation $q' = \frac{g t^2}{4r} = \frac{rk}{\sqrt{M}}$, donne

$$\frac{g^2 t^2}{4r^2} = \frac{gk}{\sqrt{M}} \; ; \qquad \frac{1}{t^2} = \frac{g.\sqrt{M}}{4kr^2} \; ; \qquad \frac{1}{q'^n} = \left(\frac{\sqrt{M}}{rk}\right)^n .$$

Mais, les valeurs qu'on doit donner à n sont $n = 2, 3, 4$, etc. ; donc on doit faire

$$\frac{d^2.}{dt^2}\left\{P.\frac{\cos.\left(q' + \frac{n\pi}{2}\right)}{q'^n}\right\} = 0 \; ;$$

$$\frac{d^2.}{dt^2}\left\{t.\frac{dP}{dt}.\frac{\sin.\left(q' + \frac{n\pi}{2}\right)}{q'^{n+1}}\right\} = 0 \; ;$$

puisque, pour $n = 2$, ces fonctions auraient pour facteur commun $\frac{M}{k^2 r^2}$, et que l'on a déjà négligé les termes multipliés par $\frac{M}{r^2}$ dans la formation de la fonction V. Il suit de là, que pour avoir la valeur de $\frac{d^2 V}{dt^2}$, il suffira de faire

$$\frac{d^2.}{dt^2}(P\cos.q') = -g\cos.q'\left\{\frac{kP}{\sqrt{M}} + \frac{P'.\sqrt{M}}{2r^2} - \frac{k.\sqrt{M}}{r^2}P''\right\}$$
$$-\frac{g\sin.q'}{2r}\left\{P - 4kP'\right\} \; ;$$

$$\frac{d^2.}{dt^2}\left(\frac{P\sin.q'}{t^2}\right) = -\frac{g^2.\cos.q'}{r^3}.\frac{\sqrt{M}}{8k}(3P - 4kP') - \frac{g^2 P}{4r^2}\sin.q' \; ;$$

$$\frac{d^2.}{dt^2}\left(\frac{dP}{dt}.\frac{\sin.q'}{t}\right) = \frac{g^2\cos.q'}{r^3}.\sqrt{M}\left\{kP'' - \frac{1}{4}P'\right\} + \frac{g^2 kP'}{2r^2}.\sin.q' \; .$$

Nous pouvons maintenant former l'expression de l'élévation z du fluide au-dessus de la surface de niveau. Pour cela, remarquons d'abord, que son premier terme étant égal à

$$-\frac{3}{16}.\frac{hll'}{r^2}.\frac{M}{k^2 r^2} \; ,$$

il est de l'ordre des quantités déjà négligées. A plus forte raison on doit négliger le second terme, qui a pour facteur $\left(\frac{M}{k^2 r^2}\right)^2$. En effet, on obtient

la partie principale de ce terme, en y faisant $T'=\frac{3}{8}\cdot\sqrt{\pi}$; $\rho^2=r^2$; alors, il devient égal à

$$-\frac{24}{\pi^2}\cdot\frac{hll'.r^2}{g^4}\cdot\frac{d^3.}{dt^3}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{-5}(1-s^2)s\,ds\,d\psi\,d\omega.\cos.^2\omega$$

$$=-\frac{3hll'.r^2}{g^4}\cdot\frac{d^3.}{dt^3}(t^{-5})=\frac{3.5.6.7.hll'r^2}{g^4t^8}=\frac{3.5.6.7}{(16)^2}\cdot\frac{hll'}{r^2}\left(\frac{M}{k^2r^2}\right)^2.$$

L'expression primitive de z, c'est-à-dire l'équation [1], est, d'après cela, réductible à celle-ci,

[2] ..... $$z=\frac{-hll'}{2\pi.\sqrt{2g}}\cdot\frac{d^2V}{dt^2}.$$

Donc, en substituant pour $\frac{d^2V}{dt^2}$ sa valeur, nous aurons

[3] ... $$z=-\frac{8hll'}{3\pi.\sqrt{2}.g^2}\left\{\begin{array}{r}\frac{g}{r}\cdot\frac{d^2.}{dt^2}(P\cos.q')-\frac{d^2.}{2dt^2}(t^{-2}.P\sin.q')\\ +\frac{2d^2.}{dt^2}\left(t^{-1}.\frac{dP}{dt}\sin.q'\right.\end{array}\right\}.$$

En retenant seulement les termes multipliés par $\frac{1}{r}$ et ceux multipliés par $\frac{1}{r^2}$, cette équation, en y remplaçant q' par sa valeur $\frac{gt^2}{4r}$, donne

[4] ... $$z=\frac{hll'}{3\pi.\sqrt{2M}}\cdot\frac{1}{r}\left\{8kP\cos.\left(\frac{gt^2}{4r}\right)+(3P-24kP')\sin.\left(\frac{gt^2}{4r}\right)\right\};$$

où P et P' sont des fonctions de

$$k=\frac{gt^2.\sqrt{M}}{4r^2};$$

c'est-à-dire des fonctions du rapport $\frac{t}{r}$.

Pour avoir le *maximum* de la valeur de z, correspondant à une valeur donnée du temps t, il faut former l'équation $\frac{dz}{dr}=0$. Or, en négligeant les termes qui seraient divisés par r^3, et remarquant que ;

$$\frac{dk}{dr}=-\frac{2k}{r}\;;\qquad \frac{dP}{dr}=P'.\frac{2k}{r}\;,\qquad \frac{dP'}{dr}=-P''.\frac{2k}{r}\;,$$

on obtient d'abord ;

$$\frac{dz}{dr}=\frac{hll'}{3\pi.\sqrt{2M}}.\frac{1}{r^2}\left\{\begin{array}{l}-8kP-16kP+16k^2P'\\ -\dfrac{gt^2}{4r^2}.\sqrt{M}(3P-24kP')\end{array}\right\}\cos.\left(\frac{gt^2}{4r}\right)$$

$$+\frac{hll'}{3\pi.\sqrt{2M}}.\frac{8kP}{r^2}\left(\frac{gt^2}{4r}\right)\sin.\left(\frac{gt^2}{4r}\right)\;;$$

et comme $\frac{gt^2}{4r^2}.\sqrt{M}=k$, l'on a

$$[5]\;\ldots\ldots\quad \frac{dz}{dr}=-\frac{hll'}{3\pi.\sqrt{2M}}.\frac{k}{r^2}(27P-40kP')\cos.\left(\frac{gt^2}{4r}\right)$$

$$+\frac{8hll'}{3\pi.\sqrt{2}}.\frac{k^2P}{Mr}.\sin.\left(\frac{gt^2}{4r}\right)\;.$$

Il suit de là, que l'équation $\frac{dz}{dr}=0$, donne

$$[6]\;\ldots\ldots\quad \text{tang.}\left(\frac{gt^2}{4r}\right)=\frac{\sqrt{M}}{r}\left(\frac{27}{8.k}-\frac{5P'}{P}\right)\;.$$

Ainsi, pour toute valeur *finie* de k, cette équation donnerait pour $\frac{gt^2}{4r}$ une quantité fort petite, puisqu'elle a pour facteur $\frac{\sqrt{M}}{r}$. Cependant, une telle équation est incompatible avec la condition, que la valeur de k soit une *quantité finie:* car, en négligeant le cube de $\frac{\sqrt{M}}{r}$, l'on aurait

$$\frac{gt^2}{4r^2}.\sqrt{M}=k=\frac{M}{r^2}.\left(\frac{27}{8.k}-5\frac{P'}{P}\right)\;;$$

ce qui est absurde.

Pour faire disparaître cette absurdité, il faut observer que ce mouvement, par sa nature, est tel que chaque oscillation s'accomplit dans un temps très-court, et de manière, que la plus grande valeur négative de z, qui succède à la plus grande valeur positive, lui est sensiblement égale. De sorte que, en désignant par t' le temps qui mesure cette oscillation dans un même point, c'est-à-dire sans faire varier r, on doit avoir

$$[7] \ldots\ldots \qquad \frac{g(t+t')^2}{4r} = \frac{gt^2}{4r} + \pi \ ,$$

afin que les deux valeurs de z, correspondantes aux instans t et $t+t'$, soient égales et de signe contraire. Mais cette équation donne

$$[8] \ldots\ldots \qquad \frac{t'}{t} = \sqrt{1 + \frac{4\pi r}{gt^2}} - 1 \ :$$

donc, en supposant que $\frac{gt^2}{4r}$ soit une quantité du même ordre de grandeur que la quantité $\frac{r}{\sqrt{M}}$, la condition que k ait une valeur *finie* sera satisfaite; et l'on aura, en développant le radical et retenant seulement le premier terme,

$$[9] \ldots\ldots \qquad \left\{ t' = \frac{2\pi r}{gt} \ ; \qquad \frac{gt^2}{4r} = \frac{\pi . t}{2t'} \right. \ .$$

Mais le temps donné t, compté depuis le commencement du mouvement, peut être censé compris entre deux valeurs, *maximum* et *minimum* de z; car, eu égard à la rapidité de ces oscillations, une légère variation suffirait pour le réduire précisément à celui qui sépare ces deux instans. Comme tel, le temps t doit être un multiple entier de $2t'$; donc, en faisant $t = i . 2t'$ (i étant un nombre entier), nous aurons $\frac{gt^2}{4r} = i\pi$, ce qui s'accorde avec l'équation [7], en négligeant la très-petite fraction $\frac{\pi}{4i}$. D'après cela, l'on a

$$\cos.\left(\frac{gt^2}{4r}\right) = \pm 1 \ ; \qquad \sin.\left(\frac{gt^2}{4r}\right) = 0 \ ;$$

et les valeurs de z et $\frac{dz}{dr}$, déterminées par les équations [4] et [5], deviennent

$$[10] \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} z = \pm \frac{8hll'}{3\pi . \sqrt{2M}} . \frac{kP}{r} \ ; \\ \frac{dz}{dr} = \mp \frac{hll'}{3\pi . \sqrt{2M}} . \frac{k}{r^2} (27P - 40 . kP') \ . \end{array} \right.$$

Cela posé, il est évident, que toute valeur de r, correspondante au *maximum* ou au *minimum* de z, pour un instant donné, doit être telle que l'équation

$$27\,P - 40\,.\,kP' = 0\ ;$$

c'est-à-dire

$$[11]\ldots\ldots\qquad 27\,P + 40\,.\,k\frac{dP}{dk} = 0\ ,$$

soit satisfaite.

Telle est l'analyse qui m'a conduit à l'équation [11], au lieu de l'équation

$$3P + 4k\frac{dP}{dk} = 0\ ,$$

désignée par (h) à la page 158 du Mémoire de Poisson. La discordance tient à ce que, Poisson, n'a pas eu égard au second terme de l'expression de z (qu'on voit dans notre équation [4]) en formant l'expression du coefficient différentiel $\frac{dz}{dr}$.

Le premier membre de l'équation [11] est une fonction de la seule quantité k, puisque l'on a

$$[12]\ldots\ldots\qquad P = \int_0^1 dX(1-X^2)^{\frac{3}{2}}\cos.kX\ :$$

et en série

$$[13]\ldots\ldots\begin{cases} P = \dfrac{3\pi}{8}\,.\sum_1^\infty \dfrac{(-1)^n.\left(\frac{k^2}{4}\right)^n}{(1.2.3.\ldots.n)^2(n+1)(n+2)}\ ; \\ k\dfrac{dP}{dk} = \dfrac{3\pi}{8}\,.\sum_0^\infty \dfrac{(-1)^n.2n\left(\frac{k^2}{4}\right)^n}{(1.2.3.\ldots.n)^2(n+1)(n+2)}\ . \end{cases}$$

Si le segment du corps, dont l'immersion produit les ondes circulaires, était celui d'un ellipsoïde de révolution, qui est le cas considéré par Poisson dans les deux N.os 48 et 49 de son Mémoire, cette analyse démontre, que l'on doit avoir pour z une expression que l'on obtient immédiatement en remplaçant le facteur $1-s^2$ par $(1-s^2)(1+ms^2)$ dans l'équation [1], après avoir fait $l'=l$; $m=\frac{l^2}{4a^2}$, et $k=\frac{gt^2l}{4r^2}$. Alors, l'introduction des variables X, Y à la place des variables primitives s et ψ, donne la double intégrale

$$\int\int dXdY(1-X^2-Y^2)(1+mX^2+mY^2)\cos.kX\ ,$$

après avoir intégré entre les limites $X=0$, $X=\sqrt{1-X^2}$, égale à l'intégrale simple

$$P_{(1)}=\frac{2}{3}\int_0^1 dX(1-X^2)^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{m}{5}+\frac{4m}{5}X^2\right)\cos. kX\ ;$$

laquelle, exprimée par la fonction P, devient équivalente à

$$P_{(1)}=\frac{2}{3}\left\{\left(1+\frac{m}{5}\right)P-\frac{4}{5}m\frac{d^2P}{dk^2}\right\}.$$

Donc, en substituant pour P sa valeur en série, donnée par les équations (13), l'on aura

$$P_{(1)}=\frac{\pi}{4}.\sum_0^\infty.\left\{1+\frac{m(n+1)}{n+3}\right\}.\frac{(-1)^n.p^n}{(1.2.3.....n)^2(n+1)(n+2)}.$$

De sorte que, au lieu de l'équation [11], l'on aurait l'équation

(11) ..... $$27P_{(1)}+40.k\frac{dP_{(1)}}{dk}=0\ .$$

En supprimant le facteur commun $\frac{3\pi}{8}$, et divisant par 9 l'équation [11] devient équivalente à celle-ci;

[14] ..... $$\frac{3}{2}+\sum_1^\infty.\frac{(-1)^n.\left(3+\frac{80.n}{9}\right).p^n}{(1.2.3.....n)^2.(n+1)(n+2)}=0\ ,$$

où l'on a fait $p=\frac{k^2}{4}$. L'on a donc, pour déterminer le nombre p, l'équation

[15] ..... $$0=\frac{3}{2}-p\left(\frac{107}{54}\right)+p^2\left(\frac{187}{432}\right)-p^3\left(\frac{89}{2160}\right)$$
$$+p^4\left(\frac{347}{270(24)^2}\right)-p^5\left(\frac{427}{378(120)^2}\right)+\text{etc.}\ ,$$

qui a une infinité de racines positives. La plus petite de ces racines, comprise entre zéro et l'unité, est

$$\frac{k^2}{4}=p=0,9305=\frac{1}{4}\left(\frac{gt^2.\sqrt{M}}{4r^2}\right)^2.$$

Il suit de là que, pour chaque valeur de k, l'on a

$$[16] \ldots\ldots \qquad r = \frac{t.\sqrt{g}.\sqrt[4]{M}}{2.\sqrt{k}} ,$$

d'où l'on tire, en faisant $k = 2.\sqrt{0,9305}$;

$$[17] \ldots\ldots \qquad r = (0,35998).t.\sqrt[4]{M}.\sqrt{g} .$$

Le coefficient numérique 0,35998 diffère sensiblement du coefficient 0,3027 que Poisson (Voyez la page 170 de son Mémoire) trouvait par la solution de son équation. Ce résultat est remarquable sous un autre aspect: en le rapprochant de l'équation

$$[18] \ldots\ldots \qquad r = \frac{gt^2}{2}(0,3672) ,$$

que Poisson trouve à la page 155 pour les ondes qui se propagent d'un mouvement uniformément accéléré, on voit que la plus petite racine de l'équation [14] donne pour $2.\sqrt{2}.\sqrt[4]{p}$, à-peu-près une valeur égale à celle de $2.\sqrt{p}$ fournie par la *plus petite racine* de l'équation

$$[19] \ldots \quad 3 + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n.p^n}{2^n.(1.2.3.\ldots.n)[2n+5.2n+7.\ldots.4n+1]} = 0 .$$

Les valeurs *maxima* de z sont exprimées par l'équation

$$[20] \ldots\ldots \qquad z = \pm \frac{16}{3\pi.\sqrt{2}} \cdot \frac{k.\sqrt{k}.P}{t} \cdot \frac{hll'}{\sqrt{gM}.\sqrt[4]{M}} ;$$

lesquelles sont décroissantes en raison inverse du temps.

La valeur de $\frac{dz}{dt}$, que l'on tirerait de cette équation, ne serait pas exacte. En effet; l'équation [4], étant différentiée par rapport à t, donne

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2hll'}{3\pi.\sqrt{2M}} \cdot \frac{k}{rt}(11P - 32kP')\cos.\left(\frac{gt^2}{4r}\right)$$

$$- \frac{16hll'}{3\pi.\sqrt{2}} \cdot \frac{k^2}{Mt} \cdot \left\{P + \frac{27}{8} \cdot \frac{P'M}{kr^2} - \frac{3P''M}{r^2}\right\} \sin.\left(\frac{gt^2}{4r}\right) ;$$

et comme on doit négliger les quantités multipliées par $\frac{M}{r^2}$, l'on a;

$$[21] \ldots\ldots \quad \frac{dz}{dt} = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{hll'}{\sqrt{2M}} \cdot \frac{k}{rt} \left(11P - 32kP'\right) \cos.\left(\frac{gt^2}{4r}\right) - \frac{16}{3\pi.\sqrt{2}} \cdot \frac{Pk^2}{Mt} \cdot \sin.\left(\frac{gt^2}{4r}\right) .$$

Mais pour les valeurs *maxima* ou *minima* de z, relativement à r, nous venons de démontrer que l'on a;

$$\cos.\left(\frac{gt^2}{4r}\right) = 0 \; ; \qquad \sin.\left(\frac{gt^2}{4r}\right) = 0 \; ; \qquad 40.kP' = 27P .$$

Donc l'équation [21] donne alors

$$[22] \ldots\ldots \quad \frac{dz}{dt} = \pm \frac{53}{20} \cdot \frac{16}{3\pi.\sqrt{2}} \cdot \frac{k.\sqrt{k}.P}{t^2} \cdot \frac{hll'}{\sqrt{gM}.\sqrt[4]{M}} \; ;$$

c'est-à-dire, $\frac{dz}{dt} = \mp \frac{53}{20} \cdot \frac{z}{t}$; et non $\frac{dz}{dt} = \mp \frac{z}{t}$, comme cela résulterait de l'équation [20] différentiée par rapport à t. Ainsi, tandis que $\frac{dz}{dr} = 0$, l'on a pour $\frac{dz}{dt}$ une quantité fort petite, variable en raison inverse du carré du temps.

En substituant dans le second membre de l'équation [4] la valeur de kP', donnée par l'équation [11], nous aurons

$$[23] \ldots \quad z = \frac{hll'}{3\pi.\sqrt{2M}} \cdot \frac{P}{r} \left\{ 8k \cos.\left(\frac{gt^2}{4r}\right) - \frac{66}{5} \cdot \frac{\sqrt{M}}{r} \cdot \sin.\left(\frac{gt^2}{4r}\right) \right\} .$$

La lenteur avec laquelle la quantité k varie, à une grande distance du lieu de l'ébranlement primitif, relativement à la durée des oscillations, permet de considérer comme constant le coefficient Pk.

D'après cette équation il est évident que, *au même instant*, l'on aura pour z deux valeurs égales et de signe contraire, si l'on considère deux valeurs; r et $r+\lambda$ du rayon vecteur r, telles que l'on ait l'équation

$$[24] \ldots\ldots \quad \frac{gt^2}{4r} - \frac{gt^2}{4(r+\lambda)} = \pi \; ;$$

de laquelle on tire

$$[25] \ldots\ldots \quad \lambda = \frac{4\pi r^2}{gt^2 \left(1 - \frac{4\pi r}{gt^2}\right)} .$$

Mais nous avons déjà fait remarquer que l'on doit regarder le rapport $\frac{4\pi r}{gt^2}$ comme une fraction fort petite comparativement à l'unité; on peut en conséquence réduire cette équation à celle-ci, savoir

$$[26] \ldots\ldots \qquad \lambda = \frac{4\pi r^2}{g t^2} = \frac{\pi . \sqrt{M}}{k} .$$

On voit par là, que l'intervalle λ [qui sépare les sommets *maximum* et *minimum* de deux ondes immédiatement consécutives, dont une est saillante et l'autre tracée en creux à la surface du fluide] dépend de la quantité donnée M, et de la quantité k qui doit être déterminée par l'équation [11]. De sorte que la théorie qui détermine *a priori* la quantité invisible k, donne en même temps l'intervalle visible λ, que l'on nomme *largeur des ondes*. En introduisant cette largeur dans les équations [9] et [16], il est clair que l'on a;

$$[27] \ldots\ldots \qquad \left\{ t' = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{g}} \; ; \qquad r = \frac{t . \sqrt{g\lambda}}{2 . \sqrt{\pi}} . \right.$$

Le coefficient qui multiplie t dans cette valeur de r exprime la vitesse uniforme avec laquelle a lieu le mouvement de propagation des ondes; en la désignant par w l'on a donc

$$[28] \ldots\ldots \qquad w = \frac{\sqrt{g\lambda}}{2 . \sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{g} . \sqrt[4]{M}}{2 . \sqrt{k}} .$$

De sorte que cette vitesse est proportionnelle à la racine carrée de la largeur λ des ondes. En introduisant la quantité λ dans le second membre de l'équation [23], l'on aura

$$[29] \ldots \qquad z = \frac{h l l'}{3\pi . \sqrt{2M}} . \frac{P}{r} \left\{ \begin{array}{l} 8k \cos . \left(t . \sqrt{\frac{\pi g}{4\lambda}} \right) \\ - \frac{66}{5} . \frac{\sqrt{M}}{r} \sin . \left(t . \sqrt{\frac{\pi g}{4\lambda}} \right) \end{array} \right| .$$

En appelant T' le temps nécessaire pour augmenter de π l'arc $t = \sqrt{\frac{\pi g}{4\lambda}}$, l'on a donc

$$[30] \ldots\ldots \qquad T' = \sqrt{\frac{4\pi\lambda}{g}} = 2t' ;$$

$$\lambda = \frac{g T'^2}{4\pi} ; \qquad r = t . \frac{T' g}{4\pi} ; \qquad w = \frac{T' g}{4\pi} .$$

En faisant $T''=1''$: $g=9^{\text{mèt.}},8088$, l'on a $w=\frac{g}{4\pi}=0^{\text{mèt.}},7299$. Pour toute autre vitesse w', correspondante à la largeur λ' et à la quantité M', l'on a

$$w'=0^{\text{m}},7299\cdot\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}=0^{\text{m}},7299\cdot\sqrt[4]{\frac{M'}{M}}\ .$$

D'après les deux équations [27] il est évident, que l'espace $r+\delta r$, parcouru dans le temps $t+t'$, est tel que $\delta r=\frac{\lambda}{2}$: donc, pendant chaque oscillation verticale dans le même lieu dont la durée est t', la propagation parcourt un espace égal à $\frac{\lambda}{2}$. De sorte que l'onde est alternativement saillante ou déprimée à chaque intervalle de temps égal au temps requis pour achever deux oscillations dans le sens vertical, à la même distance r.

Si nous imaginons un filet d'eau qui oscille dans un canal semi-circulaire, ayant μ pour rayon, on sait que

$$[31]\ \ldots\ldots\ldots\qquad z'=\frac{\beta}{2}.\cos.\left(t.\sqrt{\frac{2g}{\mu\pi}}\right)$$

serait l'expression du mouvement du liquide au-dessus du plan de niveau; β étant la longueur de l'amplitude totale. Donc, en faisant $\mu\pi=\frac{8\lambda}{\pi}$, les oscillations du filet d'eau seraient isochrones à celles des ondes. Mais la longueur du pendule isochrone doit être, comme nous venons de le démontrer, $\frac{4\lambda}{\pi}$, et *non* $4.\frac{\lambda}{2}=2\lambda$ comme Newton le dit (*aequat undarum latitudinem*) en finissant la Proposition XLVI du second Livre des *Principia*; où 2λ et non λ est la *largeur des ondes*, conformément à sa figure, et à sa définition conçue en ces temps: *Undarum latitudinem voco mensuram transversam quae vel vallibus imis vel summis culminibus interjacet.*

En remplaçant le syphon curviligne par un syphon, composé d'une branche horizontale ayant B pour longueur, et deux branches verticales égales, l'on aurait

$$[32]\ \ldots\ldots\ldots\qquad z'=\frac{\beta}{2}\cos.\left(t.\sqrt{\frac{2g}{B+2H}}\right);$$

et par conséquent, il faudrait composer le syphon de manière à avoir $\frac{B}{2}+H=\frac{4\lambda}{\pi}$, et non $\frac{B}{2}+H=2\lambda$.

Si cela suffit pour démontrer le vice de l'assertion *aequat undarum latitudinem*, cela ne suffit pas pour faire concevoir comment Newton a trouvé néanmoins la proposition *Undarum velocitas est in subduplicata ratione latitudinum* qui est exacte, et conforme à une des conséquences de nos formules.

Pour entendre cette proposition avec les idées de Newton, il faut observer qu'elle peut être établie sans avoir aucune connaissance de la théorie qui fournit nos deux équations [4] et [11]. Il suffisait de supposer par la simple contemplation du phénomène: 1.° Que le mouvement de l'eau, dans le sens vertical, produit par un ébranlement primitif, est exprimé par un terme périodique de la forme,

$$[33]\ \ldots\ldots\ldots \qquad z=H\cos.\left(\frac{gt^2}{mr}\right);$$

2.° Que le mouvement apparent de l'eau, dans le sens horizontal, est uniforme; c'est-à-dire tel que le rayon vecteur $r=wt$. 3.° Que le coefficient H est constant; 4.° Que le rapport $\frac{gt^2}{mr}$ doit être un fort grand nombre.

Ces quatre points admis, sans rien statuer d'abord sur la valeur absolue du coefficient m, Newton voyait: 1.° qu'en retenant la *même* distance r, et considérant l'oscillation qui s'y faisait dans le temps t', on devait avoir l'équation

$$[34]\ \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{g(t+t')^2}{mr}-\frac{gt^2}{mr}=\pi;$$

2.° Il voyait, qu'en retenant la même valeur de t pour deux valeurs consécutives r et $r+\lambda$ du rayon vecteur r, on devait avoir l'équation

$$[35]\ \ldots\ldots\ldots \qquad \frac{gt^2}{mr}-\frac{gt^2}{m(r+\lambda)}=\pi.$$

De ces deux équations, on tire

$$[36]\ \ldots\ldots\ldots \qquad \left\{\frac{2gtt'}{mr}=\pi;\qquad \frac{gt^2\lambda}{mr^2}=\pi\right\},$$

en vertu du quatrième *postulatum* de Newton, et par conséquent l'on a

$$[37] \ldots\ldots\ldots \quad \left\{ r = \frac{t \cdot \sqrt{g\lambda}}{\sqrt{m\pi}} \; ; \quad t' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{m\pi\lambda}{g}} \right\} .$$

Donc la vitesse de la propagation, c'est-à-dire $\frac{r}{t'}$, doit être une quantité proportionnelle à la racine carrée de λ. Et le mouvement ascentionnel de l'eau sera exprimé par

$$[38] \ldots\ldots\ldots \quad z = \cos. \left(\frac{t \cdot \sqrt{\pi g}}{\sqrt{m\lambda}} \right) .$$

Mais une telle manière de voir, n'offre aucun moyen pour déterminer le coefficient m: la seule théorie de Poisson pouvait établir qu'il doit être égal au nombre absolu 4, et que tout autre nombre est inadmissible. Newton, a supposé gratuitement que l'on devait faire $m = 2\pi$, afin de rendre les oscillations des ondes isochrones avec celles du pendule qui aurait une longueur égale à l'intervalle 2λ entre les sommets saillants de deux consécutives. D'après cette valeur de m l'on a

$$t' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{m\pi\lambda}{g}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{2g}} \; ;$$

au lieu de $t' = \pi \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{\pi g}}$. Mais cela n'empêche pas de dire que les oscillations qui ont lieu au même point de la surface liquide sont deux fois plus rapides que les oscillations qui ont lieu par le mouvement de propagation. Il est clair, d'après cette analyse, que la véritable difficulté du problème qui consistait dans la formation de l'équation [11] et dans la détermination de la connexion intime qu'il y a entre la largeur des ondes et la quantité M, donnée par les circonstances initiales, n'a nullement était surmontée par Newton. Ainsi, nous croyons pouvoir conclure, encore avec plus de raison, que n'en pouvait avoir Lagrange vers la fin de sa *Mécanique Analytique*, que « la *Théorie des Ondes de* Newton est absolument insuffisante pour expliquer ce phénomène ».

PROPAGATION DES ONDES

PAR MOUVEMENT APPARENT ACCÉLÉRÉ.

La *même* intégrale quadruple, qui donne les lois de la propagation des ondes par un mouvement apparent uniforme, renferme aussi les lois relatives aux ondes, qui, immédiatement après l'ébranlement primitif, se propagent par un mouvement uniformément accéléré avec une vitesse *indépendante* des circonstances initiales. La théorie de ces ondes est beaucoup plus facile que celle que nous venons d'exposer. Et il est important de faire ici ce rapprochement afin de mettre en contact cette double propriété de l'intégrale quadruple. Pour cela, nous remplacerons R par $R.e^{-mu}$ dans l'expression primitive de z, et nous regarderons le coefficient m, qui affecte l'exposant négatif $-mu$, comme une quantité auxiliaire très-petite, qui doit être faite égale à zéro *après* avoir exécutées les intégrations. Cela posé, si l'on développe $\cos.(t.\sqrt{gu})$ suivant les puissances positives du temps t, on reconnaîtra facilement, qu'en faisant

$$\Pi(i)=\frac{g^i t^{2i}}{1.2.3.....2i},$$

la valeur de z peut être écrite ainsi; savoir

$$z=-\frac{hll'}{g\pi^2}\cdot\frac{d^2.}{dt^2}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-s^2)\,s\,ds\,d\psi.\sum_1^\infty.\Pi(i)\frac{d.^i}{dm^i}\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-mu}\cos.(u\rho\cos.\omega)\,du\,d\omega.$$

Mais nous avons

$$\int_0^\infty e^{-mu}\cos.(u.\rho\cos.\omega)\,du=\frac{m}{m^2+\rho^2\cos.^2\omega}=\frac{2m}{2m^2+\rho^2+\rho^2\cos.2\omega};$$

donc, d'après la formule

$$\int_0^\pi\frac{d\varphi}{a+b\cos.\varphi}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

l'on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{\infty} e^{-mu} \cos.(u.\rho\cos.\omega)\,du = \frac{\pi}{2.\sqrt{m^2+\rho^2}} ;$$

et par conséquent,

$$z = -\frac{hll'}{2g\pi}.\frac{d^2.}{dl^2}.\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-s^2)\,s\,ds\,d\psi\,.\sum_1^{\infty}.\Pi(i)\frac{d^i.}{dm^i}(m^2+\rho^2)^{-\frac{1}{2}} .$$

Maintenant, à l'aide de l'équation connue;

$$\frac{d^i.}{dm^i}(m^2+\rho^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(1.2.3\ldots i)(\sqrt{-1})^i}{\pi(m^2+\rho^2)^{\frac{2i+1}{2}}}\int_0^{\pi} d\varpi\,(m.\sqrt{-1}+\rho\cos.\varpi)^i ,$$

il est clair que, en faisant $m=0$, on doit remplacer

$$\sum_1^{\infty}.\Pi(i)\frac{d^i.}{dm^i}(m^2+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}$$

par

$$\frac{\Pi(i)(1.2.3.\ldots.i)(\sqrt{-1})^i}{\pi\rho^{i+1}}\int_0^{\pi} d\varpi\,(\cos.\varpi)^i .$$

Et comme, pour toute valeur *impaire* de i, l'on a

$$\int_0^{\pi} d\varpi\,(\cos.\varpi)^i = 0 ,$$

nous remplacerons i par $2n$. En outre, il faut observer, que l'équation

$$\frac{1}{\rho^{2n+1}} = \frac{1}{r^{2n+1}}\left(1-\frac{2As}{r}+\frac{Bs^2}{r^2}\right)^{-\frac{(2n+1)}{2}} ,$$

devient

$$\frac{1}{\rho^{2n+1}} = \frac{1}{r^{2n+1}}\left\{1+(2n+1)\frac{As}{r}\right\} ,$$

en négligeant les termes multipliés par $\frac{l^2}{r^2}$.

D'un autre côté, il est manifeste, que le terme multiplié par A devient nul par l'intégration; de sorte que, il suffit de faire $\rho^{2n+1}=r^{2n+1}$. Alors, l'intégration relative à s et ψ donne immédiatement;

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-s^2)s\,ds.d\psi=\frac{\pi}{2}\,.$$

Mais on sait, que

$$\int_0^{\pi}d\varpi\,(\cos.\varpi)^{2n}=\frac{(1.2.3.....2n)\,\pi}{2^{2n}(1.2.3.....n)^2}\,.$$

Donc, en écrivant ces factorielles avec le signe de la fonction *gamma* de Legendre, si l'on fait

$$\frac{gt^2}{2r}=\sqrt{p}\,,$$

nous aurons

$$[39].....\quad z=-\frac{hll'}{4r^2}\cdot\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n(\sqrt{p})^{2n-1}[\Gamma(2n+1)]^2}{2[\Gamma(n+1)]^2.\Gamma(4n-1)}\,.$$

Cette formule remarquable étant différentiée, par rapport à r, donne l'équation $\frac{dz}{dr}=0$; c'est-à-dire

$$[40]....\quad \sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n.(2n+1)[\Gamma(2n+1)]^2}{2[\Gamma(n+1)]^2\Gamma(4n-1)}\cdot(\sqrt{p})^{2n-1}=0\,;$$

pour déterminer le *maximum* et le *minimum* de la valeur de z par rapport à r. On obtient par là la racine $p=7,4152$, qui donne

$$r=\frac{gt^2}{2.\sqrt{p}}=\frac{gt^2}{2}(0,3672)$$

pour le mouvement apparent des ondes, qui se propagent avec la plus grande vitesse par un mouvement uniformément accéléré. C'est le résultat donné par Poisson à la page 155 de son Mémoire.

Pour démontrer la convergence de la série soumise au signe $\sum_1^{\infty}$ il suffit de remarquer, que la formule de Legendre, posée à la page 290 du 1.er Volume des *Exercices de Calcul Intégral*, donne, en supposant n un fort grand nombre,

$$[41] \ldots\ldots \quad \left\{\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)}\right\}^2 \frac{(2n+1)}{\Gamma(4n-1)}(\sqrt{p})^{2n-1} =$$

$$\frac{4\cdot\sqrt{p}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(2n+1)}{\sqrt{2n-1}}\cdot\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{e\cdot\sqrt{p}}{2n-1}\right)^{2n-2}\left\{1+\frac{A'}{n}+\frac{A''}{n^2}+\text{etc.}\right\};$$

où e désigne la base des Logarithmes hyperboliques, et les coefficients A', A'', etc. des nombres faciles à calculer, d'après la formule que je viens de citer. On voit par cette analyse, que ces ondes sont indépendantes des conditions initiales, à cause que le facteur $h\,h'$ disparaît dans le passage de l'équation [39] à l'équation [40], et que la quantité p en est elle-même indépendante.

Turin, ce 18 novembre 1857.

MÉMOIRE

Sur le mouvement conique, à double courbure, *d'un pendule simple, dans le vide, abstraction faite de la rotation diurne de la Terre*

PAR

JEAN PLANA

Lu dans la Séance du 20 décembre 1857.

Les équations différentielles de ce mouvement sont, maintenant, bien connues sous les différentes formes dont elles sont susceptibles. Mais leur intégration complète, en s'aidant de tous les secours qu'offre la théorie moderne des transcendantes elliptiques, n'a pas encore été donnée, que je sache, avec les développemens propres à caractériser les lois définitives qui demeurent cachées sous le signe intégral. Je me suis proposé dans ce Mémoire d'exposer les calculs par lesquels on peut obtenir les principaux résultats de l'intégration, afin de les faire mieux apprécier, et démontrer ainsi la nécessité d'une correction qui doit être faite au N.° 21 du second Volume de la Mécanique Analytique de LAGRANGE (Section VIII).

§ I.

D'après les équations de ce mouvement, données dans le 2.^d^ Volume de la *Mécanique Analytique* (pages 194-199, édition de 1815), en excluant les cas particuliers de $\beta = 0$, et $\beta = \alpha$ (qui doivent être traités à part), les formules générales, en plaçant l'origine du temps à l'instant du passage du pendule par sa plus petite distance angulaire β de la verticale, sont celles-ci (où j'ai remplacé la lettre σ par θ); savoir

$$[1] \ldots\ldots\ldots \quad \cos.\psi = \cos.\alpha \,.\, \sin.^2\theta + \cos.\beta \,.\, \cos.^2\theta \;;$$

$$[2] \ldots\ldots\ldots \quad Gt = \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\Delta} \;;$$

$$[3] \ldots\ldots\ldots \quad \varsigma = \frac{\sin.\alpha \,.\, \sin.\beta}{(1+\cos.\beta)\,.\,\sqrt{M'}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{(1-k'\sin.^2\theta)\,\Delta} + \frac{\sin.\alpha \,.\, \sin.\beta}{(1-\cos.\beta)\,.\,\sqrt{M'}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{(1+k''\sin.^2\theta)\,\Delta} ;$$

en faisant,

$$M' = 1 + 2\cos.\alpha\cos.\beta + \cos.^2\beta \; ; \qquad \sqrt{1-c^2\sin.^2\theta} = \Delta \; ;$$

$$G = \sqrt{\frac{g}{2r}} \cdot \sqrt{\frac{M'}{\cos.\alpha + \cos.\beta}} \; ;$$

$$c^2 = \frac{\cos.^2\beta - \cos.^2\alpha}{M'} \; ;$$

$$k' = \frac{\cos.\beta - \cos.\alpha}{1+\cos.\beta} \; ; \qquad k'' = \frac{\cos.\beta - \cos.\alpha}{1-\cos.\beta} \; .$$

Pour avoir l'expression de $\cos.\psi$ en fonction du temps t, explicitement, il faudra appliquer ici la série fort convergente, donnée par Legendre à la page 133 du 3.ème Volume de son Traité des *Fonctions elliptiques;* ce qui transforme l'équation [1] en celle-ci; savoir

$$[4] \ldots\ldots\ldots \quad \cos.\psi = \cos.\beta - \frac{4\pi^2 M' \,.\, q \,.\, U}{(\cos.\beta + \cos.\alpha)\,[F'(c)]^2} \; ;$$

en posant

$$[5] \ldots\ldots\ldots \quad n' = \frac{F'(b)}{F'(c)} \; , \qquad q = e^{-\pi n'} \; ;$$

$$[6] \ldots\ldots\ldots \quad U = \frac{1}{1-q^2}\sin.^2\left\{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{Gt}{F'(c)}\right\} + \frac{2q}{1-q^4}\sin.^2\left\{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2Gt}{F'(c)}\right\} + \frac{3q}{1-q^6}\sin.^2\left\{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3Gt}{F'(c)}\right\} + \text{etc.}$$

Lorsque c est une petite fraction, on peut faire

$$F'(c) = \frac{\pi}{2} \; ; \qquad F'(b) = \text{Log. hyp.}^{\text{e}}\left(\frac{4}{c}\right) \; ,$$

et l'on a $q = \frac{c^2}{16}$, et plus exactement

$$q=\frac{c^2}{16}\left(1+\frac{1}{2}c^2+\frac{21}{64}c^4+\text{etc.}\right).$$

Pour plus de clarté, je donne absolument l'exclusion aux deux cas particuliers de $\beta=0$ et $\beta=\alpha$, afin d'éviter d'avoir $k''=\infty$, ou $c^2=0$. Néanmoins, si l'on veut, à toute force, comprendre ces deux cas dans les formules [1], [2] et [3], il faut observer: 1.° Qu'en faisant $\beta=0$, le produit $(1-\cos.\beta)(1+k''\sin.^2\theta)$ étant égal à

$$1-\cos.\beta+(\cos.\beta-\cos.\alpha)\sin.^2\theta$$

devient égal à $(1-\cos.\alpha)\sin.^2\theta$. De sorte que l'équation [3] donne rigoureusement $\varphi=0$ en posant $\beta=0$; ce qui est conforme à l'équation différentielle

$$\sin.^2\psi.\frac{d\varphi}{dt}=C=\sqrt{\frac{2g}{r}}.\frac{\sin.\alpha\sin.\beta}{\sqrt{\cos.\alpha+\cos.\beta}},$$

qui donne alors $\frac{d\varphi}{dt}=0$; c'est-à-dire $\varphi=$ constante. La courbe décrite par le pendule est donc entièrement située dans le plan vertical qui passe par le point de suspension, et se projette suivant l'axe des x. On doit, par conséquent, avoir $y=0$ pour tous ses points, ce qui exige que l'on ait $\varphi=0$.

2.° Qu'en faisant $\beta=\alpha$, l'on a $c^2=0$, $k'=0$, $k''=0$; ce qui réduit les équations [2] et [3] à celles-ci; savoir

$$t.\sqrt{\frac{g}{2r}}\sqrt{\frac{1+3\cos.^2\alpha}{2\cos.\alpha}}=\theta;$$

$$\varphi=\frac{2}{\sqrt{1+3\cos.^2\alpha}}.\theta=t.\sqrt{\frac{g}{r\cos.\alpha}}.$$

Et comme, d'un autre côté, l'équation [1] se réduit à

$$\cos.\psi=\cos.\alpha=\text{quantité constante},$$

il faut en conclure que les deux équations

$$\cos.\psi=\cos.\alpha,\qquad \varphi=t.\sqrt{\frac{g}{r\cos.\alpha}}$$

s'accordent avec celles du mouvement conique et circulaire considéré par Huygens, qui a remarqué le premier l'isochronisme qui l'accompagne

avec la double égalité de l'impulsion rapportée à l'unité de distance de la verticale, et de la hauteur des différents cônes.

§ II.

Maintenant revenons au cas général. Si, conformément à la théorie des transcendantes elliptiques de troisième espèce, *à paramètre circulaire*, on fait

$$N' = 1 + 2\cos.\alpha\cos.\beta + \cos.^2\alpha \; ; \qquad 1 - c^2 = b^2 = \frac{N'}{M'} \; ;$$
$$k' = 1 - b^2\sin.^2\lambda \; ; \qquad k'' = \cot.^2\varpi \; ;$$

les deux angles auxiliaires ϖ et λ seront déterminés par les équations

$$[7] \ldots\ldots \qquad \text{tang.}\,\varpi = \frac{\sqrt{2}\,.\,\sin.\tfrac{1}{2}\beta}{\sqrt{\cos.\beta - \cos.\alpha}} \; ;$$

$$[8] \ldots \begin{cases} \text{tang.}\,\lambda = \sqrt{\dfrac{M'}{2}}\cdot\dfrac{\cos.\frac{1}{2}\alpha}{\sin.\frac{1}{2}\alpha\,.\,\sin.\frac{1}{2}\beta\,.\,\sqrt{\cos.\beta - \cos.\alpha}} \; ; \\ \text{tang.}\left(\dfrac{\pi}{2} - \lambda\right) = \dfrac{\sqrt{2}\,.\,\sin.\frac{1}{2}\alpha\,.\,\sin.\frac{1}{2}\beta\,.\,\sqrt{\cos.\beta - \cos.\alpha}}{\sqrt{M'}\,.\,\cos.\frac{1}{2}\alpha} \; . \end{cases}$$

S'il fallait démontrer, que le paramètre k' est exprimé de manière que l'on a $\sin.^2\lambda < 1$, il suffirait de remarquer que l'inégalité $N' > M'(1 - k')$ est satisfaite, puisqu'elle est réductible à $1 > \cos.\alpha$.

Cela posé, en intégrant depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, et désignant par T et Φ les valeurs correspondantes de t et φ, nous aurons

$$[9] \ldots\ldots\ldots \qquad GT = F^1(c) \; ;$$

$$[10] \ldots \Phi = \sqrt{\frac{4}{M'}}\,.\,\sin.\tfrac{1}{2}\alpha\,.\,\cos.\tfrac{1}{2}\alpha\left\{\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\beta\,.\,\Pi^1(-k') + \cot.\tfrac{1}{2}\beta\,.\,\Pi^1(k'')\right\} ,$$

où (suivant la notation de LEGENDRE) ;

$$F^1(c) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - c^2\sin.^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\Delta} \; ;$$

$$\Pi^1(-k') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 - k'\sin.^2\theta)\,\Delta} \; ; \qquad \Pi^1(k'') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1 + k''\sin.^2\theta)\,\Delta} \; .$$

Ces transcendantes elliptiques de troisième espèce étant *complètes*, sont réductibles à celles de première et seconde espèce, à l'aide des formules de LEGENDRE données aux pages 134 et 138 du premier Volume de son grand Traité sur ces fonctions. Pour cela, remarquons que si l'on fait

$$P=\frac{\sqrt{1-b^2\sin.^2\lambda}}{b^2\sin.\lambda.\cos.\lambda}\;;\qquad Q=\frac{\sin.\varpi.\cos.\varpi}{\sqrt{1-b^2\sin.^2\varpi}}\;;$$

$$M''=M'+(\cos.\beta-\cos.\alpha)(1-\cos.\beta)\;;$$

l'on a, en fonctions de α et β;

$$[11]\ldots\ldots\quad \sin.\varpi.\cos.\varpi=\frac{\tang.\varpi}{1+\tang.^2\varpi}=\frac{\sin.\frac{1}{2}\beta}{\sqrt{2}.\sin.^2\frac{1}{2}\alpha}\cdot\sqrt{\cos.\beta-\cos.\alpha}\;;$$

$$\tang.\varpi.\sin.\varpi.\cos.\varpi=\frac{\sin.^2\frac{1}{2}\beta}{\sin.^2\frac{1}{2}\alpha}\;;$$

$$[12]\ldots\ldots\quad \sqrt{1-b^2\sin.^2\varpi}=\sqrt{\frac{M''}{2M'}}\cdot\frac{\sqrt{\cos.\beta-\cos.\alpha}}{\sin.\frac{1}{2}\alpha}\;;$$

$$[13]\ldots\ldots\quad \left\{P=\sqrt{M'}\cdot\frac{\cos.\frac{1}{2}\beta}{\sin.\alpha.\sin.\frac{1}{2}\beta}\;;\qquad Q=\frac{\sin.\frac{1}{2}\beta}{\sin.\frac{1}{2}\alpha}\cdot\sqrt{\frac{M'}{M''}}\right.,$$

et par conséquent

$$[14]\ldots\ldots\quad \Pi'(-k')=F'(c)+\frac{\pi.\sqrt{M'}}{2}\cdot\frac{\cot.\frac{1}{2}\beta}{\sin.\alpha}$$
$$+\frac{\sqrt{M'}.\cot.\frac{1}{2}\beta}{\sin.\alpha}\left\{F(b,\lambda)\left[F'(c)-E'(c)\right]-F'(c)E(b,\lambda)\right\}\;;$$

$$[15]\ldots\ldots\quad \Pi'(k'')=\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{M'}{M''}}\cdot\frac{\sin.\frac{1}{2}\beta}{\sin.\frac{1}{2}\alpha}+F'(c)\frac{\sin.^2\frac{1}{2}\beta}{\sin.^2\frac{1}{2}\alpha}$$
$$+\sqrt{\frac{M'}{M''}}\cdot\frac{\sin.\frac{1}{2}\beta}{\sin.\frac{1}{2}\alpha}\left\{F(b,\varpi)\left[F'(c)-E'(c)\right]-F'(c)E(b,\varpi)\right\}.$$

En substituant ces valeurs, l'équation [10] donne

$$[16]\ldots\ldots\quad \Phi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha.\cos.\tfrac{1}{2}\beta.\sqrt{\frac{4}{M''}}$$
$$+\frac{F'(c)}{\sqrt{M'}}\left\{\frac{\sin.\beta}{\tang.\frac{1}{2}\alpha}+\frac{\sin.\alpha}{\cot.\frac{1}{2}\beta}\right\}$$
$$+F'(c)\left\{H''+\frac{2}{\sqrt{M''}}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha.\cos.\tfrac{1}{2}\beta.H'''\right\}\;;$$

où l'on a fait

$$H'' = \left(1 - \frac{E'(c)}{F'(c)}\right) F(b, \lambda) - E(b, \lambda) \; ;$$

$$H''' = \left(1 - \frac{E'(c)}{F'(c)}\right) F(b, \varpi) - E(b, \varpi) \; .$$

Cette formule remarquable comprend le cas de $\beta = 0$. Car, alors, l'on a

$$\varpi = 0 \; ; \qquad \lambda = \frac{\pi}{2} \; ; \qquad M' = M'' = 2(1 + \cos.\alpha) \; ;$$

$$F(b, \varpi) = 0 \; ; \qquad E(b, \varpi) = 0 \; ;$$

et par conséquent

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - \left\{ F'(c) E'(b) + E'(c) F'(b) - F'(c) F'(b) \right\} .$$

Mais on sait que cette fonction de b et c est égale à $\frac{\pi}{2}$ (Voyez p. 61 du Tom. 1.er des fonctions elliptiques de LEGENDRE): donc l'on a

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \; .$$

Pour démontrer que la formule [16] ne comprend pas le cas de $\beta = \alpha$, il faut remarquer, que dans ce cas l'on a

$$c^2 = 0 \; , \qquad b^2 = 1 \; , \qquad \lambda = \varpi = \frac{\pi}{2} \; , \qquad E(b, \varpi) = 1 \; ,$$

$$F'(c) = E'(c) = \frac{\pi}{2} \; .$$

De sorte que

$$\Phi = \frac{\pi}{\sqrt{1 + 3\cos.^2\alpha}} \; ,$$

tandis que, conformément à l'équation

$$\Phi = t \, . \sqrt{\frac{g}{r\cos.\alpha}} \; ,$$

on doit avoir $\Phi = \frac{\pi}{2}$, lorsque $t = T = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{r\cos.\alpha}{g}}$.

La formule [16], applicable au cas général, est éminemment propre pour démontrer, que, même en négligeant les quantités de l'ordre du

carré des deux angles α et β, l'on aurait pour Φ une expression transcendante.

En effet, si l'on y fait

$$M'=M''=4\ ;\qquad F'(c)=E'(c)=\frac{\pi}{2}\ ;\qquad \sin.\beta.\cot.\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{2\beta}{\alpha}\ ,$$

l'on a d'abord;

$$[17]\ \ldots\quad \Phi=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\sin.\beta}{\sqrt{M'}\tang.\frac{1}{2}\alpha}\right)-\frac{\pi}{2}\left\{E(b,\lambda)+E(b,\varpi)\right\}\ .$$

Pour réduire la somme de ces deux transcendantes elliptiques de seconde espèce à une seule, on fera, d'après les formules connues;

$$\tang.\lambda'=\tang.\lambda.\sqrt{1-b^2\sin.^2\varpi}=\frac{\sqrt{M''}\cos.\frac{1}{2}\alpha}{2\sin.\frac{1}{2}\beta.\sin.^2\frac{1}{2}\alpha}\ ;$$

$$\tang.\varpi'=\tang.\varpi.\sqrt{1-b^2\sin.^2\lambda}=\tang.\tfrac{1}{2}\beta\ ;$$

$$\mu'=\lambda'+\tfrac{1}{2}\beta\ ;$$

et l'on aura

$$E(b,\lambda)+E(b,\varpi)=E(b,\mu')+b^2\sin.\lambda.\sin.\varpi.\sin.\mu'\ .$$

Mais

$$\sin.\lambda=\frac{1}{b}\cdot\frac{\cos.\frac{1}{2}\alpha}{\cos.\frac{1}{2}\beta}\ ;\qquad \sin.\varpi=\frac{\sin.\frac{1}{2}\beta}{\sin.\frac{1}{2}\alpha}\ ,$$

partant

$$b^2\sin.\lambda.\sin.\varpi.\sin.\mu'=\frac{b\sin.\lambda'.\sin.\frac{1}{2}\beta}{\tang.\frac{1}{2}\alpha}+\frac{b\cos.\lambda'.\sin.^2\frac{1}{2}\beta}{\cos.\frac{1}{2}\beta.\tang.\frac{1}{2}\alpha}\ .$$

Et comme en posant

$$M'''=M''\cos.^2\tfrac{1}{2}\alpha+4\sin.^2\tfrac{1}{2}\beta.\sin.^4\tfrac{1}{2}\alpha\ ,$$

l'on a;

$$\sin.\lambda'=\cos.\tfrac{1}{2}\alpha.\sqrt{\frac{M''}{M'''}}\ ;\qquad \cos.\lambda'=\frac{2\sin.\frac{1}{2}\beta.\sin.^2\frac{1}{2}\alpha}{\sqrt{M'''}}\ ,$$

nous pouvons faire $\sin.\lambda'=1$, $\cos.\lambda'=0$. Alors l'équation précédente se réduit à

$$b^2\sin.\lambda.\sin.\varpi.\sin.\mu'=\sqrt{\frac{N'}{M'}}\cdot\frac{\sin.\frac{1}{2}\beta}{\tang.\frac{1}{2}\alpha}\ .$$

De sorte que nous avons

$$[18]\ \ldots\ldots\quad E(b,\lambda)+E(b,\varpi)=E(b,\mu')+\sqrt{\frac{N'}{M'}}\cdot\frac{\sin.\frac{1}{2}\beta}{\tang.\frac{1}{2}\alpha}\ .$$

L'équation [17] devient en conséquence

$$\Phi = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{\sin.\beta - \sqrt{N'}.\sin.\frac{1}{2}\beta}{\sqrt{M'}.\tang.\frac{1}{2}\alpha}\right\} - \frac{\pi}{2}E(b,\mu') \ ;$$

où $\mu' = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right)$. Donc en faisant $\beta' = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$, l'on aura

$$E(b,\mu') = 2E'(b) - E(b,\beta') \ .$$

La série $E'(b) = 1 + \frac{c^2}{2}\text{Log.}\left(\frac{4}{c}\right) + \text{etc.}$, donne $E'(b) = 1$, en négligeant le produit $\frac{c^2}{2}\text{Log.}\left(\frac{4}{c}\right)$; partant l'on a

$$[19] \ldots \quad \Phi = \frac{\pi}{2.\sqrt{M'}}\left\{\frac{\sin.\beta - \sqrt{N'}.\sin.\frac{1}{2}\beta}{\tang.\frac{1}{2}\alpha}\right\} + \frac{\pi}{2}E(b,\mu') \ .$$

Mais, en négligeant les quantités du second ordre, l'on a $N' = 4 = M'$, et $\sin.\beta - \sqrt{N'}.\sin.\frac{1}{2}\beta = 0$; donc la valeur de Φ est telle que, dans une première approximation, l'on a ;

$$[20] \ldots \quad \Phi = \frac{\pi}{2}E(b,\beta') = \frac{\pi}{2}\int_0^{\beta'} d\theta.\sqrt{1 - \frac{N'}{M'}.\sin.^2\theta} \ ,$$

c'est-à-dire, une expression transcendante.

Maintenant j'observe que, s'il fallait évaluer cette intégrale avec une très-grande approximation, il faudrait employer les méthodes exposées par LEGENDRE dans le second Volume (page 95 et suiv.) de son Traité des fonctions elliptiques, à cause de la proximité de l'angle droit, soit à l'égard de l'amplitude β', soit à l'égard de l'angle du *module* $\frac{N'}{M'}$. Mais on peut démontrer que, en général, l'unité est une valeur fort approchée de cet arc elliptique. En effet; soit β'' une seconde amplitude telle que l'on ait

$$\tang.\beta'.\tang.\beta'' = \sqrt{\frac{M'}{N'}} = \frac{\tang.\beta''}{\tang.\frac{1}{2}\beta} \ .$$

Il est clair que l'arc β'' est plus grand que l'arc $\frac{1}{2}\beta$, puisque $M' > N'$; mais sa valeur est néanmoins fort petite; car la série de LAMBERT donne

$$\beta'' = \tfrac{1}{2}\beta + \frac{\sqrt{M'} - \sqrt{N'}}{\sqrt{M'} + \sqrt{N'}}.\sin.\beta + \text{etc.}$$

On peut donc évaluer l'arc elliptique $E(b, \beta'')$ par la formule donnée par LEGENDRE à la page 89 du Volume que je viens de citer. Et comme il suffit ici de prendre son premier terme, l'on a

$$E(b, \beta'') = \frac{1}{b} \sin. b . \beta'' = \sin. \tfrac{1}{2} \beta \ .$$

Mais l'équation

$$E(b, \beta') + E(b, \beta'') = E'(b) + b^2 \sin. \beta' . \sin. \beta'',$$

démontre que l'on a

$$E(b, \beta') = E'(b) + b^2 \sin. \tfrac{1}{2} \beta . \cos. \tfrac{1}{2} \beta - \sin. \tfrac{1}{2} \beta \ ;$$

c'est-à-dire $E(b, \beta') = 1$, en négligeant le produit $\frac{c^2}{2} \text{Log.} \left(\frac{4}{c} \right)$, et les quantités du second ordre. Ainsi, d'après cette discussion, on peut réduire la valeur précédente de Φ à

[21] ..... $\Phi = \frac{\pi}{2} \ .$

La grande simplicité de ce résultat fait un contraste frappant avec la complication de l'analyse par laquelle il est établi. En le rapprochant de l'équation [16], on reconnaît maintenant, que la fonction des deux angles α, β, qui suit le premier terme $\frac{\pi}{2}$, doit être à fort peu-près égale à zéro, dans le cas des petites oscillations du pendule, tout autour de la verticale.

Il est par là démontré que l'amplitude *horizontale* de chaque oscillation sera de 90°, en négligeant les quantités du second ordre. Ce résultat constant, à travers les variations des conditions initiales, déterminées par les équations générales

$$v^2 = Er^2 + 2gr \cos. \psi \ ;$$

$$rC = v \left(\cos. \varphi . \frac{dy}{ds} - \sin. \varphi . \frac{dx}{ds} \right) \sin. \psi \ ;$$

$$Er^2 < 0 \ ;$$

où E et C sont deux constantes arbitraires, et v désigne la vitesse avec laquelle est parcouru un élément quelconque ds de la courbe décrite par le pendule, n'est pas moins remarquable que celui de son isochronisme qui a lieu avec le même degré d'approximation, conformément à notre équation [9].

§ III.

Pour mieux apprécier la valeur de l'amplitude horizontale dans le cas des petites oscillations coniques du pendule tout autour de la verticale, j'ajouterai que la formule [16], en tenant compte des quantités du *second ordre*, donne

$$[22] \ldots\ldots \qquad \Phi = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{5}{24}\alpha\beta + \frac{\beta^2}{8}\right\} - \frac{\pi}{16}\cdot\frac{\beta^3}{\alpha} \ .$$

En effet, nous avons d'abord

$$\Phi = \pi + \frac{\pi.\beta^2}{16} + \frac{\pi}{8}\alpha.\beta + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\left(1 + \frac{5}{48}\alpha^2 + \frac{\beta^2}{48}\right)$$
$$- \frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{16}\right\}\Big\{E(b, \lambda) + E(b, \varpi)\Big\}$$
$$- \frac{\pi}{16}\beta^2.E(b, \varpi) + \frac{\pi}{16}(\alpha^2 - \beta^2)\Big\{F(b, \lambda) + F(b, \varpi)\Big\} \ ;$$

où, à cause des facteurs du second ordre $-\frac{\pi.\beta^2}{16}$, $\frac{\pi}{16}(\alpha^2 - \beta^2)$, on peut faire

$$E(b, \varpi) = \sin.\varpi = \frac{\sin.\frac{1}{2}\beta}{\sin.\frac{1}{2}\alpha} \ ;$$

$$F(b, \lambda) + F(b, \varpi) = F(b, \mu') = 2F'(b) - F(b, \beta') \ ;$$

$$F(b, \lambda) + F(b, \varpi) = F'(b) + F(b, \tfrac{1}{2}\beta) \ ;$$

$$F(b, \lambda) + F(b, \varpi) = \text{Log.}\left(\frac{4}{c}\right) + \frac{1}{b}\text{Log. tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b.\beta}{4}\right) \ ;$$

$$\frac{1}{b}\text{Log. tang.}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{b.\beta}{4}\right) = \frac{1}{b}\text{Log.}\left\{\frac{1 + \text{tang.}\frac{b.\beta}{4}}{1 - \text{tang.}\frac{b.\beta}{4}}\right\} = \frac{2}{b}\text{tang.}\frac{b.\beta}{4} \ ;$$

et par conséquent

$$E(b, \varpi) = \frac{\beta}{\alpha} \ ;$$

$$F(b, \lambda) + F(b, \varpi) = \tfrac{1}{2}\text{Log.}\left(\frac{64}{\alpha^2 - \beta^2}\right) .$$

L'équation [18], en y remplaçant $\sqrt{\frac{N'}{M'}}$ par $1-\frac{\alpha^2}{8}+\frac{\beta^2}{8}$, et $\frac{\sin.\frac{1}{2}\alpha}{\text{tang.}\frac{1}{2}\beta}$ par $\frac{\beta}{\alpha}\cdot\left(1-\frac{\beta^2}{24}-\frac{\alpha^2}{12}\right)$, devient

$$E(b,\lambda)+E(b,\varpi)=E(b,\mu')+\frac{\beta}{\alpha}\cdot\left(1-\frac{5}{24}\alpha^2+\frac{\beta^2}{12}\right);$$

et comme

$$E(b,\mu')=2E'(b)-E(b,\beta');$$

$$E(b,\beta')=E'(b)-E\left(b,\frac{\beta}{2}\right)+\frac{b^2}{2}\sin.\beta;$$

$$E(b,\beta')=E'(b)-\frac{1}{b}\sin.b.\frac{\beta}{2}+\frac{b^2}{2}\sin.\beta=E'(b);$$

il est clair que l'on a

$$E(b,\lambda)+E(b,\varpi)=E'(b)+\frac{\beta}{\alpha}\left(1-\frac{5}{24}\alpha^2+\frac{\beta^2}{12}\right).$$

En substituant pour $E'(b)$ les deux premiers termes

$$1-\frac{c^2}{4}+\frac{c^2}{2}\text{Log.}\left(\frac{4}{c}\right),$$

nous aurons

$$E(b,\lambda)+E(b,\varpi)=1-\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{16}\right)+\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{16}\right)\text{Log.}\left(\frac{64}{\alpha^2-c^2}\right)$$
$$+\frac{\beta}{\alpha}\cdot\left(1-\frac{5}{24}\alpha^2+\frac{\beta^2}{12}\right);$$

et par conséquent

$$-\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{\alpha^2-\beta^2}{16}\right\}\left\{E(b,\lambda)+E(b,\varpi)\right\}$$
$$=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\left(1-\frac{7}{48}\alpha^2+\frac{\beta^2}{48}\right)-\frac{\pi}{32}(\alpha^2-\beta^2)\text{Log.}\left(\frac{64}{\alpha^2-\beta^2}\right).$$

En substituant ces différentes valeurs dans l'expression précédente de Φ l'on aura

$$\Phi=\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi.\beta^2}{16}+\frac{\pi}{8}\alpha\beta+\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\left\{1-1+\left(\frac{5}{48}-\frac{7}{48}\right)\alpha^2+\left(\frac{1}{48}-\frac{1}{48}-\frac{1}{8}\right)\beta^2\right\}$$
$$-\frac{\pi}{32}(\alpha^2-\beta^2)(1-1)\text{Log.}\left(\frac{64}{\alpha^2-\beta^2}\right);$$

et en réduisant l'on obtient l'équation [22].

J'ai exposé les détails de ce calcul, afin de démontrer, que les séries par lesquelles LAGRANGE a développé les deux transcendantes elliptiques de troisième espèce dans la Mécanique Analytique, peuvent suffire pour donner exactement le premier terme $\frac{\pi}{2}$, mais non pour obtenir exactement le second terme, c'est-à-dire la partie du second ordre relativement aux deux angles α et β. En effet, les séries de LAGRANGE donnent

$$[23] \ldots\ldots \qquad \Phi = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{3}{8}\alpha\beta + \frac{\beta^2}{8} + \frac{\alpha^2}{8}\right\},$$

au lieu de notre équation [22]. Et comme le calcul qui fournit ce résultat est un peu compliqué, je vais exposer de quelle manière on y parvient.

§ IV.

Après avoir corrigé la valeur de A'', qui doit être

$$A'' = \frac{1}{1 - \text{tang.}^2\nu} = \frac{\cos.^2\nu}{\cos.2\nu},$$

l'équation posée au fond de la page 202 du second Volume de la Mécanique Analytique, donne

$$\Phi = \frac{\pi\alpha\beta}{8} + \frac{\sqrt{2}.\pi\cos.\frac{1}{2}\alpha.\cos.\frac{1}{2}\beta\{A + B\,\text{tang.}\,\nu + C\,\text{tang.}^2\nu\}}{\cos.\gamma.\sqrt{M' + N'}}.$$

Mais l'équation

$$\sin.2\gamma = \frac{M' - N'}{M' + N'};$$

donne

$$\text{tang.}\,\gamma = \frac{\sqrt{M'} - \sqrt{N'}}{\sqrt{M'} + \sqrt{N'}};$$

partant nous avons

$$\cos.\gamma.\sqrt{2}.\sqrt{M' + N'} = \sqrt{M'} + \sqrt{N'};$$

$$\Phi = \frac{\pi\alpha\beta}{8} + \frac{2\pi\cos.\frac{1}{2}\alpha.\cos.\frac{1}{2}\beta\{A + B\,\text{tang.}\,\nu + C\,\text{tang.}^2\nu\}}{\sqrt{M'} + \sqrt{N'}}.$$

Cela posé, si l'on remarque que,

$$A = 1 + \tfrac{1}{4}\,\text{tang.}^2\gamma\;; \qquad B = -\,\text{tang.}\,\gamma\;; \qquad C = \tfrac{3}{4}\,\text{tang.}^2\gamma\;;$$

on devra négliger les termes multipliés par $\text{tang.}^2\gamma$, et alors l'on a;

$$\Phi = \frac{\pi\alpha\beta}{8} + \frac{2\pi \cos.\frac{1}{2}\alpha . \cos.\frac{1}{2}\beta}{\sqrt{M'}+\sqrt{N'}} - \frac{2\pi.(\sqrt{M'}-\sqrt{N'})}{(\sqrt{M'}+\sqrt{N'})^2}\,\text{tang.}\,\nu\ .$$

L'équation

$$\text{tang.}\,\nu = \frac{\sin. 2\nu}{1+\sqrt{1-\sin.^2 2\nu}}\ ,$$

en y substituant pour $\sin. 2\nu$ sa valeur

$$\sin. 2\nu = \frac{\cos.\beta - \cos.\alpha}{2-\cos.\alpha-\cos.\beta}\ ,$$

donne

$$\text{tang.}\,\nu = \frac{\sin.\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin.\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{[1-\cos.\frac{1}{2}(\alpha+\beta)][1+\cos.\frac{1}{2}(\alpha-\beta)]}\ ;$$

d'où l'on tire

$$\text{tang.}\,\nu = \frac{\text{tang.}\frac{1}{4}(\alpha-\beta)}{\text{tang.}\frac{1}{4}(\alpha+\beta)}\ .$$

Donc en négligeant les quantités d'un ordre supérieur au second l'on aura;

$$\sqrt{M'} = 2\left(1-\frac{\alpha^2}{8}-\frac{\beta^2}{4}\right)\ ; \qquad \sqrt{N'} = 2\left(1-\frac{\beta^2}{8}-\frac{\alpha^2}{4}\right)\ ;$$

$$\Phi = \frac{\pi\alpha\beta}{8} + \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3}{16}\alpha^2+\frac{3}{16}\beta^2\right) - \frac{\pi}{32}(\alpha-\beta)^2\ ;$$

c'est-à-dire en réduisant, et ajoutant $\frac{\pi}{2}$;

$$\Phi = \frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{3\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2}{8}\right\}\ .$$

La valeur de Φ donnée à la page 354 du second Volume de la Mécanique Analytique (édition de 1855) contient seulement le terme du second ordre $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{8}\cdot\alpha\beta$; ce qui n'est pas conforme aux équations de LAGRANGE.

Il est probable que, LAGRANGE, a composé cette analyse sur le mouvement conique du pendule peu de temps avant sa mort, et même après la publication, en 1811, du premier Volume des *Exercices de Calcul Intégral* par LEGENDRE. Mais on peut présumer qu'il n'a pas consulté cet ouvrage dans le cours de ses méditations sur ce problème; autrement il aurait reconnu lui-même qu'il y avait un vice radical dans son analyse.

L'idée d'introduire, de prime abord, les deux angles α et β, au lieu des constantes arbitraires immédiatement connues par la position et la vitesse initiale du pendule, simplifie les expressions différentielles du mouvement angulaire dans le sens vertical et dans le sens horizontal. Mais dès qu'il s'agissait de les intégrer, il fallait recourir à une théorie plus avancée sur les transcendantes elliptiques.

Les réflexions qui accompagnent l'équation $\Phi = \frac{\pi\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$ que LAGRANGE obtenait dans le N.° 21 de la Mécanique Analytique sont d'autant plus singulières, que la véritable valeur de $\Phi = \frac{\pi}{2}$, avait été donnée par EULER dès l'année 1736: car, à la page 498 du second Volume de sa *Mechanica*, cor.e 6, il est dit, que dans ce mouvement du pendule: *Si curva descripta non fuerit circulus sed figura proxima, atque BO valde parvum; erit angulus inter duas absides* 90° *seu rectus.*

Toutefois, il faut avouer, que la démonstration d'EULER, fondée sur un cas particulier de la théorie des forces centrales, est d'autant moins satisfaisante qu'elle est par là assujettie à la condition que la différence $\alpha - \beta$ soit fort petite.

§ V.

Il y a une autre expression de l'angle Φ, qu'il peut être utile de voir rapprochée de la précédente; c'est celle qu'on obtient en prenant l'ordonnée verticale z du pendule pour la variable indépendante. En effet, la combinaison des deux équations différentielles de LAGRANGE,

$$d\varphi = \frac{Crdt}{r\sin.^2\psi} = \frac{Crdt}{r(1-\cos.^2\psi)} \; ;$$

$$rdt = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(\cos.\alpha - \cos.\psi)(\cos.\psi - \cos.\beta)\left(\cos.\psi + \frac{1+\cos.\alpha.\cos.\beta}{\cos.\alpha+\cos.\beta}\right)}}$$

donne, après avoir fait $A = r\cos.\alpha$, $A' = r\cos.\beta$, en intégrant depuis $z = A$ jusqu'à $z = A'$,

$$\Phi = r.\sqrt{(r^2-A^2)(r^2-A'^2)}\int_A^{A'} \frac{dz}{(r^2-z^2).\sqrt{ZZ'}} \; ;$$

où l'on a

$$Z=(A-z)(z-A')\ ;\qquad Z'=z(A+A')+AA'+r^2\ .$$

Cela posé, il est facile d'avoir deux limites de l'angle Φ, sans l'emploi des transcendantes elliptiques. Pour cela remarquons que l'on a, pour tous les éléments de cette intégrale définie;

$$Z'>A(A+A')+AA'+r^2\ ;\quad Z'<A'(A+A')+AA'+r^2\ .$$

Donc, il est évident que l'on a

$$\Phi<\frac{r.\sqrt{(r^2-A^2)(r^2-A'^2)}}{\sqrt{r^2+A^2+2AA'}}.\int_A^{A'}\frac{dz}{(r^2-z^2).\sqrt{Z}}\ ;$$

$$\Phi>\frac{r.\sqrt{(r^2-A^2)(r^2-A'^2)}}{\sqrt{r^2+A'^2+2AA'}}.\int_A^{A'}\frac{dz}{(r^2-z^2).\sqrt{Z}}\ .$$

Maintenant, si l'on remarque que

$$\int\frac{dz}{(r^2-z^2).\sqrt{Z}}=\frac{1}{2r}.\int\frac{dz}{(r+z).\sqrt{Z}}+\frac{1}{2r}.\int\frac{dz}{(r-z).\sqrt{Z}}\ ;$$

et que

$$\int_A^{A'}\frac{dz}{(r+z).\sqrt{Z}}=\frac{\pi}{\sqrt{(r+A)(r+A')}}\ ;$$

$$\int_A^{A'}\frac{dz}{(r-z).\sqrt{Z}}=\frac{\pi}{\sqrt{(r-A)(r-A')}}\ ;$$

$$\sqrt{(r+A)(r+A')}+\sqrt{(r-A)(r-A')}$$

$$=\sqrt{2}.\sqrt{r^2+AA'+\sqrt{r^2-A^2)(r^2-A'^2)}}\ ,$$

on trouvera, en remplaçant A par $r\cos.\alpha$, et A' par $r\cos.\beta$;

$$\Phi<\frac{\pi}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{\frac{1+\cos.\alpha.\cos.\beta+\sin.\alpha.\sin.\beta}{1+\cos.^2\alpha+2\cos.\alpha.\cos.\beta}}\ ;$$

$$\Phi>\frac{\pi}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{\frac{1+\cos.\alpha.\cos.\beta+\sin.\alpha.\sin.\beta}{1+\cos.^2\beta+2\cos.\alpha.\cos.\beta}}\ .$$

Il suit de là que, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur au second, ce qui revient à faire

$$\text{sin.}\,\alpha\,.\,\text{sin.}\,\beta=\alpha\beta\ ;\qquad \text{cos.}\,\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2}\ ;\qquad \text{cos.}\,\beta=1-\frac{\beta^2}{2}\ ,$$

l'on a

$$\Phi<\frac{\pi}{2}\cdot\left(1+\frac{\alpha\beta}{4}+\frac{\alpha^2}{8}\right)\ ;\qquad \Phi>\frac{\pi}{2}\cdot\left(1+\frac{\alpha\beta}{4}+\frac{\beta^2}{8}\right)\ .$$

Si, LAGRANGE, avait formé ces inégalités fort simples, qui découlent de ses propres formules, il aurait compris que l'équation $\Phi=\frac{\pi\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, qu'il avait obtenu dans le N.° 21 (page 204 de la Mécanique Analytique), était nécessairement fautive.

§ VI.

En appliquant à l'équation [3] les formules [71], [73], [52], [53] et [61] données par LEGENDRE aux pages 144, 133, 134 du 3.ème Volume de son ouvrage sur les fonctions elliptiques, on obtient l'expression indéfinie de l'angle φ par une fonction explicite du temps t. Et cette fonction est d'autant plus remarquable, que sa forme est analogue à celle du second membre de l'équation [16]: en ce sens, qu'il suffit d'y remplacer:

$$\frac{\pi}{2}\qquad\text{par}\qquad \xi-\Omega\ ;$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{M''}}\qquad\text{par}\qquad \frac{\xi'-\Omega'}{\sqrt{M''}}\ ;$$

$$\frac{F'(c)}{\sqrt{M'}}\qquad\text{par}\qquad \frac{F'(c)}{\sqrt{M'}}\cdot\frac{(t+t')}{T}\ ;$$

$$F'(c)\qquad\text{par}\qquad F'(c).\frac{(t+t')}{T}\ ;$$

pour adapter le cas particulier de $t+t'=T$ à celui d'un instant quelconque t. Le temps t', écoulé depuis le commencement du mouvement, étant déterminé par les équations

$$[24]\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} Gt'=\displaystyle\int_0^{\theta'}\frac{d\theta}{\Delta}=F(c,\theta')\ ; \\ \text{cos.}\,\psi'=\text{cos.}\,\beta-(\text{cos.}\,\beta-\text{cos.}\,\alpha)\,.\,\text{sin.}^2\theta'\ ; \end{array}\right.$$

où ψ' désigne la valeur initiale de ψ, censée donnée. De sorte que, en désignant par φ' la valeur initiale de φ, l'on a l'équation

$$[25]\ldots\ \varphi-\varphi'+\varphi_{(0)}=(\xi-\Omega)+(\xi'-\Omega')\cos.\tfrac{1}{2}\alpha.\cos.\tfrac{1}{2}\beta.\sqrt{\frac{A}{M''}}$$
$$+\frac{F'(c)}{\sqrt{M'}}\left\{\frac{\sin.\beta}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha}+\frac{\sin.\alpha}{\cot.\frac{1}{2}\beta}\right\}\left(\frac{t+t'}{T}\right)$$
$$+F'(c)\left\{H''+\frac{2H'''}{\sqrt{M''}}\cos.\tfrac{1}{2}\alpha.\cos.\tfrac{1}{2}\beta\right\}\left(\frac{t+t'}{T}\right);$$

où $\varphi_{(0)}$ représente la valeur particulière que prend le second membre de cette équation, lorsqu'on y fait $t=0$. Les deux arcs de cercle ξ et ξ' sont déterminés par les équations

$$[26]\ldots\ \begin{cases}\text{tang.}\,\xi=\Delta\,\Delta'.\text{tang.}\,\theta.\text{tang.}\,\lambda\ ;\\ \text{tang.}\,\xi'=\dfrac{\Delta''}{\Delta}\cdot\dfrac{\text{tang.}\,\theta}{\sin.\varpi.\cos.\varpi}\ ;\end{cases}$$

où l'on a fait pour plus de simplicité;

$$\Delta'=\sqrt{1-b^2\sin.^2\lambda}\ ;\qquad \Delta''=\sqrt{1-b^2\sin.^2\varpi}\ .$$

Et les deux arcs de cercle Ω, Ω', par des séries convergentes, telles qu'en posant

$$m=\frac{G}{F'(c)}=\frac{1}{T}\ ;\qquad m'=\frac{F(b,\lambda)}{F'(b)}\ ;\qquad m''=\frac{F(b,\varpi)}{F'(b)}\ ,$$

l'on a

$$[27]\ldots\ \begin{cases}\text{tang.}\,\Omega=\dfrac{f'\left[\pi m(t+t')\right]}{f'''\left[\pi m(t+t')\right]}\ ;\\ \text{tang.}\,\Omega'=\dfrac{f''\left[\pi m(t+t')\right]}{f^{\text{IV}}\left[\pi m(t+t')\right]}\ ;\end{cases}$$

après avoir fait;

$$f'\left[\pi m(t+t')\right]=\ q\,Q\ \sin.\left[\pi m(t+t')\right]-q^3Q'\sin.\left[2\pi m(t+t')\right]$$
$$+q^5Q''\ \sin.\left[3\pi m(t+t')\right]+\text{etc.}\ ;$$

$$f''\left[\pi m(t+t')\right]=\ q\,Q_{(2)}\sin.\left[\pi m(t+t')\right]-q^3Q'_{(2)}\sin.\left[2\pi m(t+t')\right]$$
$$+q^5Q''_{(2)}\sin.\left[3\pi m(t+t')\right]+\text{etc.}\ ;$$

$$f'''\left[\pi m(t+t')\right] = 1 - q\,Q_{(1)}\cos.\left[\pi m(t+t')\right] + q^4 Q'_{(1)}\cos.\left[2\pi m(t+t')\right] - q^9 Q''_{(1)}\cos.\left[3\pi m(t+t')\right] + \text{etc.} ;$$

$$f^{IV}\left[\pi m(t+t')\right] = 1 - q\,Q_{(3)}\cos.\left[\pi m(t+t')\right] + q^4 Q'_{(3)}\cos.\left[2\pi m(t+t')\right] - q^9 Q''_{(3)}\cos.\left[3\pi m(t+t')\right] + \text{etc.}$$

Les coefficients Q, Q', etc. sont exprimés d'une manière concise par ces équations; savoir

$$Q = 2.\sqrt{-1}.\sin.(\pi n'm'.\sqrt{-1}) ; \quad Q' = 2.\sqrt{-1}.\sin.(2\pi n'm'.\sqrt{-1}) ;$$

$$Q'' = 2.\sqrt{-1}.\sin.(3\pi n'm'.\sqrt{-1}) ; \quad \text{etc.} ;$$

$$Q_{(2)} = 2.\sqrt{-1}.\sin.(\pi n'm''.\sqrt{-1}) ; \quad Q'_{(2)} = 2.\sqrt{-1}.\sin.(2\pi n'm''.\sqrt{-1}) ;$$

$$Q''_{(2)} = 2.\sqrt{-1}.\sin.(3\pi n'm''.\sqrt{-1}) ; \quad \text{etc.} ;$$

$$Q_{(1)} = 2\cos.(\pi n'm'.\sqrt{-1}) ; \qquad Q'_{(1)} = 2\cos.(2\pi n'm'.\sqrt{-1}) ;$$

$$Q''_{(1)} = 2\cos.(3\pi n'm'.\sqrt{-1}) ; \qquad \text{etc.} ;$$

$$Q_{(3)} = 2\cos.(\pi n'm''.\sqrt{-1}) ; \qquad Q'_{(3)} = 2\cos.(2\pi n'm''.\sqrt{-1}) ;$$

$$Q''_{(3)} = 2\cos.(3\pi n'm''.\sqrt{-1}) ; \qquad \text{etc.}$$

Cela posé, si l'on fait, pour un moment;

$$\text{tang.}\,\xi_{(1)} = \frac{\Delta''}{\Delta}\cdot\frac{\sin.\theta.\cos.\theta}{\text{tang.}\,\varpi} ; \qquad \text{tang.}\,\xi_{(2)} = \Delta\,\Delta''\,\text{tang.}\,\theta.\text{tang.}\,\varpi ;$$

l'on a, d'après les formules [71] et [73] de LEGENDRE;

$$\Pi(-k') = \left(\frac{t+t'}{T}\right)F'(c) + \left(\frac{t+t'}{T}\right)\cdot\frac{F'(c)H''\Delta'}{b^2\sin.\lambda.\cos.\lambda} + \frac{(\xi-\Omega)\Delta'}{b^2\sin.\lambda.\cos.\lambda} ;$$

$$\Pi(k'') = \left(\frac{t+t'}{T}\right)F'(c).\frac{c^2\sin.^2\varpi}{\Delta''^2} + \left\{\xi_{(1)} + \frac{b^2}{\Delta''}\Pi(-\Delta''^2)\right\}\frac{\sin.\varpi.\cos.\varpi}{\Delta''} ;$$

$$\Pi(-\Delta''^2) = \left(\frac{t+t'}{T}\right)F'(c) + \left(\frac{t+t'}{T}\right)\cdot\frac{F'(c)H'''\Delta''}{b^2\sin.\varpi.\cos.\varpi} + \frac{(\xi_{(2)}-\Omega')\Delta''}{b^2\sin.\varpi.\cos.\varpi} .$$

En éliminant les arcs λ et ϖ, à l'aide des équations [11], [12], [13], et remarquant que,

$$\text{tang.}(\xi_{(1)}+\xi_{(2)})=\text{tang.}\,\xi' ,$$

on obtient, conformément à l'équation [3], l'expression précédente de $\varphi-\varphi'+\varphi_{(0)}$.

Pour avoir, en fonction de t, les valeurs de $\Delta\,\text{tang.}\,\theta$, et $\dfrac{\text{tang.}\,\theta}{\Delta}$, il faut remarquer qu'en posant, pour plus de simplicité ;

$$X = \frac{q}{1-q^2}\sin.\left\{\pi m(t+t')\right\}+\frac{2^2.q^2}{1-q^4}\sin.\left\{2\pi m(t+t')\right\}$$
$$+\frac{3^2.q^3}{1-q^6}\sin.\left\{3\pi m(t+t')\right\}+\text{etc.} ;$$

$$X' = \frac{q}{1-q^2}\cos.\left\{\pi m(t+t')\right\}+\frac{2.q^2}{1-q^4}\cos.\left\{2\pi m(t+t')\right\}$$
$$+\frac{3.q^3}{1-q^6}\cos.\left\{3\pi m(t+t')\right\}+\text{etc.} ;$$

$$X''=F'(c).E'(c)+2\pi^2X' ;$$

les formules [52] et [61] de Legendre donnent

$$[28]\ \ldots\ldots\ldots\ \begin{cases}\Delta\,\text{tang.}\,\theta=\dfrac{\pi^3}{F'(c)}\cdot\dfrac{X}{X''-[bF'(c)]^2} ;\\[2ex] \dfrac{\text{tang.}\,\theta}{\Delta}=\dfrac{\pi^3F'(c).X}{X''\left\{X''-[bF'(c)]^2\right\}} ;\end{cases}$$

ce qui réduit le second membre des équations [26] à des fonctions explicites du temps semblables à celles qui constituent le second membre des équations [27]. Ces fonctions démontrent, *par leur forme*, que les expressions analytiques des arcs $\xi-\frac{\pi}{2}.\frac{(t+t')}{T}$, $\xi'-\frac{\pi}{2}.\frac{(t+t')}{T}$, Ω, Ω', déduits de leurs tangentes, ne peuvent renfermer que des termes *périodiques*, sans être associés à une quantité proportionnelle au temps. C'est là le caractère distinctif de tout arc y lié à un autre arc x par une équation de la forme $\text{tang.}\,y=a.\sin.x$.

L'équation [1], en observant que

$$\cos.\beta-\cos.\alpha=\frac{M'c^2}{\cos.\beta+\cos.\alpha} ,$$

donne;

$$\cos.\psi = \cos.\beta - \frac{M'c^2.\sin.^2\theta}{\cos.\beta+\cos.\alpha} .$$

Mais nous avons

$$[29] \ldots\ldots\ldots \quad c^2\sin.^2\theta = \frac{F^1(c)-E^1(c)}{F^1(c)} - \frac{2.\pi^2 X'}{[F^1(c)]^2} .$$

Donc l'ordonnée $z = r\cos.\psi$ est exprimée en fonction du temps par l'équation

$$[30] \ldots\ldots\ldots \quad z = r\cos.\beta - \frac{M'r.\{F^1(c)-E^1(c)\}}{\{\cos.\beta+\cos.\alpha\}.F^1(c)} + \frac{2\pi^2 M'rX'}{(\cos.\beta+\cos.\alpha).[F^1(c)]^2} .$$

Et comme

$$x = \cos.\varphi.\sqrt{r^2-z^2} \; ; \qquad y = \sin.\varphi.\sqrt{r^2-z^2} \; ,$$

en désignant par Θ le second membre de l'équation [25] nous aurons;

$$[31] \ldots \begin{cases} x = \cos.(\varphi' - \varphi_{(o)} + \Theta).\sqrt{r^2-z^2} \; ; \\ y = \sin.(\varphi' - \varphi_{(o)} + \Theta).\sqrt{r^2-z^2} \; ; \\ r^2 - z^2 = r^2\sin.^2\beta + \dfrac{2r^2M'\cos.\beta}{\cos.\beta+\cos.\alpha}.c^2\sin.^2\theta + \dfrac{r^2M'^2(c^2\sin.^2\theta)^2}{(\cos.\beta+\cos.\alpha)^2} . \end{cases}$$

Le problème des oscillations coniques d'un pendule, dans le vide, et abstraction faite de la rotation diurne de la Terre, est résolu par ces formules avec toute la généralité qu'il comporte.

Par le rapprochement des deux équations [16] et [25] on voit aussitôt, que la différence $\varphi - \Phi\dfrac{(t+t')}{T}$ est exprimée par cette équation fort simple;

$$[32] \ldots \quad \varphi - \Phi\frac{(t+t')}{T} = \varphi' - \varphi_{(o)} + \left\{\xi - \Omega - \frac{\pi}{2}.\frac{(t+t')}{T}\right\} + \left(\xi' - \Omega' - \frac{\pi}{2}.\frac{(t+t')}{T}\right)\frac{2\cos.\frac{1}{2}\alpha.\cos.\frac{1}{2}\beta}{\sqrt{M''}} .$$

En y faisant $t+t' = iT$ (i étant un nombre entier), les arcs ξ et ξ' deviennent égaux à $i.\dfrac{\pi}{2}$, et les arcs Ω, Ω' deviennent nuls; en sorte que l'on a

[33] . . . . . $\varphi = i\Phi + \varphi' - \varphi_{(0)}$.

Sur cela il faut remarquer, pour plus de clarté, que le second membre des équations [28] acquiert la forme $\frac{0}{0}$, lorsque $t+t'=iT$; mais, par la règle ordinaire, on reconnaît que sa valeur est l'infini; ce qui revient à dire que les équations [26] donnent, dans ce cas,

$$\xi = \xi' = i\,.\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,.\,\frac{(t+t')}{T}\ .$$

En général chacune des deux différences $\xi - \frac{\pi}{2}\,.\,\frac{(t+t')}{T}$, $\xi' - \frac{\pi}{2}\,.\,\frac{(t+t')}{T}$ sera exprimée par une série de termes périodiques. Pour s'en convaincre, il faut remarquer que le numérateur et le dénominateur des fonctions, qui composent le second membre des équations [28], a c^2 pour facteur commun; et c'est après les avoir délivrés de ce facteur, qu'on voit disparaître la partie qui n'est pas soumise aux signes périodiques.

En effet, nous avons $q = \frac{c^2}{16}$, plus d'autres termes multipliés par c^4, c^6, etc. Donc en faisant, pour un moment,

$$\pi m(t+t') = \frac{\pi(t+t')}{T} = x\ ,$$

il est clair que l'on a;

$$X = \frac{c^2}{16}\sin.x + \text{etc.}\ ;\quad X' = \frac{c^2}{16}\cos.x\ ;\quad X'' = \frac{\pi^2}{4} + \frac{2\pi^2 c^2}{16}\cos.x\ ;$$

$$X'' - \left[bF'(c)\right]^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{2\pi^2 c^2}{16}\cos.x - \frac{\pi^2}{4} + \frac{2\pi^2 c^2}{16} + \text{etc.}\ ;$$

partant

$$\Delta\,\text{tang.}\,\theta = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}x + \text{etc.}\ ;$$

$$\frac{\text{tang.}\,\theta}{\Delta} = \text{tang.}\,\tfrac{1}{2}x + \text{etc.}$$

Or, en négligeant les termes qui sont multipliés par c^2, on peut faire immédiatement $q=0$ dans les expressions de tang.Ω, tang.Ω', ce qui donne $\Omega=0$, $\Omega'=0$. En outre l'on a $\Delta'=\cos.\lambda$, $\Delta''=\cos.\varpi$; et par conséquent

$$\text{tang.}\,\xi = \sin.\lambda\,.\,\text{tang.}\,\frac{x}{2} + \text{etc.}\ ;\qquad \text{tang.}\,\xi' = \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}x}{\sin.\varpi} + \text{etc.}$$

Mais d'après les équations

$$\sin.\lambda = \frac{1}{b}\cdot\frac{\cos.\frac{1}{2}\alpha}{\cos.\frac{1}{2}\beta}\ ; \qquad \sin.\varpi = \frac{\sin.\frac{1}{2}\beta}{\sin.\frac{1}{2}\alpha}\ ;$$

on doit faire ici : $\sin.\lambda = 1$ et $\sin.\varpi = \frac{\beta}{\alpha}$. Alors il est manifeste que l'on a

$$\xi = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(t+t')}{T} + \text{etc.}$$

Et par la série de LAMBERT ;

$$[34]\ \ldots\ldots\ldots \qquad \xi' - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(t+t')}{T} =$$

$$\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)\sin.\left\{\frac{\pi(t+t')}{T}\right\} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2\sin.\left\{\frac{2\pi(t+t')}{T}\right\} + \text{etc.}\ ;$$

L'équation [32] donne donc, comme *première approximation*,

$$[35]\ldots\ \varphi = \varphi' - \varphi_{(0)} + \Phi\frac{(t+t')}{T}$$

$$+\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)\sin.\left\{\frac{\pi(t+t')}{T}\right\} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2\sin.\left\{\frac{2\pi(t+t')}{T}\right\} + \text{etc.}$$

En faisant commencer le mouvement à l'instant où $\varphi = \beta$, l'on aura, *depuis cet instant ;*

$$\varphi - \frac{\pi}{2} = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)\sin.\left(\frac{\pi t}{T}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2\sin.\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \text{etc.}\ ;$$

ce qui revient à dire, que

$$[36]\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \varphi =$$

$$t.\sqrt{\frac{r}{g}} + \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)\sin.\left(2t\sqrt{\frac{g}{r}}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2\sin.\left(4t\sqrt{\frac{g}{r}}\right) + \text{etc.}\ ;$$

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{\alpha}{\beta}\,\text{tang.}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T}\right).$$

L'on a donc

$$\cos.\varphi = \frac{\beta.\cos.\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T'}\right)}{\sqrt{\beta^2+(\alpha^2-\beta^2)\sin.^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T'}\right)}}\ ;$$

$$\sin.\varphi = \frac{\alpha.\sin.\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T'}\right)}{\sqrt{\beta^2+(\alpha^2-\beta^2)\sin.^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T'}\right)}}\ .$$

L'équation [29] donne, en négligeant les termes multipliés par c^4 :

$$c^2\sin.^2\theta = \frac{c^2}{2}\left(1-\cos.\left(\frac{\pi t}{T'}\right)\right) = \frac{c^2}{4}\sin.^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T'}\right)\ ;$$

et la 3.ème des équations [31] donne, en négligeant de même les termes multipliés par c^4;

[37] ..... $\sin.^2\psi = \beta^2+(\alpha^2-\beta^2)\sin.^2\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T'}\right)$.

Donc nous avons

$$\sin.\psi.\cos.\varphi = \beta.\cos.\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T'}\right)\ ; \qquad \sin.\psi.\sin.\varphi = \alpha.\sin.\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{t}{T'}\right)\ :$$

et par conséquent

[38] ..... $$\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2} = 1$$

pour l'équation de la courbe décrite par le pendule, projetée sur le plan horizontal des xy.

Cette ellipse, conclue de la première approximation, s'accorde avec celle trouvée par Clairaut en 1735. J'ai voulu faire ressortir ce résultat des formules générales, quoique l'on puisse le dériver beaucoup plus facilement des expressions différentielles primitives en exclnant, de prime abord, les transcendantes elliptiques.

§ VII.

La forme de l'expression de φ donnée par l'équation [36] est semblable à celle que l'on trouve, *par une première approximation*, en déterminant le mouvement conique du pendule, dans le vide, en ayant égard à la rotation diurne de la Terre. Alors la durée, $T' = \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{r}{g}}$,

des demi-oscillations n'est pas sensiblement changée; mais le mouvement dans le sens horizontal subit un changement considérable. Dans ce cas, la tangente de l'angle φ est déterminée par une équation de la forme

$$[39] \quad \ldots\ldots\ldots \qquad \text{tang.}\,\varphi = \frac{H\sin.p - H'\sin.p'}{H\cos.p + H'\cos.p'} \; ;$$

où l'on a $H > H'$, et

$$[40] \quad \ldots\ldots\ldots \qquad \begin{cases} p = t\left\{\sqrt{\frac{g}{r}} - n\sin.L\right\} + \varphi' \; ; \\ p' = t\left\{\sqrt{\frac{g}{r}} + n\sin.L\right\} - \varphi' \; ; \end{cases}$$

L étant la latitude géographique du point de la surface de la Terre que l'on considère, et n la vitesse uniforme de sa rotation diurne.

Pour mieux fixer les idées, j'ajouterai que je suppose l'axe des x positives placé à l'horizon sur la ligne *Est-Ouest*, et l'axe des y positives sur la ligne *Nord* et *Sud;* les angles φ, ainsi que l'angle initial φ', étant comptés de l'*Orient* vers le *Nord*, si leur valeur est *positive*, et de l'*Orient* vers l'*Occident*, si leur valeur est *négative*. Ces axes, fixes à la surface de la Terre, participent à son mouvement de rotation.

L'équation [38] donne

$$[41] \quad \ldots\ldots\ldots \qquad \text{tang.}\,(p - \varphi) = \frac{H'\sin.(p+p')}{H + H'\cos.(p+p')} \; ;$$

d'où l'on tire, par une formule connue,

$$p - \varphi = p + p' + \frac{H'}{H}\sin.(p+p') + \frac{1}{2}\cdot\frac{H'^2}{H^2}\sin.2(p+p') + \frac{1}{3}\cdot\frac{H'^3}{H^3}\sin.3(p+p') + \text{etc.} \; ;$$

ou bien

$$[42] \quad \ldots \qquad \varphi = -t\left(\sqrt{\frac{g}{r}} + n\sin.L\right) - \varphi' + \frac{H'}{H}\sin.\left(2t.\sqrt{\frac{g}{r}}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{H'^2}{H^2}\sin.\left(4t.\sqrt{\frac{g}{r}}\right) + \frac{1}{3}\cdot\frac{H^3}{H'^3}\sin.\left(6t.\sqrt{\frac{g}{r}}\right) + \text{etc.}$$

J'ai démontré dans un autre Mémoire en 1851 (Voyez le Vol. XIII de cette Collection), que

$$H' = \alpha - \beta \; , \qquad H = \alpha + \beta \; .$$

Ainsi, par le rapprochement des trois équations [36], [38] et [42], il est évident, que le mouvement de la rotation diurne de la Terre est communiqué, d'une manière apparente et non réelle, au grand axe α de l'ellipse [38], autour de son centre, dans le plan même de l'horizon, avec une vitesse $-n\sin.L$; c'est-à-dire avec une vitesse uniforme dirigée de l'*Orient* vers l'*Occident*, proportionnelle au *sinus* de la latitude. De sorte que cette déviation du plan azimuthal devient *nulle* à l'*équateur* et atteint le *maximum* aux deux pôles de la Terre.

L'explication de ce phénomène, fondée sur l'intégration des équations différentielles du mouvement apparent des corps situés près de la surface de la Terre, me paraît la seule tout-à-fait satisfaisante, si l'on veut saisir la connexion intime existente entre la cause et la loi qui en régit l'effet. A mon avis, elle est beaucoup plus claire que celle que l'on a voulu appuyer sur le simple principe de la décomposition de tout mouvement de rotation autour d'un axe: principe établi dans toute sa généralité aux pages 57-60 du premier Volume de la Mécanique Analytique de Lagrange. Le raisonnement qu'on lit aux pages 49 et 50 du troisième Volume de l'*Astronomie Populaire* ne saurait amener à la conviction un esprit juste et rigoureux. Mais ce raisonnement d'Arago était le seul admissible dans un Traité, composé d'après la maxime qu'il fallait en écarter *tous les calculs algébriques*. Ici, comme à la page 468 du premier Volume, Arago aurait répondu à l'objection en répétant: « Il n'a jamais pu entrer dans mes projets l'idée de donner même la plus légère idée des calculs algébriques qui servent à résoudre les problèmes etc. » (*).

(*) Toutefois il faut avouer que, Arago démontre, par ses propres efforts, qu'il y a des propositions impossibles à faire concevoir « *à toute personne presque étrangère aux mathématiques.* » Par exemple, le raisonnement qu'il expose, dès le commencement de son Traité, aux pages 60 et 61 du premier Volume, pour faire disparaître ce qu'il y a de paradoxal dans la propriété de l'isochronisme inhérent au mouvement cycloïdal d'un point matériel soumis à l'action de la gravité, dans le vide, est, dans le fond, d'autant plus insuffisant qu'il y a une infinité de courbes; concaves, symétriques des deux côtés d'un axe vertical, élevé par leur point plus bas (ou sommet), pour lesquelles les variations de la vitesse entre le point le plus élevé et le point le plus bas de leur chute, ne sauraient compenser les différentes parties du temps total de leur chute, de manière à le rendre constant entre deux limites différentes. En effet, désignons ce temps par T, et par h la hauteur verticale de la chute pour deux points de la courbe placés sur la même horizontale. La Mécanique rationnelle enseigne que,

§ VIII.

Je reviens maintenant à la considération de la question primitive, afin d'établir l'équation générale du *plan osculateur* de la courbe décrite

---

pour *toute* courbe ainsi symétrique des deux côtés de l'axe des z, l'on a;

$$T=\frac{2}{\sqrt{2g}}\cdot\int_0^h\frac{-ds}{\sqrt{z}}\;;$$

g étant la force accélératrice de la gravité et ds l'élément de la courbe. Or, en faisant $ds=\frac{-a^m}{(h-z)^m}\cdot dz$, sans définir l'exposant m, et regardant la ligne a comme tout-à-fait indépendante de h, l'on aura:

$$T=\frac{2a^m}{\sqrt{2g}}\cdot\int_0^h\frac{dz}{\sqrt{z}\cdot(h-z)^m}\;.$$

Donc, en faisant $z=hu^2$, nous aurons

$$T=\frac{4a^m}{\sqrt{2g}}\cdot h^{\frac{1}{2}-m}\int_0^1\frac{du}{(1-u^2)^m}\;.$$

Cela posé, il est manifeste que cette valeur de T, en prenant m différent de $\frac{1}{2}$, sera variable avec h. Mais il n'est pas moins évident que la variabilité cesse d'avoir lieu si l'on prend $m=\frac{1}{2}$, puisque alors

$$T=\frac{4.\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}\cdot\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\pi.\sqrt{\frac{2a}{g}}\;.$$

La courbe, qui jouit de la propriété de l'isochronisme, est donc telle que son élément ds est exprimé par

$$ds=\frac{-\sqrt{a}\cdot dz}{\sqrt{h-z}}\;:$$

de sorte que la longueur s de ses arcs, comptés depuis le sommet, est $s=2.\sqrt{a(h-z)}$
Et comme

$$\frac{dz}{ds}=\frac{\sqrt{h-z}}{\sqrt{a}}$$

exprime le cosinus de l'angle formé par l'élément ds avec la verticale, il faudra prendre $h=a$, si l'on veut rendre la tangente parallèle à l'axe des z au point où $z=0$. D'après

par le pendule sur la surface sphérique du rayon r, en demeurant toujours sur la zone, comprise entre les deux sections perpendiculaires à la verticale, faites aux distances $r\cos.\alpha$, $r\cos.\beta$ de son centre.

---

cela, l'équation $s=2.\sqrt{a(a-z)}$ devient celle d'une cycloïde, dont a est le diamètre du cercle générateur.

Il est vrai, que tout ce raisonnement n'est pas *populaire;* mais cet inconvénient ne devait pas être considéré comme un argument assez prépondérant pour décider une intelligence supérieure, comme celle d'Arago, à écarter le plus puissant instrument de l'esprit humain dans l'explication de tous les phénomènes astronomiques.

L'analyse mathématique peut seule donner l'expression d'une même quantité sous des formes fort différentes, et faire ressortir de cette variété des vérités autrement impossibles à démontrer. C'est ainsi, par exemple, qu'on peut exprimer la tangente d'un arc de cercle par la longueur même de l'arc, de manière à faire voir qu'il est absolument impossible que l'arc et la tangente soient, à la fois, commensurables avec le rayon du cercle: ce qui constitue une vérité inaccessible à la géométrie élémentaire, précisément à cause que, dans sa sphère, il n'y a aucun principe suffisant pour dévoiler une telle transformation.

La stabilité du système du Monde, dont Arago parle dans le second Volume (page 260) et dans les pages 19 et 20 du quatrième Volume, est et sera toujours une de ces vérités capitales dont la démonstration est impossible sans le concours de l'analyse mathématique.

La détermination de la masse des planètes qui n'ont pas de satellites, ne peut pas être démontrée possible, sans recourir à la formule algébrique qui exprime la différence entre la position *elliptique* et la position *observée*. Et la personne, étrangère aux mathématiques, ne comprendra jamais la possibilité de calculer *a priori, littéralement*, cette différence d'après la loi de Newton. Si un vif sentiment d'incrédulité s'empare de son esprit, elle ne pourra la dissiper qu'après une étude approfondie de la question.

Pour comprendre la possibilité de construire un objectif achromatique avec *deux* lentilles; une bi-convexe de crown-glass, et l'autre plano-concave de flint-glass; même en sachant, par expérience, que, dans les différentes substances diaphanes, la dispersion n'est *pas* proportionnelle à la réfraction, il faut établir des équations entre les distances focales, les rayons des surfaces, les indices de réfraction, et les dispersions, lesquelles doivent être satisfaites, pour que la coloration et l'aberration de sphéricité soient sensiblement détruites à la fois. C'est dans ces équations, *écrites en langage algébrique*, qu'on peut saisir la possibilité de l'achromatisme. Certes, ce n'est pas en lisant seulement le raisonnement exposé par Arago à la page 112 de son premier Volume, et à l'inspection de la figure qui l'accompagne, qu'on pourra entendre une possibilité qui avait échappé à Newton, trompé par ses propres expériences, et même à Euler, trompé dans ses premiers calculs par une erreur théorique relevée par Clairaut en 1761.

J'en conviens, les formules analytiques ne dispensent pas des notions élémentaires,

Pour cela, il faut partir du principe, que, en désignant par

$$A'(x'-x)+B'(y'-y)+C'(z'-z)=0$$

l'équation de ce plan, l'on a les équations

---

comme Arago le dit avec raison à la page 102. Mais elles dispensent encore moins celui qui possède ces notions d'ignorer, ou de savoir (*proprio marte*) inventer les formules convenables, s'il veut franchir l'assez grand intervalle qui sépare les résultats définitifs et explicites de l'explication qu'on lit à la page 112 que j'ai citée.

Ces formules font voir, que l'on peut composer un objectif achromatique fort semblable à celui de la figure donnée dans cette page, qui en diffère en ce point, que la seconde surface de la lentille de flint-glass a une courbure concave, mais dont le rayon, sans être infini, est seulement beaucoup plus grand que celui de la première (Voyez la fig. 108 et l'article 472 du *Traité de la Lumière* de J. F. W. Herschel, et les pages 78, 106, 109 et 110 du second Volume du *Traité d'Astronomie* de M.r Biot, troisième édition).

Abstraction faite de ces problèmes complexes de la Dioptrique, même le plus simple, qui est celui de la marche d'un rayon lumineux à travers un prisme dont les faces seraient en contact avec deux milieux diaphanes différens, exige le langage algébrique, si l'on veut faire disparaître toute complication; car cette marche peut être exprimée d'une manière fort simple à l'aide des trois équations:

$$\sin.I=m\sin.(\psi-I')\;;\quad \sin.E=m'\sin.I'\;;\quad D=I+E-\psi\;;$$

où m est l'indice de réfraction pour la face d'entrée; m' l'indice de réfraction pour la face d'émergence; I, I' les deux angles d'incidence; E l'angle d'émergence; et D la déviation, c'est-à-dire l'angle formé par le rayon incident et le rayon émergent. On voit par la seconde de ces équations que l'émergence sera impossible si l'on a

$$\sin.I'>\frac{1}{m'}\;;$$

de sorte que, en déterminant I' d'après l'équation

$$\sin I'=\frac{1}{m'}\;,$$

on aura la limite de l'émergence. La première équation, à cette limite, devient

$$\sin.I=\frac{m}{m'}.\frac{\sin.(\psi-I')}{\sin I'}\;.$$

Donc la limite correspondante de l'incidence sera donnée par l'équation

$$\frac{\sin.(\psi-I')}{\sin.I'}=\frac{m'}{m}\;.$$

Lorsque $m'=m$, il est évident que l'on doit avoir $\psi<2I'$. Un prisme de diamant (pour

$$A' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \; ;$$

$$B' = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} \; ;$$

$$C' = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \; ;$$

---

lequel $m'=2,470$), dont l'angle réfringent surpasserait 48°, aurait les apparences d'un corps opaque.

Mais, en humectant la face d'émergence avec une légère couche d'eau, on aura:

$$m' = \frac{2,470}{1,336} \; ;$$

ce qui portera à $65^\circ.30'$ la limite de l'angle ψ, et redonnera la transparence au même prisme, puisque, en vertu de la couche d'eau, l'on a

$$\sin. I = 1,336 \, \frac{\sin.(48^\circ - 32^\circ.45')}{\sin. 32^\circ.45'} = 0,6703. < 1 \; .$$

Si le rayon lumineux traverse *deux* prismes de matière *différente*, adossés avec leurs angles réfringens ψ, ψ' opposés, il y aura trois angles d'incidence successifs I, I', I''; l'angle d'émergence E, et la déviation D. Alors, on aura, en général, ces quatre équations (l'angle réfringent du premier prisme étant tourné vers le bas):

$$\sin. I = m \sin.(\psi - I') \; ; \qquad \sin. I' = \frac{m'}{m} \sin.(\psi' - I'') \; ;$$

$$\sin. E = m' \sin. I'' \; ; \qquad D = -I + E + \psi - \psi' \; ;$$

qui se réduisent à deux, si l'on suppose le rayon incident *normal* à la face d'entrée du premier prisme. Car, à cause de $I=0$, l'on a $I'=\psi$; ce qui donne

$$m \sin. \psi = m' \sin.(\psi' - I'') \; ; \qquad \sin. E = m' \sin. I'' \; .$$

L'achromatisme du rayon émergent aura lieu si, en faisant varier m, m', I'' de quantités fort petites, l'angle d'émergence E demeure invariable. Cela revient à dire, que les différentielles de ces deux dernières équations, prises en faisant varier à la fois m, m', I'', sans faire varier E, doivent être satisfaites. En éliminant dI'' et $\sin.\psi$, par la substitution de leurs valeurs;

$$-\frac{dm'}{m'} \tang. I'' \; , \qquad \frac{m'}{m} \sin.(\psi - I'') \; ,$$

la condition de l'achromatisme fournit l'équation

$$Z' = r^2 E + 3gz \; ; \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = g - \frac{zZ'}{r^2} \; ;$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{xZ'}{r^2} \; ; \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{yZ'}{r^2} \; ;$$

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = -z\frac{dz}{dt} \; ; \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2 C \; ;$$

$$\left(\frac{dm}{m} - \frac{dm'}{m'}\right) \text{tang.}(\psi' - I'') - \frac{dm'}{m'} \text{tang.} I'' = 0 \; .$$

Et comme $I'' = \psi' - (\psi' - I'')$; si l'on fait, pour un moment, $T = \text{tang.}(\psi' - I'')$, on tire de là;

$$\text{tang.}\psi' = \frac{\frac{m'}{m} \cdot \frac{dm}{dm'} \cdot T}{1 + \left(1 - \frac{m'}{m} \cdot \frac{dm}{dm'}\right) T^2} \; .$$

Maintenant, si l'on remplace T par sa valeur

$$T = \frac{m}{m'} \cdot \frac{\text{sin.}\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{m}{m'}\right)^2 \text{sin.}^2\psi}} \; ,$$

l'on aura

$$\text{sin.}\psi' = \frac{dm}{dm'} \cdot \text{sin.}\psi \cdot \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{m}{m'}\right)^2 \text{sin.}^2\psi}{1 - A\,\text{sin.}^2\psi}} \; ,$$

$$A = 2\frac{m}{m'} \cdot \frac{dm}{dm'} - \left(\frac{dm}{dm'}\right)^2 \; ;$$

$$\text{sin.}E = -m\,\text{sin.}\psi\,\text{cos.}\psi' + m'\,\text{sin.}\psi' \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{m}{m'}\right)^2 \text{sin.}^2\psi} \; ;$$

cette expression de $\text{sin.}\psi'$ en fonction de $\text{sin.}\psi$ me paraît assez remarquable.

Pour l'appliquer à un double prisme de *crown* et de *flint*, on pourra faire

$$\frac{dm'}{dm} = 2 \; ; \qquad m = 1,528 \; ; \qquad m' = 1,630 \; ;$$

d'après les expériences de FRAUNHOFER, ce qui donne: $A = 0,18742$.

Il suit de là que si l'on fait successivement

$$\psi = 30° \; ; \qquad \psi = 36° \; ; \qquad \psi = 45° \; ;$$

l'on aura pour les valeurs correspondantes de ψ';

$$[43] \ldots \quad r^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -C^2r^4 - gz(r^2-z^2) + Z'(r^2-z^2) \; ;$$

$$A'x + B'y + C'z = g\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = gr^2C \; ;$$

lesquelles, après les réductions qui se présentent, donnent

$$\psi' = 13°.4'.20'' \; ; \qquad \psi' = 14°.41'.30'' \; ; \qquad \psi' = 16°.8'.40'' \; .$$

Pour appliquer la même formule à un double prisme d'eau et de *crown* on prendra

$$\frac{dm'}{dm} = 1,503 \; ; \qquad m = 1,336 \; ; \qquad m' = 1,528 \; ;$$

ce qui donne

$$A = 0,72082.$$

En prenant $\psi = 30°$, la formule donne

$$D = -3°.54'.35'' \; ; \qquad \psi' = 18°.40'.20'' \; ; \qquad E = -15°.14'.15'' \; .$$

Telle est l'explication de l'achromatisme dont Arago a voulu donner l'idée dans la page 111 du premier Volume de son *Astronomie Populaire*.

Remarquons, qu'en prenant l'angle ψ de manière que l'on ait $\sin.E = \sin.(\psi' - \psi)$, c'est-à-dire

$$\text{tang.}\,\psi' = \frac{(1-m)\sin.\psi}{\cos.\psi - \sqrt{m'^2 - m^2\sin.^2\psi}} \; ,$$

on rendrait le *rayon émergent parallèle au rayon incident*; mais alors la condition de l'achromatisme ne serait pas satisfaite, puisque l'équation que l'on a, en égalant la valeur de $\sin.\psi'$ donnée par cette équation à

$$\sin.\psi.\frac{dm}{dm'}.\sqrt{\frac{1-\left(\frac{m}{m'}\right)^2\sin.^2\psi}{1-A.\sin.^2\psi}} \; ,$$

est incompatible avec les valeurs du rapport $\frac{dm}{dm'}$. Ainsi l'assertion de Newton, par laquelle il disait que l'achromatisme ne pouvait avoir lieu qu'en détruisant l'angle formé par le rayon incident et le rayon émergent, devait être un jour démentie, ce que Dollond a fait voir en refaisant l'expérience de Newton.

Il importe de remarquer, en outre, que l'achromatisme, obtenu pour l'incidence normale à la face d'entrée dans le premier prisme, cesse de subsister pour toute autre incidence; car $\sin.\psi'$ est une fonction de ψ et de I, en général. Cette fonction, donnée par les trois équations précédentes, est telle que l'on a

$$[44]\ \ldots\ldots \qquad A'\,x' + B'.y' + CZ'.z' = gr^2C\ ;$$

$$[45]\ \ldots\ldots \begin{cases} C' = CZ'\ ; \\ B' = \dfrac{-Cy(zZ' - gr^2) + (gz - Z').x\dfrac{dz}{dt}}{r^2 - z^2}\ ; \\ A' = \dfrac{-Cx(zZ' - gr^2) - (gz - Z').y\dfrac{dz}{dt}}{r^2 - z^2}\ . \end{cases}$$

L'équation [44] démontre que, en général, le nombre des plans oscillateurs est infini; ce qui est le caractère analytique de toute courbe à double courbure. Mais, la même équation fait voir qu'il y a un cas particulier où la courbe devient plane et située dans un plan horizontal; c'est celui pour lequel les deux conditions

$$[46]\ \ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \frac{dz}{dt} = 0\ ; \qquad zZ' - gr^2 = 0 \right\}\ ;$$

seraient satisfaites. Alors l'on aura

$$z' = z = \frac{gr^2}{Z'}$$

$$\sin.\psi' = \frac{\dfrac{m}{m'}\cdot\dfrac{dm}{dm'}\sin.\psi\cdot\sqrt{M}}{\sqrt{P^2 + \dfrac{m}{m'}\cdot\dfrac{dm}{dm'}M\sin.^2\psi}}\ ,$$

$$\sin.E = \cos.\psi' \left\{ \sin.I.\cos.\psi - \sin.\psi.\sqrt{m^2 - \sin.^2 I} \right\} + \sin.\psi'.\sqrt{M}\ ,$$

en posant, pour plus de simplicité,

$$M = m'^2 - m^2\sin.^2\psi - \sin.^2 I.\cos.2\psi + \sin.I.\sin.2\psi.\sqrt{m^2 - \sin.^2 I}\ ;$$

$$P = \left(1 - \frac{m}{m'}\cdot\frac{dm}{dm'}\sin.^2\psi\right)\sqrt{m^2 - \sin.^2 I} + 2\frac{m}{m'}\cdot\frac{dm}{dm'}\cdot\sqrt{m^2 - \sin.^2 I}\ .$$

Il paraît que Newton voyait la condition de l'achromatisme dans l'équation

$$\psi' - \psi - E = 0\ ,$$

tandis qu'elle réside dans l'égalité à zéro de la différentielle de cette même quantité, prise en faisant varier les indices de réfraction m et m'.

pour l'équation du plan horizontal, et pour satisfaire à l'équation $\frac{dz}{dt}=0$, il faudra, conformément à l'équation qui donne la valeur de $\frac{d\psi}{dt}$, que l'on ait ;

$$[47] \ldots\ldots\ldots \quad (Er^2+2gz)(r^2-z^2)-C^2r^4=0 \ .$$

De sorte que l'on a à la fois (en remplaçant Z' par sa valeur) :

$$[48] \ldots\ldots \begin{cases} z^3+\frac{Er^2}{2g}.z^2-r^2z+\frac{(C^2-E)r^4}{2g}=0 \ ; \\ 3z^2+\frac{2Er^2}{g}-r^2=0 \ . \end{cases}$$

La seconde de ces deux équations étant la différentielle de la première, par rapport à z, il faut en conclure, que le quadrinome du 3.ème degré en z, doit avoir, dans ce cas, *deux racines égales.* En faisant $z=r\cos.\alpha$, ces deux équations donnent

$$C^2=\frac{g}{r}\cdot\frac{\sin.^4\alpha}{\cos.\alpha} \ ; \qquad E=\frac{g}{r}\cdot\frac{(1-3\cos.^2\alpha)}{\cos.\alpha} \ .$$

Et comme, en désignant par v^2 le carré de la vitesse, l'on a, en général, $v^2=Er^2+2gz$, il est clair que la vitesse est constante, puisque l'ordonnée z est elle-même constante. En substituant pour E sa valeur, cette équation donne

$$v=\sqrt{gr}\cdot\frac{\sin.\alpha}{\sqrt{\cos.\alpha}} \ .$$

Les composantes horizontales $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ de la vitesse v, étant ici exprimées par

$$\frac{dx}{dt}=-r\sin.\alpha.\sin.\varphi.\frac{d\varphi}{dt} \ ; \qquad \frac{dy}{dt}=r\sin.\alpha.\cos.\varphi.\frac{d\varphi}{dt} \ ,$$

il est évident que l'on a

$$v^2=r^2\sin.^2\alpha.\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \ ;$$

et par conséquent

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{\frac{g}{r\cos.\alpha}} \ ;$$

d'où l'on tire

$$\varphi = t.\sqrt{\frac{g}{r\cos.\alpha}},$$

en supposant que l'on ait $\varphi = 0$, lorsque $t = 0$.

La force centrifuge $\frac{v^2}{r\sin.\alpha}$ étant égale à $g\,\text{tang.}\,\alpha$, est donc précisément égale et de signe contraire à la composante horizontale de la gravité g; l'autre composante, $\frac{g}{\cos.\alpha}$, ayant la direction même du fil qui retient le pendule attaché au point fixe. C'est d'après cette considération fort simple, que Huygens a trouvées les formules relatives à ce cas particulier du mouvement conique (Lisez les pages 123 et 124 du second Volume de ses *Opuscula posthuma*). Mais il est intéressant de faire ressortir la solution de ce même cas particulier de celle du cas général, par une analyse (nouvelle, si je ne me trompe), qui démontre *a priori*, que, la transition du cas général au cas particulier, ne peut avoir lieu sans que le polynome du 3.ème degré acquierre deux racines égales.

S'il fallait démontrer que, par la seule action de la gravité, le mouvement conique sur la périphérie d'un cercle *oblique* à l'horizon est impossible, il suffirait de remarquer que l'équation [44] du plan osculateur n'admet pas la possibilité de rendre constantes, pour un tel plan, les fonctions de x, y, z, qui constituent les coefficients de x', y', z'; fonctions déjà liées par l'équation $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

§ IX.

En désignant par ρ le rayon de courbure de la courbe décrite par le pendule, en un point quelconque, l'on a comme on sait;

[49] . . . . . $\frac{v^3}{\rho} = \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}$.

Les équations [45] donnent

$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = \frac{C^2Z'^2(r^2 - z^2) + C^2(zZ' - gr^2)^2 + (Z' - gz)^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{r^2 - z^2};$$

donc en éliminant $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ à l'aide de l'équation [43], l'on aura

$$A'^2+B'^2+C'^2=C^2r^2.g^2+\frac{(Z'-gz)^3}{r^2}\ ;$$

ou bien

[50] ..... $$A'^2+B'^2+C'^2=C^2r^2.g^2+\frac{v^6}{r^2}\ .$$

Il suit de là, que nous avons l'équation fort simple,

[51] ..... $$\frac{v^6}{\rho^2}-\frac{v^6}{r^2}=C^2r^2.g^2\ .$$

Or, en désignant par T la tension du fil qui retient le pendule, l'on a

$$T=\frac{v^2}{r}+\frac{gz}{r}=Er^2+3\frac{gz}{r}\ ;$$

et

$$T-\frac{gz}{r}=\frac{v^2}{r}\ .$$

L'équation [51] revient donc à dire, que, entre la force centrifuge $\frac{v^2}{\rho}$ et la tension T, il y a, en général, l'équation

[52] ..... $$\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2\cdot\left(T-\frac{gz}{r}\right)=\left(T-\frac{gz}{r}\right)^3+rg^2C^2\ ;$$

où la constante C doit être déterminée par l'équation

[53] ..... $$\frac{x}{r^2}\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{y}{r^2}\cdot\frac{dx}{dt}=C\ .$$

Lorsque le mouvement n'est pas conique et sur un même plan vertical, l'on a $C=0$, et l'équation [52] se réduit à

$$\frac{v^2}{\rho}=T-\frac{gz}{r}\ ;$$

et comme, dans ce cas, $\rho=r$, il est clair que l'on a

$$T=\frac{v^2}{r}+\frac{gz}{r}\ .$$

Cette dernière équation est évidente, et peut être établie *a priori* sans aucun calcul: mais l'équation [52], qui me paraît nouvelle, exige,

pour sa démonstration, des considérations assez délicates, sur lesquelles, Poisson, ne portait pas son attention, au moment où il écrivait, au sujet du mouvement conique et non plan, que « en effet la tension mN doit » être la somme de la force centrifuge $\frac{v^2}{a}$ et de la composante $\frac{mgz}{a}$ » du poids du mobile suivant le prolongement du rayon CM » (page 387 du premier Volume de son *Traité de Mécanique*).

Au reste, l'équation [51] démontre que, en général, $\frac{v^2}{\rho} > \frac{v^2}{r}$; et de là il s'ensuit que $\frac{v^2}{\rho} + \frac{gz}{r} > T$.

Pour plus de clarté j'ajouterai que, dans le cas du mouvement conique et circulaire, l'équation [47] donne

$$C^2 r^3 = \left(T - \frac{gz}{r}\right)(r^2 - z^2) = \frac{(r^2 - z^2)}{r} v^2 \ ;$$

et que, par conséquent, l'équation [51] devient

$$v^4 \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2}\right) = g^2 \frac{(r^2 - z^2)}{r^2} \ ;$$

d'où l'on tire pour v la valeur connue de Huygens, en faisant

$$\rho = r \operatorname{sin.} \alpha \ , \qquad z = r \operatorname{cos.} \alpha \ .$$

Il me paraît d'avoir appliqué à la solution de ce problème la théorie des transcendantes elliptiques d'une manière nouvelle et complète.

Les nouveaux résultats que j'ai trouvés sont propres à faire sentir que la question avait besoin d'être reprise et analysée dans ses détails. S'il fallait démontrer, que l'application de la théorie des transcendantes elliptiques à ce même problème peut être faite d'une manière fort différente, il me suffirait de citer le Mémoire de M.r Richelot, publié en 1852 dans le Tome 45 du Journal de Crelle, et le Mémoire de M.r Tissot publié la même année dans le Tome xvii du Journal de M.r Liouville. Ces deux Mémoires sont sans doute fort recommandables, mais le but que je m'étais proposé de corriger, avec des formules sous forme finie, un passage de la Mécanique Analytique de Lagrange, m'a forcé de suivre une toute autre direction dans cette recherche, qui, bien considérée, présente des difficultés assez considérables.

MUSCI NAPOANI

SIVE

MUSCORUM AD FLUMEN NAPO IN COLUMBIA

A CLAR.^MO^ OSCULATI LECTORUM

RECENSIO

CURANTE JOSEPHO DE NOTARIS

Exhib. die 31 maii 1857.

Titulo anteposito, muscorum a clarissimo OSCULATI ad flumen Napo in Columbiae meridionalis regionibus prorsus ignotis collectorum descriptionem praebeo, additis appendicis modo speciebus aliquot circa Valparaiso a D.^no^ PUCCIO collectis. Sunt, uno verbo, muscorum species mihi a clar.^mo^ Professore DE FILIPPI et a Rev. DE NEGRI pluribus ab hinc annis benevole commissae, atque in meo de Jungermanniis americanis pugillo, grati animi causa in antecessum memoratae.

In harum etsi paucarum specierum, quas inter nonnullae splendidissimae, dispositione, celeberrimi systematis naturalis muscorum conditoris vestigia pressus sum, W. Ph. SCHIMPER nempe, qui divisiones vere naturales, naturaliaque muscorum genera, acutis absolutisque limitibus definita, in Bryologiae Europeae corollario nuperrime digessit. Schimperianam methodum, cujus tentamina nonnulla a BRIDELIO et HAMPEO jam nunc edita sunt et de qua ipsemet in muscorum italicorum syllabo [pag. VIII.] breviter locutus sum, caeteris omnibus bryologicis systematibus anteponendam esse contendo, etiamsi genera nonnulla, naturali hac methodo circumscripta, careant signis illis trivialibus levissimo ut ita dicam attactu percipiendis, quae a quibusdam, hodiernis etiam temporibus, infauste characteribus naturalibus anteponuntur. His omnibus

qui harum plantularum affinitates arripere nequeunt a Bryologiae studio recedendum esse in memoriam revoco, genera enim naturalia vel in muscorum vel in plantarum cellularium quacunque familia, unice ex omnium partium aequa aestimatione exsiliunt.

Relate ad muscos Napoanos hoc tantum adnotandum esse censeo, scilicet quod species a D.^no^ Osculati collectae ab illis a Cl. Hampeo in opella de muscis columbicis adnumeratis (*), pro maxima parte differunt, ex eo quod tractus Napoanus, quamvis Columbiae limitibus contentus, longe a Columbiae ipsius plagis septentrionalibus distat et ad alveum fluminis Amazonum spectat.

HYPNACEAE Schimp. Coroll. Bryol. Europ. p. 113.

1. Hypnum napoanum n. sp.

Aureo-virens, nitidulum, in caespites compactos inferne marcescentes contextum, altitudine tria, quatuor centimetra aequans. Caulis erectus inferiori parte cum foliis cito detritus, superne alterne ramosus, ramis erectis saepius apice curvatis. Folia distiche imbricata, at eodem tempore secunda, falcatave, e basi nonnihil constricta lanceolato-cuspidata, concava, apice obliquata, vel lanceolata longius cuspidata, falcata, margine utroque vel hinc tantum inflexo subcanaliculata, omnia enervia, integerrima, siccando corrugato-crispula. Cellulae alares amplae, pachydermaticae lutescentes, reliquae elongatae, angustae, subflexuosae. Fructificatio e caule vel e ramis primariis. Folia perichaetialia enervia, inferiora minora, ovato-acutata, intima oblongo-lanceolata, cuspidata, adpressa, concava, plica utrinque prope marginem instructa. Pedunculus debilis, laevis, nitidus, flexuosus, purpureus, duo centimetra cum dimidio vel tria longitudine aequans. Capsula inclinata, vel pedunculo curvato horizontalis vel nutans, brevis, ovato-truncata, macrostoma, badia, leptoderma. Operculum deest. Peristomii exterioris dentes lutescentes, dense trabeculati; internum croceum sed perfectum desideratur. Flores masculi exigui, gemmacei ad caulem primarium frequentes. Folia perigonialia late ovato-cuspidata, concava. Antheridia numerosa.

(*) Hampe, Ein Referat uber die Columbischen Moose, Linnaea 1847.

Foliis omnino enerviis, capsula abbreviata ovato-truncata macrostoma, cellulis foliorum alaribus amplis pachydermaticis ab H. cupressiformi et affinibus me judice distinctum.

Icon. explicat.

1. Apex ramuli. — 2. Folia e surculo primario et ramo. — 3. Capsulae. — 4. Folia perichaetialia, vicesies circiter ut praecedent.. auctae. — 5. Flos masculus insigniter auctus — 6. Cellulae foliorum alares et 7. Cellulae e folii parte superiore ad augm. 400 diametr. — 8. Peristomii exterioris dens valde auctus.

2. Brachythecium rutabulum columbicum.

Valde simile, statura, colore aureo-nitente, ramificatione, pedunculo scabro, Brachyth. rutabulo europaeo, et pariter ac illud monoicum; differt: foliis e basi potius rotundata quam dilatata ovato-acuminatis, evidentius serratis, non plicatis, foliis perichaetialibus brevius cuspidatis, capsula cylindraceo-oblonga. Cellulae baseos foliorum oblongatae sed a reliquis vix dissimiles.

3. Rhynchostegium campylocarpum.

Hypnum campylocarpum C. Muell. Syn. muscor. 2. p. 249. Hypnum Sellowii Hamp. Columbisch. moos. n.° 52. ex Muell.

HYPNO-LESKEACEAE Schimp. Coroll. p. 110.

4. Thuidium minutulum.

Schimp. Coroll. p. 112 et Bryol. europ. Thuid. p. 5. tab. I eximia. Hypnum minutulum Hedw. — C. Muell. Syn. musc. 2. p. 492.

Hypno minutulo (Sulliv. Musc. allegh. n.° 4), perpaullulum minus, sed ab eo me judice haud diversum, nec cum Hypno muricatulo Hampei (Columbisch. moos. n.° 62) comparandum.

LEUCODONTACEAE Schimp. l. c. p. 108.

5. Leucodon suborthostichus.

Schimp. in Lechler Pl. chilens. n.° 64.
Neckera suborthosticha C. Muell. Syn. musc. 2. p. 112.
Leucodon tomentosus Hampe Columbisch. moos. n.° 65!

NECKERACEAE Schimp. l. c. p. 99.

6. Neckera Osculatiana n. sp.

Laxe gregaria, e viridi pallescens, monoica. Rami e surculo primario decumbente denudato, adscendentes, palmares et longiores, complanati, quinque sex millimetra latitudine aequantes, pinnatim divisi. Ramuli elongati, patentissimi, vel deflexi, alterni saepius creberrimi, simplices vel iterum pinnati, longitudine pollices duos subinde excedentes. Folia imbricata, erecto-patula, disticha, e basi oblique semi-amplectente oblonga, apice attenuato-acutissima, vel saepius in foliis ramorum primariorum cuspidata, apiculo flexuoso, basi breviter tenuiterque binervia, transverse crebre undulata, caeterum integerrima, concaviuscula, cellulis angustis varie curvulis contexta. Flores masculi gemmacei in axilla foliorum tum caulis cum ramorum primariorum. Folia eorundem perigonialia imbricata, adpressa, concava, ovata, plus minusve attenuato-cuspidata. Antheridia pedicellata oblonga. Flores feminei axillares in surculis primariis. Folia perichaetialia imbricata, ab inferioribus late ovatis cuspidatis sensim elongata, intima oblonga, convoluta, apice attenuato-cuspidata, enervia. Pedunculus perichaetium aequans, laevis, rutilans. Capsula oblonga, erecta, tota exserta. Operculum conico-rostratum, rostro incurvo. Peristomii dentes exteriores longe cuspidato-piliformes, segmentis interioris, basi breviter connatis, duplo fere longiores.

Neckerae Chilensi celeberr. Schimperi (Ann. scient. naturell. vol. VI. p. 147. tab. IX.) pro vero ad unguem similis, tamen statura paullo majore, foliis basi breviter binerviis, apice contracto-acutis vel cuspidatis, capsula oblonga, operculo oblique rostrato, peristomii exterioris dentibus interiore fere duplo longioribus ab ea distingui potest.

Icon. explicat.

1. Folia varia e ramis primariis et ramulis quinquies aucta. — 2. Particula folii ad augm. 100 diametr. — 3. Fructus cum perichaetio quinquies auctus. — 4. Folia perichaetialia ad idem augment. — 5. Dens peristomii exterior et pars interioris ad augm. 50 diametr. — 6. Flos masculus et 7. Antheridia folio perigoniali stipata vicesies auct.

POLYTRICHACEAE Schimp. l. c. p. 87.

7. Polytrichum juniperinum columbicum.

Gregarium, socio Bryo prostrato, sed non contextum, strictum, simplicissimum, pedunculo centimetra sex, octo attingente computato, decimetrum usque integrum altitudine aequans. Caulis inferiori parte squamatus, vix tomentosus, caeterum foliis totus obtectus. Folia fusco-rutila, laxiuscula, e basi papyracea croceo-lutescente obovata, canaliculata, caulem arcte cingente subito ob margines papyraceos, integros, complicatos, semitereti subulata, laevissima, apice rigidule attenuato-cuspidata denticulisque exiguis scabrida, nervo rufescente exarata, facie lamellis compluribus instructa, madore erecto-patula, in sicco adpressa vel varie curvata sed vix tortilia. Perichaetialia papyracea tota longitudine amplectentia, elamellosa, nervo rutilante in cuspidem setaceam plus minusve elongatam, scabridam producto instructa; exteriora late elongato-oblonga, interiora angustiora, brevioraque canaliculato-subcarinata. Pedunculus crassiusculus, fuscus, nitidissimus, haud tortilis, vaginula longiuscula, longitudinaliter plicatula, glabra praeditus. Calyptra fusca, nitida, capillis densis, propexis, longis, vage ramellosis, rufescentibus tecta. Capsula matura deoperculataque in pedunculo apice curvato horizontalis vel plus minusve deflexa e basi apophysi orbiculari instructa ovato-tetragona, fusco-rutilans, sub lente subtillime striolata, longitudine diametrum bis aequans. Peristomii dentes sexaginta quatuor.

Desunt operculum et plantae masculae.

A Polytricho juniperino recedit colore totius plantae fusco-rutilante, pedunculo crassiusculo, stricto, nitidissimo, foliis laxiusculis, erecto-patulis strictiusculis, perichaetialibus papyraceis croceo-lutescentibus rigidioribus, brevius cuspidatis et toto habitu.

8. Cephalotrichum oligodus.

Bryol. europ. vol 4. Pogonat. p. 4.
Polytrichum oligodus Kze. — C. Muell. Syn. musc. 1. 206.

BRYACEAE Schimp. l. c. p. 63.

9. Mnium rostratum.

Schwaegr. — Bryol. europ. vol. III. Mnia tab. 7. — Hampe Columbisch. moos. n.° 34.

Vix ab europaeo recedit habitu rigidiore, foliis firmioribus, margine dentibus exiguioribus instructis, capsula breviore.

10. Bryum Osculatianum n. sp.

Dense compacteque in pulvinulos centimetrum cum dimidio altitudine excedentes contextum, fusco-lutescens, vix nitidum. Dioicum. Caulis inferne, radiculis rufescentibus ramosis dense obtectus, sub folia comalia ramis crebris fastigiatis, gracilibus, siccitate teretiusculis innovans. Folia comalia dense imbricata, ovata, acuta, rarius acuminato-subcuspidata, concava, margine leniter recurva, sub vitris acrioribus obsolete, ex cellulis marginalibus parce protuberantibus, denticulata, lutescentia, nervo robusto rufescente apicem attingente vel sub apice evanido exarata, in sicco conniventia. Folia innovationum prioribus minora, tenuiora, longius cuspidata, nervo sub apice evanescente instructa. Pistillidia ad vaginulam plura paraphysibus paucis obsita. Pedunculus centimetra duo cum dimidio aequans, laevis, fusco-purpureus, madore apice arcuatus. Vaginula oblonga. Capsula pyriformis nutans vel pendula, ore angustato annulata. Operculum grande hemisphaerico-conoideum obtuse mammillatum. Peristomii exterioris dentes lineari-cuspidati, lutescentes, dense trabeculati. Interius, in capsulis saltem non adhuc perfecte maturis, membrana irregulariter secta, peristomii dentibus exterioribus adglutinata.

Ex habitu Bryo caespiticio affine sed ab eo diversissimum nec ulli e specierum in synopsi muscorum clariss. Muelleri descriptorum tute referendum.

Icon. explicat.

1. Folia varia e caule fructigero et 2. Folia ex innovationibus vicesies aucta. — 3. Apex folii e ramo innovante valde auctus. — 4. Particula folii ad augm. 400 diametr. — 5. Capsula et vaginula quinquies auct. — 6. Dentes peristomii exterioris ad augm. 100 diametr.

11. Bryum prostratum.

C. Muell. Syn. musc. 1. p. 317.

Cum Bryo julaceo non immerito a cl. Muellero comparatum, ob ramos elongatos, strictos, teretiusculos, flavido-nitentes sed caeterum diversissimum, foliisque nervo vix medium attingente instructis memorabile.

12. Bryum argenteum.

C. Muell. Syn. muscor. 1. p. 314. Hamp. Columbisch. moos. n. 32.

Specimina a cl. Osculati lecta varietatem praebent, prae illis Europae aliarumve regionum mihi visis longe robustiorem, et insuper a B. lanato foliis flaccidis arcte adpressis distinctum, pariterque a varietate majore (Muell. l. c.) foliis cuspide piliformi recedentem.

13. Orthodontium Osculatianum n. sp.

Dense caespitosum, humile, olivacco-lutescens, centimetrum pedunculis computatis vix excedens. Caulis abbreviatus, rutilans, dense foliosus, sub apice fructifero gemmis axillaribus crebris innovans, e foliorum axillis radiculas tenues arachnoideas edens. Folia molliuscula, conferta, erectopatula, superiori parte varie etiam curvata aut flexuosa, ex oblongo lineari subulata, superne carinata, integra vel subinde margine obsolete sinuosa, nervo tenui, superne fere totum folii apicem occupante exarata, in sicco adpressa subcrispula nitidula. Comalia vix reliquis longiora. Cellulae foliorum basilares elongatae diaphanae, paralellogrammae, reliquae pariter valde elongatae, sed angustiores, subflexuosae, apicibus acutatae. Flores subhermaphroditi, antheridia nempe pistillidiis terminalibus numero variis in axilla foliorum comalium statim sita, et cum iis saepe commixta. Antheridia oblonga, pedicellata tenuia. Pistillidia purpurascentia paraphysibus

raris stipata. Pedunculus pallescens millimetra sex septem aequans, erectus, laevis, siccitate tortilis, in capsulae collum sensim ampliatus. Vaginula oblonga. Capsula erecta vel leniter inclinata, elongato-pyriformis, laevis, pallida. Operculum convexum rostello longiusculo curvato instructum. Annulus nullus. Peristomii exterioris dentes sedecim triangulo-subulati, lutescentes, inferne crebre trabeculati, superne nodulosi, madore conniventes. Cilia peristomii interioris dentes exterioris aequantia, basi membrana pallescente breviter connata, duplici cellularum serie composita, saepiusque cellulis ipsis inferioribus disjunctis basi fissa. Calyptra dimidiata, laevis, pallida.

Ab Orthodontio gracili peristomio interiore exterius aequante prae caeteris differt, ab O. tenui cui propius accedere videtur, floribus monoicis vel subhermaphroditis satis superque pariter distinctum.

Icon. explicat.

1. Apex caulis fertilis demtis aliquot e foliis comalibus. — 2. Folia caulina et comalia. — 3. Capsulae nonnullae. — 4. Basis pedunculi cum vaginula, pistillidia, antheridiaque, vicesies, ut praecedentes auctae. — 5. Particul. peristomii ad augm. 100 diam. — 6. Cellulae e basi folii et 7. Cellulae e parte folii superiore ad augm. 400 diametr.

BARTRAMIACEAE Schimp. l. c. p. 83.

11. Philonotis Osculatiana n. sp.

Dioica. Conferte caespitosa, sed laxe contexta. Caespites fuscescentes, pedunculis non computatis centimetrum cum dimidio vel duo altitudine attingentes. Caulis radiculosus, sub apice fructifero ramis plurimis fastigiatis divisus. Folia caulis et ramorum exigua ex ovato-triangulari-cuspidata, vix carinata, erecto-patula, nervo valido demum totam cuspidem efficiente exarata, superne e cellulis marginalibus porrectis obtuse denticulata, madore subflavicantia, in sicco adpressa, vel praesertim ad ramorum apicem secunda subfalcataque. Perichaetialia multo ampliora, ovato-cuspidata. Capsula in pedunculo siccitate anguloso, leniter subflexuoso, nitidulo, purpurascente, centimetra tria sex longitudine metiente, ampla, pachyderma, fusco-rufescens, nitida in sicco sulcata. Peristomii exterioris dentes triangulo-acutati, robusti, rufescentes, dense trabeculati. Segmenta

peristomii interioris exterius vix superantia, triangulo-lanceolata, flavescentia, ciliis binis vel singulo, saepe cum segmentis ipsis connascentibus interjectis. Plantae masculae femineis intermixtae iisdemque graciliores, sub flore gemmaceo, crassiusculo, terminali innovantes. Folia perigonialia exteriora perichaetialibus prorsus similia, interiora e basi lata obovata subito in cuspidem subulatam nervo evanescente percursam contracta. Antheridia et paraphyses copiosissimae.

Icon. explicat.

1. Folia ex innovationibus et 2. Folium perichaetiale vicesies auct. — 3. Apex folii centies auctus. — 4. Folia perigonialia vicesies aucta. — 5. Apex folii perigonialis centies auctus. — 6. Capsula quinquies aucta — 7. Dens peristomii exterioris et 8. Particula peristomii interioris ad augm. 100 diametr.

MEESIACEAE Schimp. l. c. p. 82.

OSCULATIA n. gen.

Flores dioici terminales. Capsula alte pedunculata, sphaeroidea, laevis, annulata, operculataque. Peristomium simplex. Dentes sedecim linearisubulati, trabeculati, integri, conniventes e membrana basilari homogenea, annuli latitudinem aequante oriundi.

Flos masculus gemmiformis.

Plantula facie, forma et directione capsulae subhorizontali, contextu foliorum Catoscopium quadantenus similis, sed statura longe majore, rigiditate foliorum fere polytrichoidea, in Meesiacearum familia insignis, annuenteque celeberrimo systematis naturalis muscorum frondosorum conditore, W. Ph. Schimper, typum novi generis Catoscopium cum Meesiis nectens praebens, quod strenuo Columbiae superioris peregrinatori, deque Historia naturali optime merito nuncupandum esse constitui.

15. Osculatia columbica.

In caespites laxiusculos haud contextos conferta, in sicco fusco-fulvescens. Dioica. Caulis robustus, rigens, erectus, centimetra duo cum dimidio altitudine attingens, sub apice fructigero, innovando parce divisus,

inferiori parte intra folia radiculas fasciculatas filiformes, rufescentes, contortas, ramosasve edens. Folia madore patula, e basi lata oblongo-lanceolata, nervo valido, rigido, rufescente, inferne supra applanato, excurrente fortiter cuspidata fere spinuliformia, caeterum obscure lutescentia, carinata, integerrima, margine vix revoluta, in sicco erectiuscula, contracta, polytrichoidea. Comalia caulinis similia sed nervo longius excurrente cuspidato-aristata. Cellulae foliorum parallelogrammae, pachydermaticae, reticulantes, marginales subquadratae, latere exteriore leuissime convexae. Vaginula fusco-purpurea cylindracea. Pedunculus erectus apice sub theca paullulum incrassatus leniterque inflexus, siccitate subtortilis, purpureus, centimetra sex longitudine attingens. Capsula e basi brevissime attenuata in pedunculum defluente, sphaeroidea, laevis, fusca, inclinata, ore annulato angustata, pachydermatica. Operculum ex hemisphaerico conoideum, mucronulatum, capsula multoties minus. Calyptra deest. Peristomium, saltem in speciminibus visis, simplex, sedecim dentatus, dentes e membrana basilari pallescente, annuli latitudinem aequante oriundi, linearisubulati, conniventes, dense trabeculati, linea longitudinali exarati, apice attenuato diaphani. Plantae masculae femineis mixtae iisdemque similes. Flos gemmiformis. Perigonialia exteriora ovata, nervo longe cuspidata, intima antheridia circumbientia multo minora, temioraque, valde concava, fuscescentia. Antheridia numerosa obverse oblonga. Paraphyses subnullae.

Icon. explicat.

1. Folia caulina et comalia et 2. Folium a latere inspectum quinquies auct. — 3. Foliorum sectiones transversae vicesies auct. — 4. Contextus foliorum ad augm. 400 diametr. — 5. Capsula cum pedunculo et vaginula et 6. Capsula iterum quinquies auct. — 7. Pars peristomii ad augm. 25 diametr. — 8. Annuli pars ad augm. idem — 9. Folia perigonialia exteriora et 10. Folium perigoniale interius cum antheridiis quinquies auct. — 11. Antheridium ad augm. 25 diametr.

FUNARIACEAE Schimp. l. c. p. 59.

16. Funaria calvescens.

Schwaegr. — C. Muell. Syn. musc. 1. p. 107.
Funaria hygrometrica calvescens Hamp. Columb. moos. n. 9.
In plaga a cl. Osculati peragrata omnium communissima.

SPLACHNACEAE Schimp. l. c. p. 53.

17. Tayloria Moritziana.

Hampe Columbisch. moos. n. 10. Muell. Syn. muscor. 1. p. 134.

Peristomii dentes 16 per paria coaliti, operculo decedente apice longo attenuato connascentes, caeterum planta speciosa facile distincta, *durch die fingeränlich verlängerten Blattzähne.* (Hamp. l. c.).

GRIMMIACEAE Schimp. l. c. p. 45.

18. Grimmia columbica n. sp.

Dense pulvinata, centimetrum cum dimidio altitudine attingens. Caulis parce ramosus, erectus, ramis hypogynis fastigiatis innovans, inferne radiculis fuscis vestitus. Folia erecto-patula, in sicco spiraliter circa caulem convoluta, inferiora parva lineari-lanceolata, apice obtusiusculo, mutica, fuscescentia, quae sequuntur usque ad superiora, perichaetialiaque flavescentia sensim ampliora, lanceolata, ovato-lanceolata, in pilum diaphanum vix denticulatum, flexuosum vel crispulum sensim sensimque ab inferioribus foliis longiorem desinentia, omnia carinata, margine vix recurva, nervo excurrente percursa. Cellulae alares elongatae, reliquae minutae quadratae, oblongae, trigonae, variae, crassiusculae, parietibus intus subundulatis, marginales dimidiatae. Seta folia perichaetialia paullo superans, varie in sicco curvula et tortilis, fuscescens. Capsula cylindraceo-oblonga, annulata, laevissima. Operculum rostratum rectiusculum, capsulam subaequans. Calyptra mitraeformis, laevis, quinquefida. Dentes peristomii obscure rubri, trabeculati, margine denticulati, indivisi, foraminibus aliquot tantum pertusi, vel irregulariter in crura duo inaequalia distincta, vel hic illic connascentia divisi.

Unice ut mihi visum est cum Grimmia longirostri clariss. Hookeri (Musc. exot. tab. LXII) comparanda; differt ab hac specie capsula cylindraceo-oblonga, pedunculo arcuato, dentibus peristomii haud integris, foliis infimis muticis.

Icon. explicat.

1. Apex caulis fructigeri cum fructu et unum e foliis comalibus interioribus. — 2. Folia caulis inferiora, e medietate et parte caulis superiore ut praecedent. quinquies aucta. — 3-4. Cellulae e foliorum basi et parte superiore ad augm. 400 diametr. — 5. Calyptra quinquies aucta. — 6. Annul. particula et 7. Dentes aliquot peristomii ad augm. 100 diametr.

ORTHOTRICHACEAE Schimp. l. c. p. 40.

19. Orthotrichum epibryum n. sp.

Luride virens, humile, in caespites laxiusculos centimetrum altitudine vix superantes coadunatum. Monoicum. Diploperistomum. Caulis sub apice fructigero innovationibus brevibus iterum fertilibus parce divisus. Folia conferta siccitate adpressa, varie flexa, madore patula, flavescentia inuriculata, e basi ovata, oblongave, lineari elongato-lanceolata, apice attenuato-cuspidata, vel ex apice obtusato abrupte apiculata, nervo sub apice evanescente percursa, carinata, margine vage reflexo, undulatoque superne minute croso-crenulata. Comalia paullo longiora. Cellulae baseos foliorum infimae rotundatae, quae sequuntur elongatae, reliquae minutae, rotundatae, pachydermaticae. Capsula exserta, oblonga, laevis, in sicco octies sulcata, pedunculo triplo longior. Vaginula paraphysibus elongatis obvallata. Operculum convexo longe mucronatum. Calyptra campanulata, sulcata, superne parce pilosa, capsula paullo brevior. Peristomii exterioris dentes 16 per paria geminati, subinde invicem in unoquoque pari cohaerentes, circumscriptione triangulo-elongati, pallescentes, seriebus binis cellularum compositi, in sicco recurvi. Cilia peristomii interioris conniventes, lineares, cellulis plerumque uniserialibus compositi. Sporae rotundae, laeves. Flores masculi gemmacei in axilla foliorum superiorum caulium fructigerorum. — In B. Osculatiano parasiticum.

Icon. explicat.

1. Folium e caule et 2. Folia e caulis parte superiore et folia comalia quinq. auct. — 4. Foliorum apex ad augm. 100 diametr. — 5-6. Cellulae e basi et parte superiore foliorum ad augm. 400 diametr. — 7. Sectiones foliorum transversae viceties auctae. — 8. Apex caulis fructigeri, demtis

foliis superioribus, vaginulam et florem masculum exhibens quinq. auct. — 9. Capsula et operculum. — 10. Capsula e sicco. — 11. Calyptra omn. ad augment. ut in n.° 8. — 12. Pars peristomii exterioris et interioris ad augment. 100 diametr. — 13. Sporae ad id. augm.

20. Macromitrium Osculatianum n. sp.

Robustum, fusco-rufescens. Caulis decumbens, crassiusculus, rhizomatoideus, foliis fuscatis marcescentibus, tomentoque fusco radiculoso vestitus, secunde crebreque ramosus. Rami fertiles abbreviati, sub apice innovantes: ramuli erecti, centimetrum cum dimidio longitudine aequantes. Folia dense conferta, in sicco valde contorta, madore erecto-patula, saepeque subfractiflexi-obliquata, obscure lutescentia, oblongo-lanceolata, apice obtusiusculo, nervo rufescente percursa, omnia carinata, praesertim superiori parte, inferne saepe uno vel utroque latere plicata, recurvataque, caeterum facie papillosa, margine supra medium ad apicem usque argute serrulata. Cellulae basilares marginantes parallelogrammae, quae sequuntur angustissimae flexuosae, reliquae ad nervum usque elongatae, parte mediana, eae praesertim quae plicis folii respondent, obtuse umbonatae. Cellulae partis foliorum superioris minutae, pachydermaticae, rotundatae. Perichaetialia reliquis grandiora, adpressa, stricta, longius acuminato-cuspidata, utrinque marginem versus plicata. Pedunculus elongatus, laevis, purpureus millimetra viginti quinque longitudine aequans, in sicco tortilis. Capsula e basi nonnihil attenuata, oblonga, octies sulcata, sub ore leniter constricta, annulata, fusca. Operculum rostratum capsula brevius. Calyptra nuda, superne sulcata, fusco-picea, inferiori parte in laciniis compluribus angustis firmiusculis soluta, capsulam longitudine excedens. Peristomii dentes externi lineares obtusi, contigui, recti, binis cellularum transverse elongatarum seriebus compositi, pallide fuscescentes. Internum tubulosum cellulis elongatis plerisque parallelogrammis pallescentibus, punctatis constans, vix ore in lacinias lineares cellularum series divisum.

Icon. explicat.

1. Folia e ramo hornotino et 2. Folia comalia. — 3. Vaginula. — 4. Capsula. — 5. Operculum. — 6. Calyptra, omnes quinquies auctae. — 7. Folii apex ad augm. 100 diametr. — 8. Cellul. e margine baseos foliorum ad augm. 400 diametr. — 9. Cellulae e parte mediana baseos foliorum

ad id. augm. — 10. Cellulae e medietate folii ad id. augm. — 11. Cellulae ex apice folii ad augm. ut praecedentes. — 12. Sectiones foliorum transversae vicesies auctae. — 13. Pars peristomii exterioris et 14. Pars peristomii interni vicesies auct. — 13 *bis*. Dentis peristomii exterioris cellulae ad 400 diametr.

POTTIACEAE Schimp. l. c. p. 24.

21. Tortula napoana n. sp.

Compacto caespitosa, duo, quatuor centimetra altitudine attingens, in sicco luride e rufo-fusca. Dioica. Caulis erectus tomento radiculoso fusco inferne tectus, gemmulis hypogynis axillaribus innovando fastigiatim parce, stricteque ramosus. Folia dense conferta, inferiori parte diaphana, subflavicantia, a medio inde obscure viridia subopaca, madore vix patula, late oblongo-ligulata, apice rotundata, nervo valido rufescente obsolete mucronata, carinata, praesertim superiori parte, margine plana, vel plus minusve inferiori parte revoluta. Cellulae baseos elongatae, tenues, caeterae minutae, rotundatae, rotundatove angulatae protuberantes. In sicco folia complicato-contorta, adpressa. Perichaetialia caulinis paullo minora. Pedunculus centimetra duo longitudine attingens, fusco-rutilans, in sicco contortus. Calyptra fuscescens, grandis. Capsula cylindracea leniter plerumque curvata. Operculum conicum acutum rectum, capsula plusquam dimidio brevius. Peristomium breviter tubulosum sed perfectum non vidi. Annulus, e capsulis nondum maturis, angustissimus. Flos masculus in ramorum apice gemmaceus, foliis periandris late ovatis cinctus, quorum interiora minora, tenuiora, enervia. Antheridia copiosa, paraphysibus conferviformibus stipata.

Proxima Barbulae glaciali celeberr. Kunzei (Mueller Syn. muscor. 1. p. 634), a qua foliis oblongo-ligulatis, nec late oblongo-lanceolatis, capsula cylindracea, nec majuscula oblonga, pedunculo demum elongato nec perbrevi differt.

Icon. explicat.

1. Apex caulis fructigeri cum foliis comalibus interioribus et ramulo innovante. — 2. Calyptra e capsula imperfecta. — 3. Folia ut praecedent. quinquies auct. — 4. Sectiones foliorum transversae vicesies auct. — 5. Particula partis superioris folii ad augm. 400 diametr. — 6. Particul. segment.

transvers. folii ad idem augment. — 7. Folia periandra quinq. auct. — 8 Antheridia cum paraphysibus ad id. augm.

DICRANACEAE Schimp. l. c. p. 41.

22. Dicranella Osculatiana n. sp.

Laxe caespitosa, centimetra 3 altitudine, pedunculis non computatis aequans, olivaceo-flavicans. Dioica. Caulis erectus sub apice innovando, furcatim plerumque divisus, inferne foliis marcescentibus annorum superiorum, radiculisque obsitus. Folia laxiuscula, spiraliter tristicha et interdum fere bifaria, erectiuscula, e basi ovata sensim longe subulata, canaliculato-carinata, nervo excurrente latiusculo, superne totum folium implente percursa, integra, madore flavicantia, vix nitida, in sicco subcrispula. Comalia reliquis conspicue longiora, oblonga longe subulata, subinde secunda. Cellulae foliorum basilares elongatae, angustae, in parte angustiore foliorum ipsorum itidem elongatae subparallelepipedae sed minores et minus evidentes. Pedunculus millimetra usque tredecim longitudine metiens, erectus, laevis, nitidus, pallide rutilans, sub apice ad capsulae originem laevissime saepe geniculatus, siccitate haud tortilis. Capsula erecta vel leniter inclinata e basi constricta fere apophysata ovato-oblonga, annulata. Operculum e basi conoidea in rostrum subulatum capsulam fere aequans productum. Calyptra dimidiata laevis, glabra. Peristomii dentes sedecim longiusculi, rutilantes, trabeculati, varii, profunde bifidi, cruribus attenuato-filiformibus, liberis, aequalibus, inaequalibusve, vel hic illic cohaerentibus, raro una alterave iterum bifida, vel prope basim fissa, superne sub vitris fortioribus scabris. Plantae masculae fructiferis intermixtae sed parciores in visis speciminibus. Flos masculus terminalis gemmaceus, crassus, folia periandra e basi valde dilatata, colorata, canaliculata, adpressa longe subulata, secundo-falcata, caeterum caulinis similia, intima breviter cuspidata, saturatius colorata. Antheridia copiosa tenuia, cylindracea, paraphysibus tenuissimis, creberrimis antheridia superantibus obsita. Pone florem caulis innovatione continuatur, ita ut flos superioris anni, lateralis evadit. Sporae rotundatae, obsolete muricatae.

Unice accedit ad Dicranellam Perrottetii (Dicranum Perrotteti Montagn. Syll. n. 135 et Cent. VI. n. 9. tab. 8. fig. 1. Mitell. Syn. muscor. 1. 434), quam a celeberrimo Montagne communicatam possideo, sed statura huic duplo majore, capsula magis elongata, prae reliquis differt.

Icon. explicat.

1. 2. 3. Folia et 4-5. Folia comalia vicesies aucta. — 6-7. Cellulae e basi et e parte supera foliorum ad augm. 400 diametr. — 8. 9. 10. 11. Capsulae nonnullae et pedunculus apice calyptram gerens vicesies auct. — 12. Dentes peristomii varii ad augm. 100 diametr. — 13. Dens peristomii ad augm. 400 diametr. — 14. Pars annuli centies auct. — 15. Sporae ad idem augm. — 15. 16. 17. Folia periandra vicesies aucta. — 18. Antheridium ad augm. idem.

APPENDIX

MUSCORUM CHILENSIUM A D. PUCCIO COLLECTORUM

PUGILLUS.

1. RACOMITRIUM PUCCIOANUM n. sp.

Laxe sed late caespitosum, rigidum, elatum, decimetrum altitudine attingens, fulvo-canescens. Caulis flexuosus, alterne dissiteque ramosus, ramis rigidis, subaequilongis, plerumque simplicibus, patulis, recurvatisque. Folia dense conferta, erectiuscula, e basi lanceolata, longe subulata, eximie carinata, margine reflexa et interdum secus longitudinem plica una alterave plus minusve extante instructa, apice toto diaphano piliformia, canescentia, pilo integro sed muricato-scabro, in sicco adpressa subsecunda. Folia madefacta lutescentia, cellulis pachydermaticis ambitu flexuosis contexta, intus superficie undulatis. Flores feminei in ramulis terminales. Pistillidia plura e basi subclavata longe styligera. Flores masculi desunt in speciminibus visis.

Medium inter Racomitrium lanuginosum et R. conterminum (C. MUELL. Syn. muscor. 2. 654. sub Grimmia) quod a clariss. LEHMANN, ab OERSTEDIO lectum, possideo, a lanuginoso apice foliorum piliformi non dentato, a contermino apice ipso scaberrimo nec laevi distinguitur.

2. CAMPYLOPUS MONTAGNEI n. sp.

Dense caespitosum, fastigiatum sed non contextum, centimetra quinque sex longitudine attingens. Caespites inferne dilute fusci, superne sub foliis

hornotinis aureo-nitentibus, coloris subpicci, haud canescentes. Caulis a basi subadscendente erectus, strictusve, simplex vel semel plerumque divisus, apice indefinitus, saltem in exemplaribus sterilibus quae ad manus sunt, in sicco fragilis. Folia conferta, erectiuscula, in apice caulium subsecunda, e basi anguste ovata, capillari subulata, canaliculata, dorso laevia, juniora summo apice spinuloso-denticulata, canescentia, caetera concoloria, fusca, in sicco magis adpressa. Nervus latus statim supra basim totum folium occupans. Cellulae alares oblongae, tenues, quae sequuntur angustissimae, pachydermaticae, ad nervum elongatae stipatae.

Facies Campylopi atrovirentis a quo statura elatiore, rigiditate, foliis dorso-laevibus, brevioribus differt. An huc Campylopus atrovirens clariss. Montagne in Voyag. Pol. sud p. 300? Caeterum a Campylop. longipilo, haec species Chilensis foliis dorso laevissimis omnino differt.

Icon. explicat.

1. 2. 3. Folia. — 4. Pars folii inferior explanata. — 5. Apex foliorum nonnullorum, omnes vicesies auctae. — 6. Pars folii inferior ad augm. 100 diametr.

3. Campylopus chilensis n. sp.

Late caespitosum robustissimum, centimetra tria altitudine quidquam excedens, fusco-nitidum, apice foliis novellis piligeris canescens. Caulis dichotome fastigiatimque ramosus, ramique valde crassi, polytrichoidei, in sicco fragiles. Folia densissime conferta, madore patula, lanceolata, apice in pilum elongatum, adpresse denticulatum, folium subaequantem desinentia, e basi canaliculata, convoluta, dorso laevia, nervo latissimo prope apicem totum folium occupante, dein in pilum diaphanum excurrente percursa, in sicco adpressa, secundataque. Cellulae alares parallelogrammae, tenues, reliquae angustissimae, pachydermaticae flexuosae, ad nervum elongatae, stipatae.

Facies fere Polytrichi piliferi et pulcherrimus.

Icon. explicat.

1. 2. 3. Folia varia. — 4. Section. folii transversae vicesies auct. ut praecedent. — 5. Folii apex ad augm. 100 diametr. — 6. Pars folii e parte inferiore ad augm. 400 diametr.

4. Dicranum chilense n. sp

Amoene aureo-nitens, laxe confertum, haud intextum. Caulis erectus simplex vel a basi bifidus, ramisque erectis, centimetra quinque sex altitudine aequantibus. Folia laxa, eximie circinnato-falcato-secunda, praelonga, e basi latiuscula semi-amplectente et utrinque breviter decurrente, longe subulato-setacea, convoluta, nervo tenui excurrente percursa, apice flexuoso denticulata, caeterum laevissima. Cellulae alares rotundatae, diaphanae, reliquae angustae, praelongae, flexuosae, parietibus crassis hic illic interruptis.

Species statura, foliis laxis eleganter circinnato-falcatis, basi breviter decurrentibus, tenuinerviis, laevibus, aureo-nitentibus memorabilis et ab omnibus hucusque descriptis ut mihi videtur distincta.

5. Dicranum imponens

Montagn. Voyag. Pol. sud p. 198.

Dense caespitosum sed non intextum, fulvo aureo-nitens. Caulis quinque centimetra altitudine metiens dichotome ramosus, vel hic illic fasciculos ramorum fastigiatorum edens. Rami stricti. Folia e basi adpressa amplectente erecto-patula conferta, undique divergentia, late oblongo-lanceolata, canaliculato-convoluta, praesertim ad apicem, obtusiuscula, stricta, integerrima, laevissima, nervo tenui angusto evanescente instructa in sicco haud crispata, in ramorum apicibus penicillatim saepe adproximata. Cellulae alares grandes pachydermaticae quadratae, interstitiis validis rufescentibus distinctae ex quo basis foliorum fusco-rufescens et robustior prae reliqua eorundem parte. Caeterum cellulae elongatae, flexuosae, angustae, intus strato crassiusculo hic illic interrupto obductae. Folia ad basim ramorum reliquis breviora.

Icon. explicat.

1. 2. 3. 4. Folia varia quinquies aucta. — 5. Cellulae alares foliorum ad augm. 400 diam. — 6. Cellulae e parte super. folior. ad id. augm.

I.



Hypnum
Napoanum.

II.

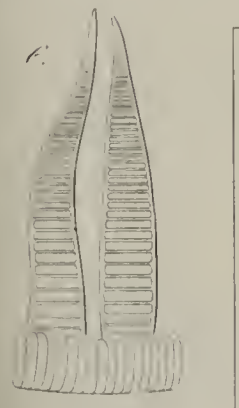


Neckera Oseulatiana.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

III.





Bryum Osculatianum.

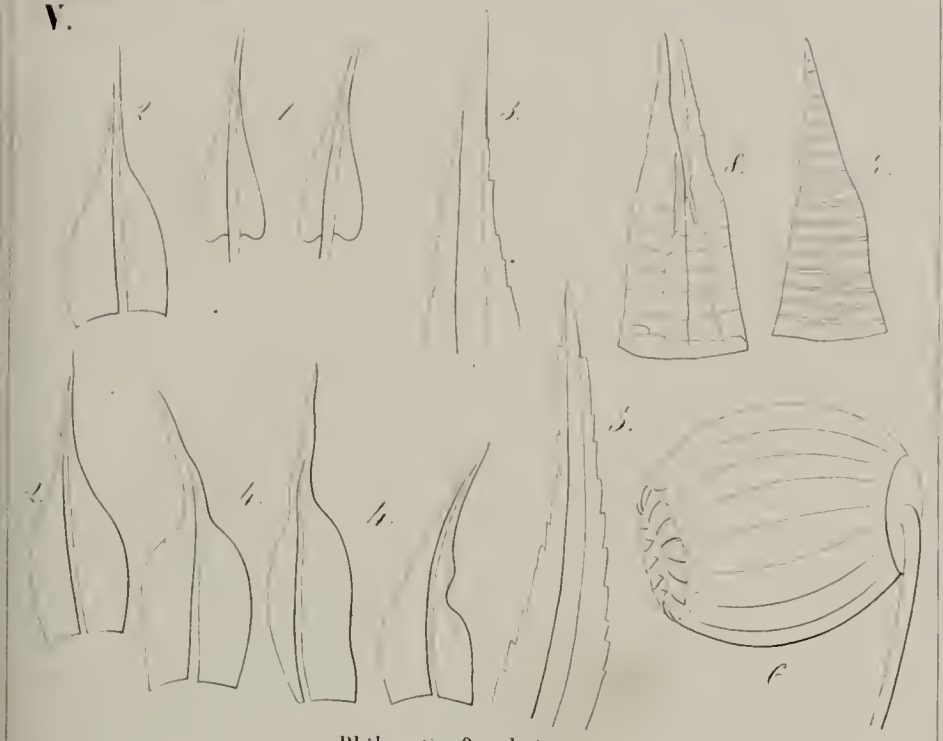
IV.



Orthodontium
Osculatianum

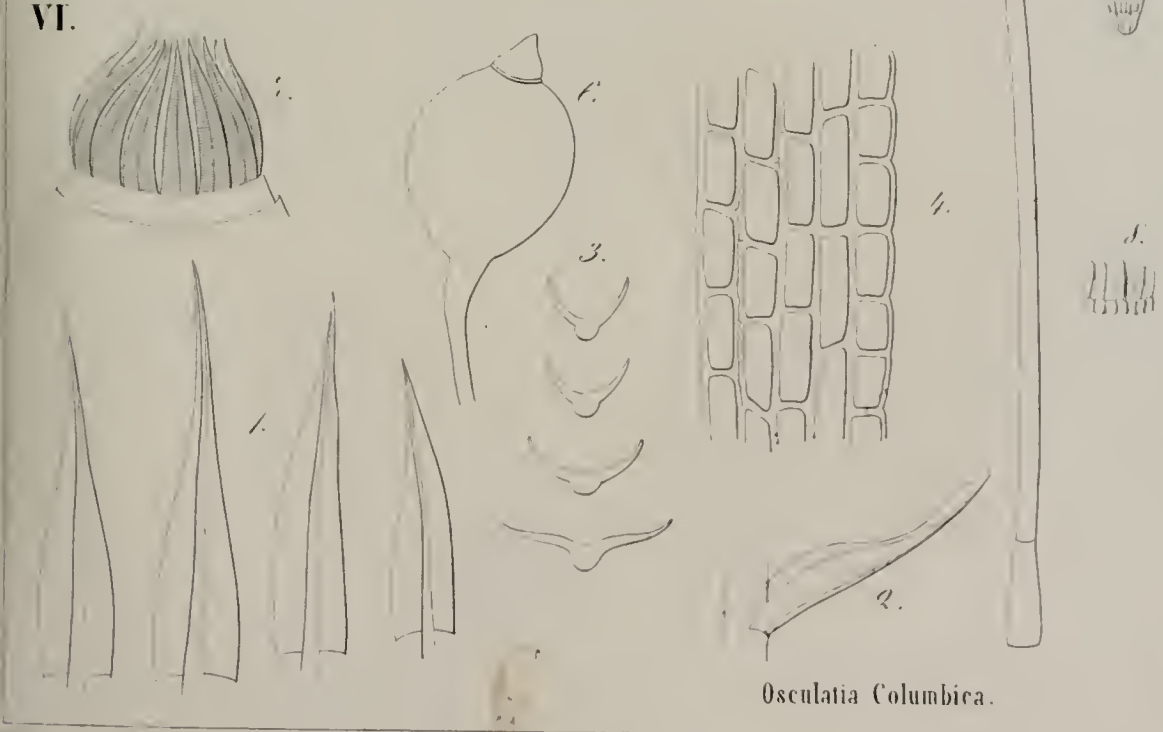
BM
NATURAL HISTORY.

V.



Philonotis Osculatiana.

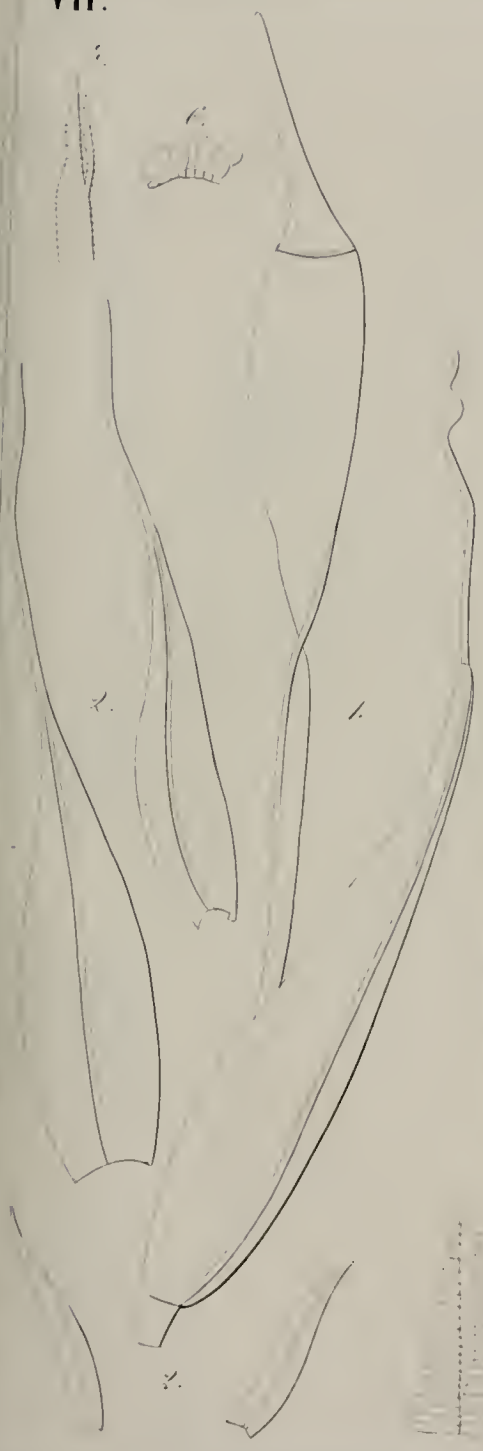
VI.



Osculatia Columbica.


BRITISH
NATIONAL HISTORY

VII.



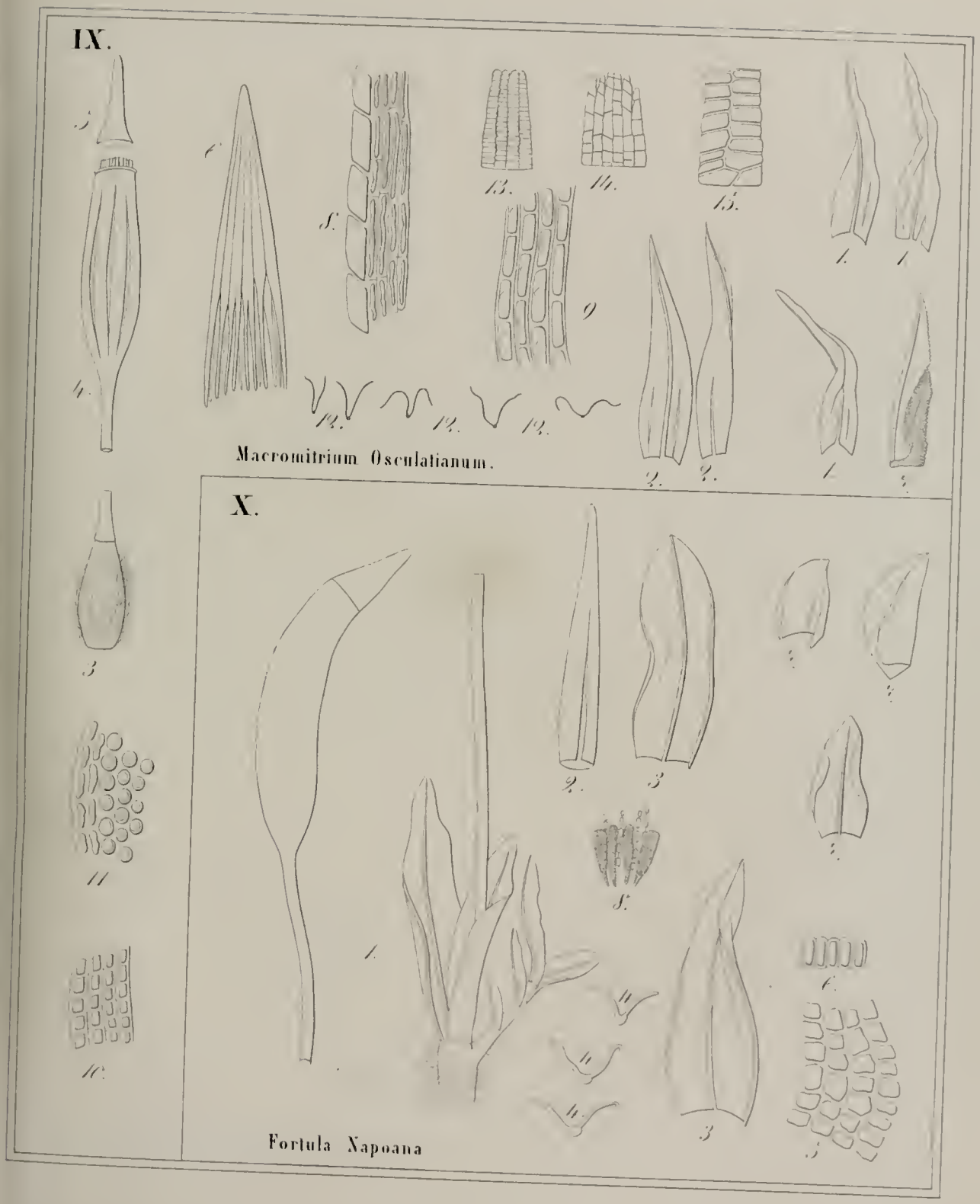
Grimmia Columbica.

VIII.



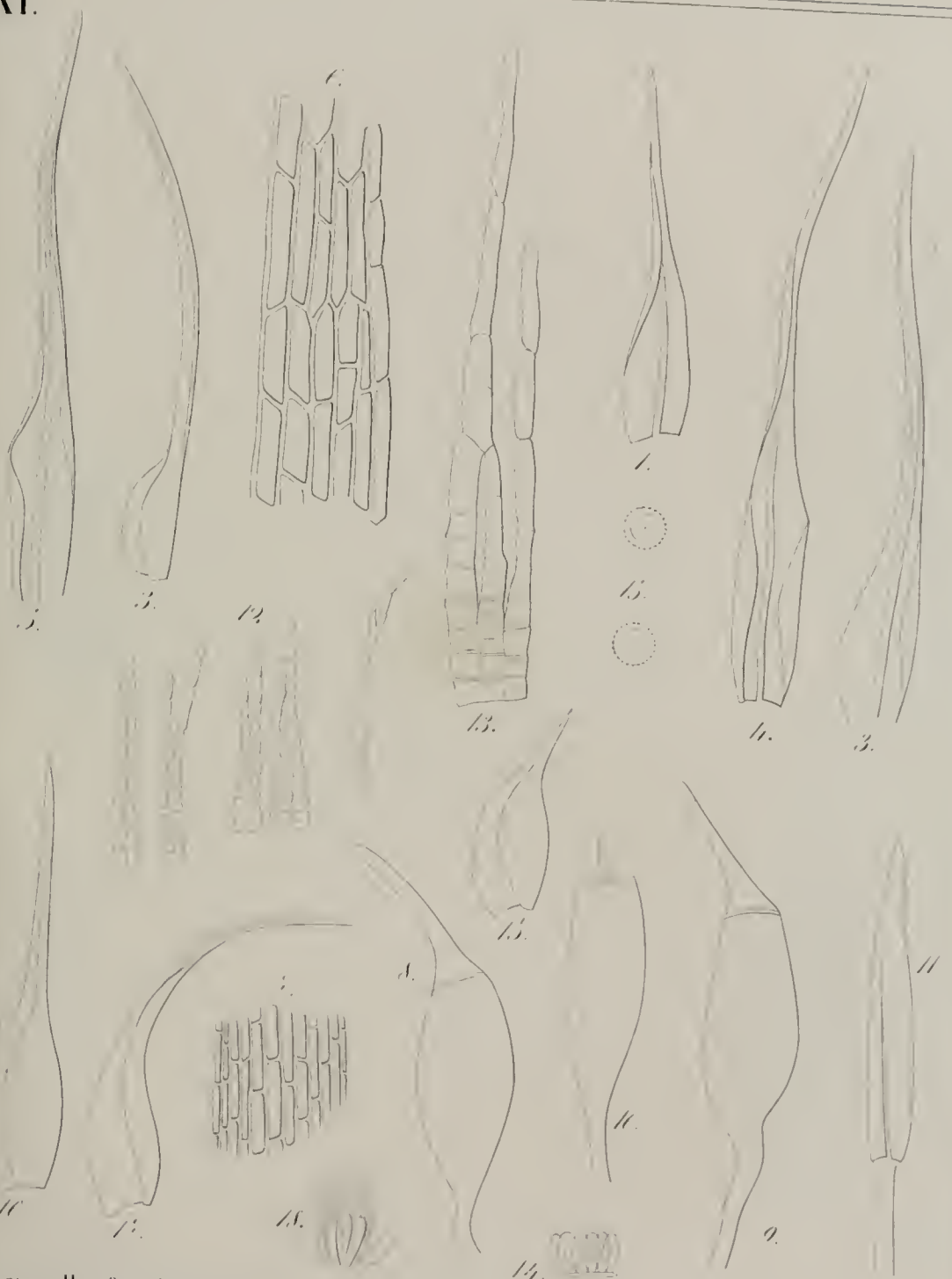
Orthotrichum Epibryum


NATURAL HISTORY


IX.
Macromitrium Osculatianum.
X.
Fortula Napoana

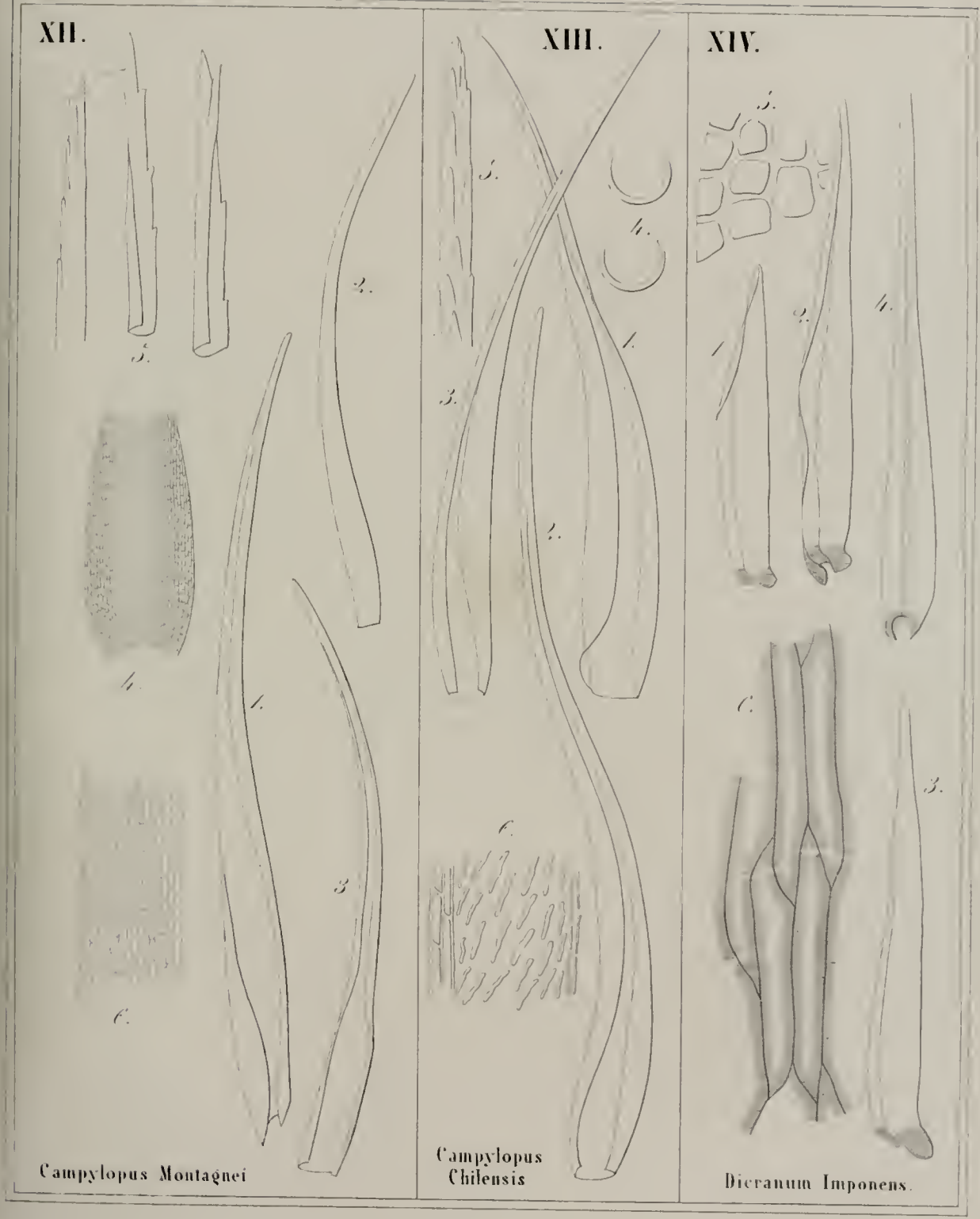

NATURAL HISTORY.

XI.



Dicranella Osculatiana.


BRITISH
NATURAL HISTORY


XII.
XIII.
XIV.
Campylopus Montagnei
Campylopus Chilensis
Dicranum Imponens.


NATURAL HISTORY.

INDEX

Brachythecium rutabulum columbicum ... pag. 439
Bryum argenteum ... ... » 443
—— *Osculatianum* ... » 442
—— *prostratum* ... » 443
Campylopus chilensis ... » 453
—— *Montagnei* ... » 452
Cephalotrichum oligodus ... » 442
Dicranella Osculatiana ... » 451
Dicranum chilense ... » 454
—— *imponens* ... » 454
Funaria calvescens ... » 446
Grimmia columbica ... » 447
Hypnum napoanum ... » 438
Leucodon suborthostichus ... » 440
Macromitrium Osculatianum ... pag 441
Mnium rostratum ... » 442
Neckera Osculatiana ... » 440
Orthodontium Osculatianum ... » 443
Orthotrichum epibryum ... » 448
Osculatia columbica ... » 445
Philonotis Osculatiana ... » 444
Polytrichum juniperinum ... » 441
Racomitrium Puccioanum ... » 452
Rhynchostegium campylocarpum ... » 439
Tayloria Moritziana ... » 447
Thuidium minutulum ... » 439
Tortula napoana ... » 450

APPUNTI

PER UN NUOVO CENSIMENTO

DELLE

EPATICHE ITALIANE

PER CURA

DI

G. DE NOTARIS

Memoria letta nell'adunanza del 3 gennaio 1858.

Vent'anni sono, la R. Accademia delle Scienze degnavasi di approvare, per la inserzione nelle propie Memorie, un mio tenuissimo lavoro, in cui, sotto il titolo di *Primitiae hepaticologiae italicae* (1), io feci l'esperimento di fornire in poche pagine il censo delle Epatiche italiane e qualche annotazioni sulle specie meno comuni, o che non erano state accennate nelle Opere immortali di Micheli e di Raddi, a cui si devono i primi saggi di sistemazione delle piante, che si comprendono in questa interessante famiglia.

Quel mio opuscolo suonava quasi la promessa di un ulteriore tentativo a completare, secondo la misura delle mie forze, la storia delle Epatiche italiane, all'uopo di nuove ricerche e di studii più attenti, e coll'aiuto delle scoperte dei Botanici connazionali contemporanei, i quali hanno nome ed autorità nel campo degli studii crittogamici.

Svagato in altre ricerche, e, all'accedere di nuove incumbenze, sviato anche spesso dalla meta che io avrei ambito di raggiungere, non ho però

(1) Memorie della R. Accademia delle Scienze, Serie II, Tom. I.

dimenticato il mio proponimento, e quantunque volte ho potuto mi sono studiato di arricchire la suppellettile necessaria a rifare su più ampio disegno quelle mie primizie, e compulsando anche spesso i Botanici italiani, che mi onorano della loro amicizia, perchè mi facessero copia delle loro scoverte.

E qui già mi trovo in dovere di declinare i nomi dei chiar.^mi^ Moris, Cesati, Baglietto, Daldini, Caldesi, Doria, Franzoni, Marzialetti e dello sventuratissimo Rota, rapito alla famiglia, agli amici, alla scienza nella funesta epidemia del 1855, a cui coraggiosamente si espose in servigio dei cittadini di Bergamo, ove il tapino da poco tempo si era condotto.

Però il capitale della mia collezione di Epatiche, e per le sovvenzioni di questi generosi e per le ricerche per conto mio propio eseguite, si accrebbe di specie non poche dapprima ignorate, per cui sebbene l'effettivo di questa famiglia, nei limiti del nostro territorio, risulti tuttavia minore al confronto delle ricchezze di cui vanno superbe l'Allemagna, le isole Britanniche e la Francia, pure la Flora italiana può fin d'ora gareggiare con esse, avvegnachè al difetto di molte specie esclusive a quelle contrade, supplisce la propietà di qualche tipi privilegiati, che più presto alla Flora dei paesi tropicali che all'Europa si direbbero appartenere. S'aggiunge che tuttavia, non giovercbbe il dissimularlo, le ricerche fatte in Italia per la scoperta di nuove specie di questa famiglia, risultano circoscritte a limitatissime plaghe. Qualche tratto delle alpi piemontesi e lombarde, qualche tratto dell'apennino ligure ed etrusco e piceno, poco delle isole e del rimanente d'Italia si conosce; onde si presenta non del tutto improbabile la congettura che alcuna delle Epatiche forse più interessanti e più caratteristiche dell'Italia non si conoscano ancora.

Nell'intervallo decorso dalla pubblicazione delle mie primizie, non contando la Florula di Capraia, a cui in qualche parte ho contribuito io pure, appena possiamo noverare in Italia, in conto di contribuzioni allo studio delle Epatiche, gli elenchi delle Crittogame comensi del chiar.^mo^ Prof. Garovaglio, in cui alcune belle specie veggonsi per la prima volta segnalate, come sarebbero *Sauteria alpina*, *Riccia sorocarpa*, *Steetzia Blyttii* e *Lyellii*, e la comunicazione fatta dal fu Prof. Sassi alla sezione di Botanica del primo congresso degli Scienziati italiani, relativamente alla scoperta di una specie di *Antrocephalus* nelle pianure di Albenga e presso Finale in Liguria.

A fianco di queste pubblicazioni, avremmo avuto, per cura del D. Rota, l'enumerazione dei Muschi e delle Epatiche della provincia di Bergamo, se il valoroso giovane prematuramente non ci fosse stato rapito. E poichè io m'ebbi in dono dalla inconsolabile vedova di lui, signora Albina Brugnatelli, il manoscritto di questi lavori del Rota, e per favore dell'illustre Municipio di Bergamo, che splendidamente ne acquistava le collezioni, gran parte degli esemplari delle specie indicate nel citato manoscritto; così mi fo un obbligo di estrarne l'elenco delle Epatiche bergomensi, cui presento a questa R. Accademia, quale un documento importante nel campo degli studii a cui mi accingo.

Le ragioni per cui lo studio delle Epatiche in Italia risulta quasi deserto, stanno, se io mi appongo, nel fatto, che molte di queste piante nel nostro paese, e specialmente nella regione mediterranea, assai di rado si riscontrano in perfetto sviluppo, per cui riesce difficile l'afferrare i caratteri distintivi di molte specie che strettamente si assomigliano nel loro aspetto, quantunque appartengano a generi egregiamente distinti nei particolari della loro fruttificazione. Abbiamo in Italia di molte specie, e mi verrà forse occasione di fornirne le prove, le quali, ne' caratteri che si traggono dalla divisione dello stelo, dalla forma ed inserzione delle foglie, ripetono le sembianze di specie completamente conosciute in tutte le loro particolarità; ma nondimeno per qualche carattere ne differiscono, e mancando delle parti della fruttificazione, non si può definitivamente stabilire se debbansi avere per varietà di quelle, ovvero se non ne siano egregiamente distinte. Quindi, alla coda delle nostre collezioni, ci troviamo costretti a raccogliere una serie di forme ribelli, da tramandarsi in eredità a coloro che si terranno in appresso sulle nostre pedate. Forse, se verrà un giorno in cui le posizioni più adatte allo sviluppo di queste piante siano state diligentemente frugate, si riescirà a conoscere la fruttificazione di queste ritrose, dove non vogliasi ammettere l'ipotesi proferita dal chiarissimo mio amico il Barone Cesati, sussistere attualmente tra le piante viventi alcune specie, che si potrebbero riguardare quali avanzi di una Flora tramontata, dannate a perpetua sterilità, in quanto che nel cataclisma da cui furono scampate, in specie fornite di fiori dioici, i rappresentanti di uno dei due sessi sarebbero periti, condotte fino a noi per indefinita propagazione gemmipara.

S'aggiunge inoltre che al presente la distinzione dei generi delle Epatiche, essendo interamente basata sulle differenze che le specie presentano

nelle parti della fruttificazione, riesce molte volte assai arduo, a chiunque non sia sufficientemente versato nella loro conoscenza, il determinare il genere a cui molte specie appartengono, se mancano in esse le parti del frutto, trovandosi dei generi, come *Jungermannia*, *Alicularia*, *Chyloscyphus*, *Sphagnoecetes*, *Liochlaena*, ecc. i cui distintivi non sono sussidiati da caratteri abbastanza prominenti delle parti della vegetazione, come avviene nella *Radula*, *Madotheca*, *Frullania*, *Lejeunia* ed affini.

Però io sono d'avviso, essere attualmente impossibile il fornire uno stato completo delle specie italiane di questa famiglia, e che l'unico partito in oggi ammissibile si è quello di limitarci a far conoscere, per quanto n'è dato, la morfologia di quelle sole, intorno alle quali non sono dubbiezze, e in questa persuasione, a misura che andrò completando il materiale delle mie collezioni, ne farò conoscere, come meglio per me si potrà, i generi e le specie. È a proposito di generi e di specie di Epatiche io debbo ricordare, che i primi tentativi di riforma di questa famiglia si debbono a un nostro italiano, al celebre Giuseppe Raddi, il quale fino dal 1817, nella sua Jungermanniografia etrusca e negli opuscoli scientifici di Bologna, disegnava i caratteri dei generi *Bellincinia*, *Calypogeja*, *Metzgeria*, *Roemeria*, *Pellia*, *Lunularia*, *Fegatella*, *Reboulia*, *Grimaldia*, *Corsinia*, la più parte dei quali furono adottati dal celeberrimo Nees d'Esenbeck, che divulgando una nuova edizione dell'opuscolo del Raddi, rimasto per poco sconosciuto anche agli italiani, dimostrò l'importanza di quei primi tentativi, da cui l'attuale impianto dell'edificio Epatologico ha avuto origine, e rese allo sventurato Botanico fiorentino, a cui il medesimo Nees tributa l'appellativo di *Padre dell'Epaticologia*, der Vater der Lebermooskunde, quel meritato guiderdone di onoranza, che non ebbe nel propio paese.

Genova, decembre 1857.

I.

ELENCO DELLE EPATICHE

DELLA PROVINCIA DI BERGAMO

DEL DOTTORE LORENZO ROTA.

Tribù I. JUNGERMANNIEE.

Sottotribù I. GYMNOMITRIEE.

1. Gymnomithium concinnatum Corda, Syn. hepatic. p. 3.

β. *procumbens*, Syn. hepatic. l. c.

Sulle rupi dei monti Pisgana, Tonale, Gavio, Pizzo del Diavolo, Azzarini. La varietà β. tra i muschi al passo di S. Marco.

2. Sarcoscyphus Ehrhartii Corda, Syn. hepatic. p. 7.

β. *rivularis* – *Jungermannia rivularis* Sw.

γ. *ericetorum*, Syn. hepatic.

Comune nei monti, sulle rupi e sulla terra tra i muschi. La var. lungo i rigagnoli del monte Ponteranica.

3. Sarcoscyphus Mulleri Nees, Syn. hepatic. p. 8.

Nei terreni argillosi dei colli di Bergamo e di Mapello.

4. Sarcoscyphus Funckii Nees, Syn. hepatic. l. c.

α. *major*, Syn. hepatic.

β. *minor*, Syn. hepatic.

Terreni argillosi e silicei nei colli e nei monti di val Brembana e di val Camonica (1).

Oss. Pubblicando il presente manoscritto del D. Rota, mi credo in debito di prevenire che io mi prenderò l'arbitrio di ommettere alcune delle specie che vi si trovano comprese, in quanto che non avendone veduti gli esemplari, e trattandosi di specie che fin qui non vennero da altri osservate in Italia, conservo su di esse qualche dubbio, e dove, in progresso di tempo, si constatasse ch'elleno non esistono nei confini della nostra Flora, ne verrebbe la necessità di correzioni, che stimo più conveniente iscansare di primo tratto. Prendo occasione da questo Elenco per soggiungere qua e là appiè di pagina alcuno osservazioni relative alla località di qualche specie o per rettificazioni di sinonimi. — De Notaris.

(1) Delle due specie 3 e 4, il *Sarcoscyphus Funckii* è il più comune, e per poco direi quasi il

5. Alicularia scalaris Corda, Syn. hepatic. p. 10.

Sulla terra umida nei monti.

6. Alicularia Rotaeana DNtrs. (1).

Sui monti Pisgana e Tonale.

Sottotribù II. JUNGERMANNIDEE.

7. Plagiochila interrupta Nees, Syn. hepatic. p. 48.

Luoghi selvatici ad Adrara, in valle Brembana e Camonica.

8. Plagiochila asplenioides Mont. et Nees, Syn. hepatic. p. 49.

α. *major*, Syn. hepatic.

β. *confertior*, Syn. hepatic.

γ. *surculosa* – *Plagiochila surculosa*, Hamp.

Nelle selve tra i muschi. La varietà β. ad Olmo e al monte Bronzone. La var. γ. nelle prealpi di val Brembana.

9. Scapania compacta Lindenb., Syn. hepatic. p. 63.

β. *mucronulata*, Syn. hepatic.

Sulle rupi a Bergamo, a Olmo, ad Edolo.

10. Scapania Bartlingii Nees, Syn. hepatic. p. 64.

Sulle rupi schisto-argillose sopra Branzi e al monte Pisgana (2).

11. Scapania undulata Mont. et Nees, Syn. hepatic. p. 65.

α. *resupinata* – *J. resupinata*, Lindenb.

β. *undulata* - *J. undulata*, L.

γ. *purpurea*, Nees.

Sulle rupi umide od irrigate, ed anche nei pascoli umidi delle prealpi, val Brembana, ecc.

---

solo, che abbondantemente s'incontra nella regione subalpina. Il *S. Mülleri* invece, più frequente ricorre al di qua dell'apennino, come nella Toscana e nel Genovesato, e n'ho esemplari in bello sviluppo e fruttificazione delle adiacenze di Genova e di Voltri. A torto io ho riportato l'*Jungermannia pulvinata* di Raddi come sinonimo del *S. Funckii* nelle *Primitiae hepaticologiae* al n.° 36.

(1) Vedi qui appresso *Nuove specie del genere Alicularia.*

(2) Rota fu il primo che raccogliesse questa specie in Italia. Gli esemplari del suo erbario concordano esattamente cogli omonimi di Hampe che io conservo nella mia collezione.

12. Scapania nemorosa Nees, Syn. hepatic. p. 68.

α. *communis*, Syn. hepatic.

β. *purpurascens*, Syn. hepatic.

Nelle selve ombrose dal piano al monte. La var. β. al monte Bronzone.

13. Scapania curta Nees, Syn. hepatic. p. 69.

Tra i muschi nel monte Tonale, nei monti Azzarini e presso Adrara (1).

14. Jungermannia albicans L., Syn. hepatic. p. 75.

α. *falcata* – *J. falcata* Radd.

β. *procumbens*, Hook.

γ. *infuscata*, Nees.

δ. *taxifolia*, Nees.

Nelle selve e sulle rupi tanto alla pianura che nei monti.

15. Jungermannia obtusifolia Hook., Syn. hepatic. l. c.

β. *purpurascens*, Nees.

Rupi e luoghi ombreggiati delle prealpi. La varietà β. sui monti Tonale, Pisgana, Azzarini, Ponteranica.

16. Jungermannia exsecta Schmid., Syn. hepatic. p. 77.

Nelle prealpi tra i muschi.

17. Jungermannia Schraderi, Mart., Syn. hepatic. p. 83.

β. *integra*, Syn. hepatic.

Nelle selve umide sulla terra e sui legni putrescenti. La var. β. nelle selve di Piazzatorre.

18. Jungermannia crenulata Sm., Syn. hepatic. p. 90.

β. *tenerrima* – *J. tenerrima* Radd.

Sulla terra argillosa, in margine delle strade e delle selve nelle pianure.

19. Jungermannia nana Nees, Syn. hepatic. p. 91.

Ai lati delle strade avvallate nei colli e nei monti.

---

(1) Ho raccolto la *Scapania curta* lungo la via del Sempione e presso Miasino al lago d'Orta.

20. Jungermannia hyalina Lyell., Syn. hepatic. p. 92.

β. *colorata*, Nees.

Sulla terra argillosa nei colli, a Pontida, Bergamo, Scanzo, Adrara.

21. Jungermannia sphaerocarpa Hook., Syn. hepatic. p. 93.

Sulla terra arenosa umida del colle di Bergamo, e lungo il Brembo sotto Piazzatorre.

22. Jungermannia tersa Nees, Syn. hepatic. p. 94.

Nei colli delle vicinanze di Bergamo.

23. Jungermannia obovata Nees, Syn. hepatic. p. 95.

Nei monti Azzarini e Ponteranica sulle rupi.

24. Jungermannia pumila Wituer., Syn. hepatic. p. 97.

Carenno, Bergamo, Adrara, Breno, Corteno, Olmo, sulla terra.

25. Jungermannia albescens Hook., Syn. hepatic. p. 102.

Tra i muschi e sulle rupi dei monti Tonale, Pisgana, Azzarini e Ponteranica (1).

26. Jungermannia Laurentiana DNtrs.

Dintorni di Carenno (2).

27. Jungermannia acuta Lindenb., Syn. hepatic. p. 103.

β. *aggregata*, Syn. hepatic.

Luoghi irrigui a Bergamo, Adrara, Lenna, Nese. — La varietà β. sul colle di Bergamo.

28. Jungermannia corcyraea Nees, Syn. hepatic. p. 103.

β. *turbinata* – *J. turbinata* Radd.

Tra i muschi ad Adrara, Lenna, sui monti Azzarini. La varietà β. al monte Bronzone (3).

---

(1) Distintissima specie di cui fin qui non s'era avuta notizia in Italia.

(2) Vedansi qui appresso la descrizione e la figura di questa specie.

(3) Specie molto frequente, principalmente nei colli della regione mediterranea

29. Jungermannia inflata Huds., Syn. hepatic. p. 105.

β. *laxa*, Syn. hepatic.

Sulla terra tra i muschi nei colli delle prealpi. La var. β. sui colli di Bergamo.

30. Jungermannia orcadensis Hook., Syn. hepatic. p. 107.

Ne' sfagneti dei monti Azzarini e Ponteranica.

31. Jungermannia alpestris Schleich., Syn. hepatic. p. 118.

Sui muschi in putrefazione nelle prealpi Camonie.

32. Jungermannia saxicola Schrad., Syn. hepatic. p. 118.

Tra i sassi del monte Tonale e del monte Gavio (1).

33. Jungermannia minuta Krantz, Syn. hepatic. p. 120.

β. *fasciculata*, Syn. hepatic.

γ. *minor*, Syn. hepatic.

δ. *procera*, Syn. hepatic.

ε. *protracta*, Syn. hepatic.

Val Camonica, val Brembana, al passo di S. Marco.

34. Jungermannia barbata, Syn. hepatic. p. 122.

α. *attenuata* – *J. attenuata* Lindenb.

β. *Floerckii*, Nees.

γ. *collaris*, Nees.

δ. *lycopodioides*, Nees.

ε. *Schreberi*, Syn. hepatic.

ζ. *quinquedentata*, Nees.

Ne' luoghi selvatici sulla terra, sulle pietre, sul ceppo degli alberi, tra i muschi al piano e nelle prealpi.

35. Jungermannia Starkii Funck., Syn. hepatic. p. 134.

α. *confervoides* – *J. confervoides* Radd.

β. *byssacea* – *J. byssacea* Lindenb.

Negli scopeti, nelle selve alla pianura, e nei monti sulla nuda terra.

---

(1) Altra interessantissima specie di cui si deve la scoperta al Dottor Rota!

36. Jungermannia bicuspidata L., Syn. hepatic. p. 138.

α. *bicalyculata* – *J. bicalyculata* Radd.

β. *conferta*, Lindenb.

Negli scopeti, nelle selve, sulla terra, in varie parti della provincia.

37. Jungermannia connivens Dicks., Syn. hepatic. p. 141.

Sui legni putridi e fra i muschi delle selve alpine.

38. Jungermannia trichophylla L., Syn. hepatic. p. 145.

Sui legni putridi, tra i muschi dal piano al monte.

39. Jungermannia julacea Light., Syn. hepatic. p. 146.

Sulla terra e sulle rupi, sui monti Pisgana, Gavio, Azzarini, Pizzo del Diavolo.

40. Sphagnoecetis communis Nees, Syn. hepatic. p. 148.

Pascoli uliginosi delle prealpi.

41. Liochlaena lanceolata Nees, Syn. hepatic. p. 150.

Nelle selve dei monti di val Brembana e val Camonica.

42. Lophocolea bidentata Nees, Syn. hepatic. p. 159.

Luoghi uliginosi, tra i muschi del colle di Bergamo, ad Adrara, Averara, ecc.

43. Lophocolea minor Nees, Syn. hepatic. p. 160.

β. *cuspidata*, Syn. hepatic.

γ. *tenerrima*, Syn. hepatic.

δ. *media*, Radd.

Sulla terra nuda ne' luoghi umidi. La var. β. sul colle di Bergamo; la var. γ. sui colli di Adrara; la var. δ. nei monti di val Brembana.

44. Lophocolea heterophylla Nees, Syn. hepatic. p. 164.

α. *communis*, Nees.

β. *cladocephala*, Nees.

γ. *erosa*, Nees.

Sui legni fracidi nelle selve dai colli alle prealpi, comune.

45. Chyloscyphus pallescens Nees, Syn. hepatic. p. 187.

Nei colli di Bergamo e nei monti di Foppolo, a Piazzatorre tra i muschi.

46. Chyloscyphus polyanthus Corda, Syn. hepatic. p. 188.

β. *rivularis*, Nees.

Negli stessi luoghi del precedente. La var. β. nei rivoli sopra Olmo.

Sottotribù III. GEOCALICEE.

47. Geocalyx graveolens Nees, Syn. hepatic. p. 195.

Nei colli delle prealpi sulla terra.

Sottotribù IV. TRICHOMANOIDEE.

48. Calypogeia Trichomanes Corda, Syn. hepatic. p. 198.

α. *communis*, Nees.

β. *fissa* – *Calypogeia fissa* Radd.

Sulle rupi, sulla terra tra i muschi in più luoghi della provincia.

49. Lepidozia reptans Nees, Syn. hepatic. p. 205.

β. *julacea*, Syn. hepatic.

Nelle selve sui legni fracidi dai colli alle prealpi. La var. β. nelle prealpi di val Camonica.

50. Mastigobryum trilobatum Nees, Syn. hepatic. p. 230.

α. *grande*, Syn. hepatic.

β. *minus*, Syn. hepatic.

Negli scopeti, nelle selve dei colli e dei monti.

51. Mastigobryum deflexum Nees, Syn. hepatic. p. 231.

α. *tricrenatum*, Syn. hepatic.

β. *implexum*, Syn. hepatic.

γ. *derexum*, Syn. hepatic.

Nelle prealpi e nei monti elevati tra i muschi e sulle rupi.

Sottotribù V. PTILIDIEE.

52. Trichocolea tomentella Nees, Syn. hepatic. p. 237.

Nelle selve opache delle valli prealpine, ed anche sul colle di Bergamo.

55. Ptilidium ciliare Nees, Syn. hepatic. p. 250.

Nelle selve del monte Pisgana e nell'ascesa al monte Gavio (1).

Sottotribù VI. PLATIFILLE.

54. Radula complanata Dum., Syn. hepatic. p. 257.

Sul tronco degli alberi, sulle rupi, tra i muschi dal piano al monte (2).

55. Madotheca laevigata Dum., Syn. hepatic. p. 276.

Sulle rupi ed appiè degli alberi dai colli al monte.

56. Madotheca rivularis Nees, Syn. hepatic. p. 278.

Alle rupi umide ed appiè degli alberi nelle alpi Camonie (3).

57. Madotheca platyphylla Dum., Syn. hepatic. p. 278.

α. *communis*, Nees.

β. *major*, Nees.

Sul tronco degli alberi, sui sassi, dal piano al monte.

58. Madotheca platyphylloidea Nees, Syn. hepatic. p. 280.

Sul tronco degli alberi e sulle rupi di val Imagna, Faleggio, e nei monti di Adrara.

---

(1) I celebri Autori della *Synopsis hepaticarum*, ommesso, probabilmente per una semplice svista, il sinonimo delle mie *Primitiae Hepaticologiae*, hanno creduto che questo tipo mancasse all' Italia *Italiae deesse videtur*. Già fin dal 1834 io ne avea trovato qualche esemplare nelle selve dei monti tra la valle Vegezzo e la valle Cannobbina al lago Maggiore, quindi da più parti ne ottenni esemplari: dal cantone Ticino dall'Avv. Franzoni, dai monti bergomensi da Rota, dalla valle di Chamounix dal Prof. Parlatore. Anche il Prof. Garovaglio ha questa specie nel suo elenco delle Epatiche lombarde.

(2) Nei mss. di Rota trovasi anche una *Radula aquilegia*. Gli esemplari avuti con questo nome, non rispondono esattamente alla *Radula aquilegia* (Syn. hepatic. p. 260), essendo in essi il colore delle foglie della medesima tinta crocata comune alle foglie della *R. complanata*. Però la *R. aquilegia* di Rota differisce per qualche carattere dalla *complanata*, e ne darò in altra occasione la descrizione e la figura.

(3) Nelle *Primitiae Hepaticologiae* al n.° 4 sotto il nome di *Jungerm. Cordaeana*, ho riunito due forme di *Madotheca*, una delle quali, dell'agro piceno, appartiene alla *M. rivularis*; l'altra, dell'agro romano, che ne differisce per le orecchiette oblungate, piane, avvicinate allo stelo, fu portata tra i sinonimi della *Madotheca porella* dai chiarissimi Autori della *Synopsis hepaticarum*. Confrontando questa *Madotheca* dell'agro romano colla *porella* dell'America settentrionale, di cui ho esemplari di Bischoff, Montagne, Mitten, Hampe, Lehmann, ed anche nella collezione dei *Musci Alleghanienses* di Sullivant al n.° 264. La pianta italiana risulta intieramente diversa dall'americana per il tessuto, forma della foglia, orecchiette ed amfigastrii. Non ho nel mio erbario esemplari europei di *Madotheca porella*, e posso affermare ch'essa fin qui non è stata veduta in Italia. Rimango tuttavia indeciso intorno ai caratteri di questa forma a fronte delle infinite modificazioni con cui si presenta la *Madotheca platyphylla*, che farò poi conoscere in apposito articolo.

Sottotribù VII. FUBULEE.

59. Lejeunia hamatifolia Dum., Syn. hepatic. p. 344.

Su rupi umide tra i muschi, a Carenna, Brumano, Aralatta, monte Resegone (1).

60. Lejeunia serpyllifolia Libert., Syn. hepatic. p. 374.

Dai colli alle prealpi tra i muschi e sulle rupi.

61. Lejeunia minutissima Dum., Syn. hepatic. p. 192.

Nelle selve di Piazzatorre.

62. Frullania dilatata Nees, Syn. hepatic. p. 415.

Sul tronco degli alberi e sulle rupi.

63. Frullania Tamarisci Nees, Syn. hepatic. p. 438.

Sulla terra tra i muschi, sulle rupi, sul tronco degli alberi.

Sottotribù VIII. CODONIEE.

64. Fossombronia pusilla Nees, Syn. hepatic. p. 467.

Luoghi ombrosi dei colli di valle S. Martino, Caleppio e Bergamo.

65. Fossombronia angulosa Radd., Syn. hepatic. p. 468.

Ripe presso Bergamo e Taglinno.

Sottotribù IX. APLOLENEE

66. Pellia epiphylla Nees, Syn. hepatic. p. 488.

α. *Fabroniana* – *Pellia Fabroniana* Radd.

β. *endiviaefolia* – *J. epiphylla endiviaefolia* Lindenb.

Ripe, terrapieni, rigagnoli, rupi umide dal piano al monte.

67. Pellia calycina Nees, Syn. hepatic. p. 490.

Rigagnoli di val Brembana sopra Piazzatorre e presso Cassiglio.

68. Blasia pusilla L., Syn. hepatic. p. 491.

β. *gemmipara*, Syn. hepatic.

Nei campi, ai lati delle vie avvallate del piano ai monti (2).

---

(1) Il Rota è il primo che abbia trovato questa specie in Italia.

(2) Strabocchevolmente copiosa e in bello sviluppo di fronde si trova la forma *Hookeri* di questa specie nell'alto novarese e sulla terra e sulle rupi bagnate da continuo stillicidio. Fin qui non s'è veduta nell'apennin ligure

Sottotribù X. ANEUREE.

69. Aneura pinguis Dum., Syn. hepatic. p. 493.

Sul margine dei fossi e rigagnoli, e sulle rupi umide.

70. Aneura pinnatifida Nees, Syn. hepatic. p. 495.

Tra i muschi lungo i rigagnoli montani.

71. Aneura multifida Dum., Syn. hepatic. p. 496.

Negli stessi luoghi della specie precedente.

72. Aneura palmata Nees, Syn. hepatic. p. 498.

Sui legni infraciditi nelle selve di Piazzatorre.

Sottotribù XI. METZGERIEE.

73. Metzgeria glabra Radd., Syn. hepatic. p. 502.

α. *extensa*, Syn. hepatic.
β. *communis*, Syn. hepatic.
γ. *major*, Syn. hepatic.
ε. *minor*, Syn. hepatic.

Ne' luoghi selvatici, sulla terra, sulle rupi, sul tronco degli alberi.

74. Metzgeria pubescens Raddi, Syn. hepatic. p. 504.

α. *elongata*, Syn. hepatic.
β. *communis*, Syn. hepatic.

Spesso frammista alla precedente, e nelle medesime località.

Tribù II. MARCHANZIEE.

Sottotribù I. LUNULARIEE.

75. Lunularia vulgaris Mich., Syn. hepatic. p. 511.

Vie ombrose, rive de' fossi a Bergamo e ne' contorni. Sterile.

Sottotribù II. JECORARIEE.

76. Marchantia polymorpha L., Syn. hepatic. p. 522.

Ne' luoghi paludosi, alle fonti, lungo i rigagnoli, stillicidii, sulla terra, rupi, pali.

77. Marchantia paleacea Bertol., Syn. hepatic. p. 533.

Rupi umide in val S. Martino e Caleppio.

78. Preissia commutata Nees, Syn. hepatic. p. 539.

β. *oligocarpa.*

γ. *minor*, Syn. hepatic.

Sulle rupi ai monti Resegone, Aralatta, Cavallo. La var. β. sulle rupi dolomitiche; la var. γ. nei monti sopra Olmo.

79. Sauteria alpina Nees, Syn. hepatic. p. 541.

Lungo la via da Olmo al passo S. Marco (1).

80. Fegatella conica Corda, Syn. hepatic. p. 546.

β. *subsessilis*, Syn. hepatic.

Dal piano alle prealpi in riva ai fossi e rigagnoli. La var. a Piazzatorre.

81. Reboulia hemisphaerica Radd., Syn. hepatic. p. 548.

β. *chlorocarpa*, Syn. hepatic.

Sui muri antichi esposti a settentrione e sulle rupi dal piano al monte.

82. Grimaldia barbifrons Bisch., Syn. hepatic. p. 550.

Sulle rupi e sulla terra lungo il Brembo e l'Adda.

83. Grimaldia dichotoma Radd., Syn. hepatic. p. 551.

Muri lungo l'Adda e presso Almenno.

84. Duvalia rupestris Nees, Syn. hepatic. p. 553.

Su pietre arenarie a Bergamo, sulle dolomiti nei monti.

85. Fimbriaria fragrans Nees, Syn. hepatic. p. 558.

Rupi del monte Resegone ed Aralatta (2).

86. Fimbriaria Bonjeannii DNtrs. – F. Lindenbergiana, Syn. hepatic. p. 562.

Nei monti Azzarini e Ponteranica.

Sottotribù III. TARGIONIEE.

87. Targionia hypophylla L., Syn. hepatic. p. 574 sub. T. Michelii.

Luoghi franati lungo il Brembo e l'Adda.

---

(1) Trovata per la prima volta in Italia alla sommità dello Splugen dal Prof. Garovaglio e dal Barone Cesati! Vedi Garov. Catal. III. p. 21. Ne ho avuto esemplari dal Barone Cesati.

(2) Non ho avuto esemplari di queste due *Fimbriarie;* nondimeno ne ammetto confidentemente l'esistenza nei monti del bergamasco, e perchè distinte per caratteri molto prominenti e perchè la *Fimbriaria Bonjeannii* fu trovata anche dal Garovaglio nei monti di Como. Più presto fa specie il vedere come nei monti di Bergamo non siavi la *F. pilosa (F. tenella, Primit. hepatic. ital. n.° 69)*, comune nei monti del lago Maggiore e di Como.

Tribù III. ANTOCEROTEE.

88. Anthoceros punctatus L., Syn. hepatic. p. 583.

Terreni argillosi a Bergamo, villa d'Adda, Adrara.

89. Anthoceros laevis L., Syn. hepatic. p. 586.

Lungo i fossi a Bergamo, Treviglio, Caravaggio.

Tribù IV. RICCIEE.

90. Sphaerocarpus terrestris Mich., Syn. hepatic. p. 595 sub. S. Michelii.

Ne' luoghi coltivati alla pianura, sulla terra.

91. Corsinia marchantioides Radd., Syn. hepatic. p. 596.

Rupi lungo Adda, presso Calusco.

92. Riccia glauca L., Syn. hepatic. p. 599.

α. *major*, Syn. hepatic.

β. *imbricata.*

γ. *Michelii* – *R. Michelii* Radd.

Sulla terra ne' campi dal piano al monte. La var. β. nella valle d'Astino; la var. γ. sul colle di Bergamo.

93. Riccia sorocarpa Bisch., Syn. hepatic. p. 600.

Presso Taglimo e Grumello sulla terra (1).

94. Riccia bifurca Hoffm., Syn. hepatic. l. c.

Lungo l'Adda su terreni qualche volta inondati.

95. Riccia minima L., Syn. hepatic. p. 601.

Sulla terra in val Caleppio e presso Taglimo.

96. Riccia ciliata Hoffm., Syn. hepatic. p. 602.

Campi e scopeti della pianura.

97. Riccia palmata Lindenb., Syn. hepatic. p. 603.

Sulla terra tra Boltiere e Brembate inferiore, e presso Bergamo.

98. Riccia Bischoffii Hueben., Syn. hepatic. l. c.

Scopeti presso Ponte S. Pietro, Bonate e Terno (2).

99. Riccia fluitans L., Syn. hepatic. p. 610.

Acqua stagnante, terra inondata, ne' fossi, nelle risaie.

---

(1) (2) *Riccia sorocarpa* e *R. Bischoffii* furono recentemente trovate in gran copia nei dintorni di Vercelli dal Barone V. Cesati Vedi Rabenhorf, *Hepat europ. num. 23, 24*

II.

SULL'

ANTROCEPHALUS ITALICUS

DI SASSI

Nella sesta adunanza della sezione di Botanica del primo Congresso degli Scienziati italiani (1), il Professore Agostino Sassi presentava la descrizione di un'Epatica della divisione delle Marchanziacee, da lui trovata nella pianura di Albenga e presso Finale, ed appartenente, a parer suo, all'*Antrocephalus nepalensis* del celebre Lehmann. Esponeva il prelodato Professore, qualmente rimanendo incerta la provenienza degli esemplari descritti dal Lehmann, trovati in un erbario che appartenne al Professore Colsmann, si era permesso, ad indicare una località sulla quale non poteva cadere alcun dubbio, di divisare del nome di *italicus* il nuovo *Antrocephalus* di Lehmann, e come avendo riscontrato qualche differenza al confronto degli esemplari ligustici coi caratteri presentati da Lehmann, ne avesse stesa una descrizione, che essendo stata prodotta nel verbale di quell'adunanza, in appoggio delle osservazioni che io ho a soggiungere, qui mi piace di riferire per intiero.

Antrocephalus

Sassi, Atti 1.ª riunione degli Scienziati, p. 159. 160.

Capitula sporangifera pedunculata in medietate superiore frondis. Calyptra ad basim capituli pilis simplicibus liberis. Sporangium apice styligerum, e duabus membranis constans, basi tantum connatis, medio longitudinaliter rumpens, valvis aequalibus. Sporulae in membrana interna numerosae, elateribus praeditae, initio ad parietes affixae. Capitula mascula in medietate superioris faciei frondis nascentia, sessilia, ovato-globosa, superficie papillari praedita: calyptra e pilis liberis. Antherae

(1) Atti della prima riunione degli Scienziati italiani. Pisa 1840, p. 158-160.

clavatae in textu celluloso capituli immersae, ad singulam papillam respondentes.

Antrocephalus italicus. Planta gregarie super terram nascens, Marchantiam simulans. Frons membranacea viridis, subdichotoma, laciniis subimbricatis, extremitate rotundatis, saepe emarginatis, nervo mediano et marginali nullo, subtus, ad latera, squamellis purpureis imbricatis ut in Targionia hypophylla. Radices tenues numerosissimae, e medietate paginae inferioris frondis erumpentes. Calyptra pilis pluribus inter se liberis constans, primum totum capitulum tegens, demum apicem pedunculi circulariter cingens. Pedunculi modo brevissimi, modo quatuor ad quinque lineas longi, albidi, primum erecti, maturitate incurvi, apice sporangia ovata, modo solitaria, modo duo vel tria vel quatuor sustinentes, apice stylo mucronato instructa. Sporangium e membranis duabus efformatum, quarum exterior oblonga, alba, longitudinaliter medio dehiscens; interior fusca, cum externa basi connata, caeterum libera, longitudinaliter pari modo dehiscens in laminas irregulariter dentatas, intus sporis elaterio donatis foeta.

Capitula masculina sessilia, tuberculata, calyptrata.

Locus natalis: in planitie albinganensi et prope Finale in Liguria occidentali. Floret octobri et novembri.

Questa interessantissima Epatica, di cui io m'ebbi lunghissimo desiderio, rimarrebbe probabilmente tuttavia ignorata o sospetta, se il diligentissimo Dottore Baglietto, Assistente all'Orto botanico della Regia Università di Genova, non avesse avuto la ventura di trovarne in gran copia, sul cadere dello scorso anno, in una gola dei monti delle vicinanze di Voltri, ond'io ho potuto esaminarne i caratteri, e in parte altresì, come meglio per me si è potuto, seguirne a passo a passo lo sviluppo.

L'*Antrocephalus italicus*, ripeto, sarebbe rimasto ignorato o sospetto, in quanto che le frasi, con cui il Prof. Sassi ne coloriva la descrizione, appena rispondono ai caratteri del genere *Plagiochasma*, a cui l'*Antrocephalus* di Lehmann dai chiarissimi Autori della *Synopsis hepaticarum* fu incorporato. E pur oggi, non avendo potuto procacciarmi esemplari della pianta della pianura di Albenga e di Finale, al confronto della precedente descrizione cogli esemplari del *Plagiochasma* di Voltri, mi rimarrebbero grandissimi dubbii intorno alla assoluta loro identità, se graziosamente, a dissipare questi dubbii, non fosse intervenuta la

stimabilissima signora Giuseppina Sassi, la quale ebbe la gentilezza di cedermi alcuni disegni, che il compianto di lei Consorte avea fatto trarre del suo *Antrocephalus italicus*, nel proponimento, com'è probabile, di darne più estesa e più corretta notizia.

Da codesti disegni con ogni evidenza apparisce che l'Epatica di Finale ed Albenga appartiene al genere *Plagiochasma* (Syn. hepatic. p. 511), che la sua capsula o sporangio non è punto stiligero, nè costituito di due membrane; risultano la posizione orizzontale degli involucri, la esistenza di paglietle alla base e sommità dei peduncoli, la forma discoideo-pulvinata dei dischi anteridiferi, come esattamente si riscontra nel *Plagiochasma* di Voltri. Le squame, di cui la pagina inferiore delle frondi è rivestita, nella pianta del Prof. Sassi, secondo le figure in discorso, risulterebbero nel loro margine libero perfettamente intatte, di dimensioni alquanto maggiori risulterebbero le paglietle che circondano i dischi anteridiferi, generalmente allungati i peduncoli che reggono i ricettacoli; mà la lunghezza dei peduncoli è varia anche nella pianta di Albenga (*modo brevissimi, modo ad quatuor, quinque lineas longi*), e la mancanza di dentature nelle squame ventrali della fronda, di certo va attribuita a una svista dell'artista da cui quelle figure furono disegnate.

Ho citato espressamente i dischi anteridiferi rappresentati nelle tavole di cui sono in possesso per poter soggiungere, che su questo carattere io mi appoggio per affermare che il *Plagiochasma* di Liguria risulta molto diverso dalla specie di Lehmann (1), in cui i dischi anteridiferi sono di figura semilunare, e collocati all'ascella di una ripiegatura parimente semilunare della fronda: quindi, ritenuto l'appellativo dalla patria italiana, ed escluso il sinonimo di *Antrocephalus nepalensis*, l'*Antrocephalus italicus* del Prof. Sassi prenderà posto nel genere *Plagiochasma* sotto il nome di *Plagiochasma italicum*.

Riscontrando infine le diverse specie di *Plagiochasma* nella *Synopsis hepaticarum* trovansi il *Plagiochasma Aitonia* ed il *Plagiochasma Roussellianum*, che, appartenendo essi pure alla Flora delle regioni mediterranee, vengono, dirci quasi, a contatto della specie ligustica, e meritano di essere ricordate in quest'occasione. Il *Plagiochasma Aitonia* (2) ha,

(1) *Antrocephalus nepalensis* Lehmann in Act. Acad. Natur. Curiosor. 18. 2. 682 cum icone, et Pugill. VII. p. 2. 3. = *Synops. hepaticarum* p. 518 sub *Plagiochasma Colsmannianum*.

(2) Syn. hepatic. p. 520. — *Reboulia maderensis* Raddi, Osservaz. e Suppl. Crittog. brasil. nelle Memor. della Società italiana delle Scienze di Modena. XX. 1827. p. 3. tab. 6.

alla pagina ventrale della fronda, delle squame ovate, subulate, intiere e sporgenti dal contorno della fronda medesima ed elaterii bispiri, e il *Plagiochasma Rousselianum* di Montagne (1) ha i peduncoli nudi alla base (*pédicule nu à la base*), e squame ventrali parimente intatte, per cui e l'uno e l'altro sono evidentemente diversi dal *Plagiochasma ligustico*, di cui fo seguire i caratteri e la descrizione e le figure che io da esemplari viventi ne ho tratte.

Plagiochasma italicum.

P. frondibus gregariis repentibus, alterne subdichotomis, segmentis lato lineari-cuneatis, apice obtusis, emarginatisve, dorso subplanis, siccitate involutis, ventre inferne dense radiculigeris, caeterum bifarie squamatis, squamis adpressis, imbricantibus, falciformibus, grosse dentatis, violaceis; capitulis femineis e medietate frondis solitariis vel seriatis, pedunculo basi apiceque paleacco, subsessilibus pedunculatisve, 1-2-3-carpis; involucris dorso invicem connascentibus horizontalibus, rima verticali bilabiato-dehiscentibus, labiis membranaceis introflexis, conniventibus, demum hiantibus; epigonio styligero; capsula subrotunda; sporis tuberculatis; elateribus trispiris.

Antrocephalus italicus Sassi l. c. excl. Syn. *Antrocephalus nepalensis* Lehm.

Nella pianura di Albenga e presso Finale, dall'ottobre al novembre, Sassi. Nei monti di Voltri nell'autunno 1855, Baglietto.

Cresce a torme, in rosoni o strati anche della larghezza di una mano, modellati nella loro superficie dal terreno a cui tenacemente aderisce. Disordinato è il modo onde le frondi veggonsi aggruppate; quali ravvicinate secondo la loro lunghezza e sul lembo de' strati medesimi spianati a foggia di ventaglio; quali senz'ordine apprezzabile ammucchiate e generalmente in guisa che la parte di esse frondi più vetusta, a poco a poco rimane scavalcata dalle innovazioni, mediante le quali le frondi si vanno indefinitamente perpetuando.

Il loro colore nella pagina superiore è di un verde glaucescente,

(1) Montagn. *Cryptog. algeriens.* Annal. Scienc. naturell. Sér. 2. Tom. X. p. 334. 335, tab. 9 l a-g. Syn. hepatic. p. 513.

inferiormente ed in ispecie sui lati della pagina inferiore fosco-purpureo, per cui di una lieve orlatura della medesima tinta si veggono cinte.

La forma più comune di queste frondi e direi pure la forma loro normale è lineare cuneata, ottuse molto e come troncate all'apice, quindi evidentemente smarginate o divise in due lobi, nei quali ha principio il loro sdoppiamento, onde le innovazioni si succedono per ripetute biforcazioni, che per altro non sempre riescono complete e perfettamente conformi, avvegnachè lo sviluppo dei nuovi segmenti va spesso di passo ineguale, e l'uno a preferenza dell'altro si estende. Ne' medesimi gruppi del resto, e particolarmente nella parte loro centrale, si veggono segmenti di frondi di forme assai svariate, obovate, cuoriformi a rovescio, disciformi, irregolari e con varie direzioni, e contorti, dei quali alcuni apparentemente isolati, che sbucciano dalle fenditure delle frondi più superficiali, dipendenti da frondi tramontate, ricoperte da recenti innovazioni, e su queste alla lor volta si adagiano, e così via via.

Le frondi distrigate dal viluppo in cui trovansi raccolte, dove non abbiano incontrato ostacoli al loro regolare accrescimento, raggiungono la lunghezza di uno a due centimetri, su tre o quattro millimetri di larghezza. Vegete sono carnose nella parte mediana, d'onde insensibilmente decrescono verso il loro contorno, che si presenta sottile e quasi membranaceo, leggermente sinuoso e come rosicchiato, e talvolta qualche poco ascendente. La pagina loro superiore è piana, o più spesso debolmente scanalata e talvolta ondeggiata, e non presenta traccia di nervatura e di stomi, nè di areole di nessuna sorta; la pagina inferiore è turgescente nella parte mediana, ed ivi quasi intieramente ricoperta di una criniera di apparenza stopposa, composta di numerosissime fibrille, scolorite, semplici, flessuose, per mezzo delle quali le frondi si abbarbicano al suolo. Ai lati di questa linea mediana, la pagina stessa è provveduta di squame di color violaceo, che, strettamente embriciate, si succedono a brevi intervalli a foggia di foglioline distiche ed alterne, di larghezza di poco maggiore dei lati della fronda da cui traggono origine. Codeste squame verso la sommità delle frondi decrescono gradatamente di dimensioni: dapprima semilunari e variamente dentato-frangiate nel loro contorno superiore, quindi via via più piccole, finchè le ultime che nascono immediatamente al disotto dell'apice della fronda, e lo sorpassano, retroflettendosi sulla sua pagina superiore, riduconsi a piccole pagliette di figura triangolare allungata.

L'epidermide della pagina superiore della fronda aderisce tenacemente al sottoposto tessuto ed è composta di uno strato di cellule ovali, strettamente saldate pei loro lati, incolore, alquanto convesse nella parete loro superiore, e non ha stomi. La pagina inferiore o ventrale è pur essa vestita di un'epidermide, la quale sovratutto riesce molto evidente nel tratto che corre dall'estremo lato delle squame ventrali al margine della fronda, poichè ivi si presenta di colore nericcio ed obliquamente striata. Le cellule di cui risulta sono anguste, allungate nella direzione delle lievi solcature di cui è segnata, condotte a un dipresso come le sottili venature delle foglie penninervie di alcune monocotiledoni; il loro colore è violaceo, la consistenza come crostacea, per cui la membrana che ne risulta è poco estensibile e facilmente si sfalda, se si tenta di toglierla dal tessuto a cui lassamente aderisce. L'accartocciarsi dei lati delle frondi verso la pagina loro superiore, dove manchi l'umidità, necessaria alla turgescenza dell'interno tessuto, dipende appunto dalle accennate condizioni di struttura dell'epidermide della pagina ventrale.

Nelle squame ventrali poc'anzi descritte si ripetono a press'a poco i caratteri dell'epidermide da cui prendono nascimento, se non che le cellule di cui sono composte riescono più brevi e più variate nella loro figura, di minore robustezza di pareti e nella parte superiore delle squame medesime, per lo più, totalmente scolorite.

Il tessuto, compreso fra le due epidermidi, presenta, a contatto dell'epidermide dorsale, uno straterello di cellette di figura ovale allungata, contenenti granellini di clorofilla, perpendicolari nella parte mediana della fronda, oblique verso i suoi lati, e tra esse delle lacune o concamerazioni di varia figura. A questa zona, da cui dipende il colore della pagina superiore della fronda, e che potrebbe essere paragonata allo strato gonimo del tallo dei Licheni, sottentra immediatamente una zona di tessuto composto di cellule poliedriche, nelle quali non è traccia di clorofilla. Il suo spessore nella parte media della fronda è sensibilmente maggiore dello strato superiore; ma verso i lati grado grado declina e si elide, al punto che la fronda nell'estremo suo contorno, per poco è ridotta alle due epidermidi mutuamente combaciate, d'onde la consistenza submembranacea de' suoi lembi e il loro facile increspamento. Finalmente al limite inferiore di questa zona, nella parte mediana, si trova uno strato, quasi una benda di cellule allungate nella direzione del maggiore diametro della fronda, che ne rappresenta, in abbozzo, la nervatura.

Le radichette che, a foggia di folta criniera, sbucciano tra le squame della pagina ventrale della fronda, presentano il carattere di tubetti esilissimi, semplici, continui, di ineguale grossezza, più o meno tortuosi. La loro parete è diafana, interiormente gremita di piccole prominenze di apparenza resinoide, che in contatto di qualche atomi di soluzione d'iodio diluito, assumono colore bruniccio.

Sulle frondi non vedesi apparato gemmiparo di nessuna sorta.

Da codeste frondi, e via via dalle innovazioni per cui mezzo si vanno allungando, sbucciano nella direzione precisa del loro asse gli organi della riproduzione, colla legge però, per quanto a me è sembrato di vedere, che mai si trovano riuniti, sur uno stesso segmento di fronda, fiori femminei e fiori maschili, i quali, in confronto dei primi, risultano generalmente assai rari.

La evoluzione di un fiore femmineo è annunciata dallo sbucciare di un fiocchetto di pagliette, e spesso se ne veggono due o più sulla stessa linea, l'uno dall'altro per breve intervallo separati o contigui, e quasi confluenti, rare volte paralleli nella direzione del diametro trasversale della fronda. Generalmente però, negli esemplari almeno di cui ho potuto seguire lo sviluppo, non più di un fiore procede a maturanza nei singoli segmenti della fronda, durante uno stesso periodo di vegetazione; ma punto non dubito, che dove questa specie fosse perennemente mantenuta nelle condizioni opportune per il suo sviluppo, si vedrebbe indefinitamente prolifera, poichè in uno stesso gruppo di frondi veggonsene alcune con frutti perfettamente maturi, altre con fiori tuttavia allo stato rudimentario.

Le pagliette de'fiocchetti poco pria accennati, si possono distinguere in due serie: le une periferiche assai minute, di figura lanceolata, purpurascenti, e sono quelle che cingono più tardi la base del peduncolo: le altre allungate, lineari-subulate, porporine nella parte inferiore, superiormente scolorite, spesso flessuose ed arricciate, e di apparenza quasi stopposa, e sono quelle che a modo di collaretto circondano più tardi i ricettacoli od antidii femminei, raggianti dalla sommità del peduncolo.

Ricoperto da queste pagliette si osserva, sessile e lievemente infossato nella fronda, un bottoncino sferoideo di tessitura cellulosa, in cui consiste il primo rudimento dell'antidio femmineo. Il quale come tosto ingrossando riesce a schiudere le pagliette da cui è ricinto e mostra il suo vertice a nudo, sparato nella direzione dell'asse già presenta le due

concamerazioni in cui più comunemente è diviso, e in esse i pistillidii rivestiti del loro epigonio.

L'antidio avvicinandosi alla maturanza è di forma trasversalmente allungata, quasi tra l'emisferico e reniforme, perocchè i più risultano di due fiori, l'uno all'altro per il loro dorso saldati: ottuso nelle sue estremità o poli, segnati di un solco longitudinale, ottuso o lievemente ombelicato nel vertice, convesso più o meno nei lati, liscio, di colore debolmente verdognolo. I suoi poli si presentano talvolta diametralmente opposti, tal altra, per la maggiore turgescenza di una delle facce dell'antidio, più o meno obliquati e convergenti verso il lato più breve. La comune larghezza degli antidii, secondo il loro maggiore diametro, è di due o di tre millimetri.

Rarissimi sono gli antidii composti di tre fiori e di figura ottusamente e irregolarmente trigono-emisferica: più frequenti d'assai gli antidii monocarpi, o sia che primitivamente non includano che un solo pistillidio, o che uno di questi non abbia potuto allegare; ragion per cui la forma degli antidii in uno stesso tappeto di frondi fruttifere, ne' limiti delle forme indicate, con infinite ma poco rilevanti modificazioni si presenta. Gli antidii comunque costituiti di uno, di due o tre fiori, sono ombelicati alla base, od al punto in cui si trovano aderenti al peduncolo.

Il peduncolo cilindraceo, liscio, scolorito, composto di cellule allungate, si presenta per lo più brevissimo, per cui gli antidii appariscono quasi sessili sulla fronda, o più raramente di lunghezza uguale all'altezza dell'antidio o di poco maggiore. Le pagliette, che a guisa d'involucro cingono l'antidio, per qualche tempo si tengono strette a' suoi lati; ma infine per lo più si spianano orizzontalmente o si abbassano rovesciandosi sul peduncolo, dalla cui sommità, come già si è detto, prendono nascimento.

Un antidio monocarpo consta di un involucro posto verticalmente alla sommità del peduncolo, ed aperto sur uno dei lati per mezzo di una fenditura longitudinale, onde, fino a un certo punto, si potrebbe paragonare, nel suo modo di essere, ad un follicolo. Carnoso e di notevole spessore nella sua parte dorsale, si assottiglia gradatamente verso l'estremo margine de' suoi labbri, i quali si presentano mutuamente combaciati per l'esterna superficie de' loro lembi introflessi nella cavità in cui è contenuto il pistillidio. Semplice molto è la struttura dell'involucro. La sua parete è costituita di uno strato di cellule esagone, tenacemente saldate tra di loro e scolorite, rinforzata alla parte dorsale di una zona di tessuto

composto di otricelli poliedrici che si estende digradando fin presso l'estremo de' suoi labbri. Però la cavità interna dell'involucro, dal cui fondo sorge in direzione orizzontale il pistillidio, è in origine molto minore del volume dell'involucro medesimo. Se ora si supponga che due o tre involucri riescano a saldarsi intimamente nella loro parte dorsale, si avrà un'immagine abbastanza fedele di un antidio composto di due o tre fiori, le ragioni delle differenze di forme che negli antidii si riscontrano, delle depressioni onde spesso si veggono segnati nel vertice, dell'essere infine gli antidii medesimi di maggiore spessore nella parte loro centrale, ove, per così dire, si trovano sommate le zone di tessuto cellulare, onde il fondo di ogni involucro è provveduto.

Ogni involucro, negli antidii da me sezionati, è monogino. Il pistillidio è nudo e sorge dalla parte inferiore del fondo della cavità dell'involucro in direzione orizzontale o leggermente ascendente, onde il suo vertice corrisponde alla commessura delle valvole, di cui bene spesso raggiunge i lembi introflessi.

L'epigonio è di forma obovoidea, sormontato di uno stilo filiforme, leggermente dilatato all'apice, tessuto di otricelli poliedrici, scolorito, diafano, onde attraverso le sue pareti traspare lo sporangio fino dai primi momenti del suo sviluppo.

Sferica è la forma dello sporangio, sostenuto da un peduncoletto brevissimo con base bulbiforme. Giunto a maturanza, la sua parete membranosa, floscia, formata di un unico strato di cellule poliedriche, si apre nel vertice presentando un orificio dilatato, irregolarmente lacero nel suo contorno. Al momento della deiscenza dello sporangio non è più visibile l'epigonio. Infinito è il numero delle spore e degli elaterii contenuti in ciascun sporangio. Quelle, prima della perfetta loro maturanza, sono lisce nella superficie e contengono un nucleo granelloso, infine si fanno opache, di color fosco, sferoidali, e il loro episporio risulta scabro, di prominenze conoidee ed ottuse; gli elaterii contengono tre libre condotte spiralmente sulla loro interna parete.

Al momento in cui ha luogo la disseminazione delle spore, gl'involucri cambiano totalmente di aspetto. Il loro tessuto inaridisce, per cui assumono consistenza cartacea e si fanno di una tinta di colore di cannella slavato. Avvallandosi il tessuto cellulare che ne occupa il fondo, si schiudono con larga bocca, mettendo allo scoperto l'interna loro parete e i rimasugli dello sporangio, se tuttavia sussiste. Negli antidii

monocarpi l'involucro schiudendosi assume generalmente una posizione verticale: nei dicarpi la parte centrale dell'antidio si raggrinza, onde gl' involueri si schiudono, rimanendo tuttavia saldati nella loro parte dorsale.

Gli antidii maschili, meno frequenti dei femminei, nascono pur essi lungo la linea mediana della pagina superiore delle frondi. Sono perfettamente sessili, di figura emisferica depressa, muniti nel disco di piccole eminenze mammellari, ad ognuna delle quali risponde il collo di uno degli anteridii immersi nella sostanza de' medesimi antidii. Nel loro perimetro sono circondati di pagliette della stessa natura di quelle che si veggono alla base degli antidii femminei, ma di esse alquanto più brevi. Gli anteridii nella parte loro inferiore, in cui contiensi un nucleo di apparenza perlacea, hanno forma ovoideo-allungata; superiormente finiscono in un collo angusto; la parete loro è membranosa, assai tenue, tessuta di un unico strato di cellule.

Spiegazione delle figure.

1. Parte di un rosone ingrandito circa due volte più del vero.

2. Sommità di un segmento di fronda dalla parte ventrale cinque volte più grande che in natura.

3. Segmento di fronda tagliata verticalmente a 50 diametri.

4-5. Sezioni verticali di fronda condotte secondo il diametro trasversale di due diversi antidii nei primi passi del loro sviluppo a 5 diametri.

6. Lembo di epidermide della pagina superiore della fronda a 50 diametri.

7. Frammento di epidermide della pagina inferiore della fronda verso il margine della medesima a 50 diametri.

8-9. Parte di base e di una fimbria di una squama ventrale a 50 diametri.

10-11-12-13. Antidii femminei diversi cinque volte più grandi che in natura.

14-15. Antidii spaccati secondo il loro maggiore diametro allo stesso ingrandimento dei precedenti.

16. Sporangio chiuso nel suo epigonio a cinque diametri.

17. Epigonio da cui fu tolto lo sporangio ingrandito come sopra.

18. Sporangio nudo a cinque diametri.

19. Sommità dell'epigonio a 50 diametri.

20-21-22-23. Sezioni a diversi piani di uno stesso antidio dicarpo a 5 diametri.

24. Antidio monocarpo tagliato orizzontalmente a cinque diametri.

25. Antidio dicarpo in cui ad uno degli involueri manca una valvola a cinque diametri.

26. Antidio tricarpo ingrandito come sopra.

27. Segmento di sezione di un involucro 20 volte più grande del vero.

28-29. Spora ed elaterio a 100 diametri.

30. Porzione di elaterio a 400 diametri.

31. Sezione di un disco anteridifero a cinque diametri.

32. Segmento di un disco anteridifero con anteridio a 50 diametri.

33. Antidio monocarpo aperto a cinque diametri.

III.

NUOVE SPECIE DEL GENERE *ALICULARIA*.

Entrando a descrivere alcune nuove forme del genere *Alicularia*, avrei desiderato di poter produrre anche un'analisi dell'*Alicularia scalaris*, che è il tipo di questo genere distintissimo delle *Jungermanniee*, e per avventura la più comune delle sue specie. L'*Alicularia scalaris* sta nel Catalogo delle *Epatiche lombarde* dal chiarissimo Garovaglio inserito nelle Notizie naturali e civili sulla Lombardia (1), e nella enumerazione delle *Epatiche bergamasche* di Rota; ma fin qui a me non è stato concesso di trovare nelle mie escursioni o di procacciarmi altronde buoni e completi esemplari italici di questa specie. L'*Alicularia scalaris* mi sarebbe tuttavia mal nota, se non ne avessi al n.° 38 della collezione delle *Epatiche germaniche* di Huebener e Genth (2) un sufficiente esemplare con frutti.

Al momento in cui io pubblicava le primizie di Epaticologia italica, solo un esemplare dell'*Jungermannia scalaris stillicidiorum* di Raddi,

(1) Notizie naturali e civili su la Lombardia. Milano, 1844. p. 332.

(2) Hübener und Genth, Deutschlands Lebermoose in Getrockneten Exemplaren. II. Lieferung, 1836

esemplare autentico venutomi dall'erbario del benemerito Orsini, io possedeva a rappresentare nella mia collezione di *Epatiche italiane* la specie in discorso. Quest'*Jungermannia scalaris stillicidiorum* che in allora, per non manomettere il prezioso esemplare del celeberrimo Raddi, mi accontentai di esaminare superficialmente, squadrata non ha guari con maggior diligenza, mi ha presentato distintivi totalmente diversi da quelli che caratterizzano il genere *Alicularia*, e a mio avviso deve rimanere nel genere *Jungermannia* sotto nome di *J. stillicidiorum*.

Mancano altresì a tutt'oggi nel mio erbario esemplari italici di *Alicularia compressa*, che pur vedesi riferita nei cataloghi poc'anzi accennati di Garovaglio e di Rota.

Tra le specie di cui qui presento la descrizione, assai rimarchevole è l'*Alicularia geoscyphus*, che per la genesi dell'involucro e del perianzio, i quali procedono da un'espansione della sommità dello stelo, che a modo di talamio o periginio emisferico racchiude i pistillidii e si dirige perpendicolarmente a toccare il terreno, a cui si abbarbica per mezzo di numerose radichette e riesce ipogeno, o ventrale, o tagenziale, se vuolsi, alla sommità del caule, verrebbe a collocarsi vicino alle *Geocalicee*, che comprendono i generi *Acrobolbus*, *Saccogyna*, *Geocalyx*, *Gongylanthus*. Si direbbe questa specie un tipo più complesso nell'insieme del suo apparato di fruttificazione, un anello intermedio tra la divisione delle *Jungermanniee* e le *Geocalicee;* nè avrei bilanciato a stralciarlo in un genere separato, se nell'altra specie di *Alicularia* che distinguo col nome di *Rotaeana*, in cui pure il fondo del perianzio protubera talvolta verso la parte ventrale della sommità dello stelo, non si avesse una transizione tra l'*Alicularia scalaris* e l'*A. Geoscyphus*.

1. Alicularia Rotaeana n. sp.

Sui monti Pisgana e Tonale nella provincia di Bergamo. Rota.

Dense caespitosa, in sicco e ferrugineo-rufescens. Caulis prostratus, inferne foliis marcescentibus vestitus, humique demersus, ventre radiculosus, sub apice plerumque definito, vel e latere ramo unico, geminisve innovans. Rami plerique adscendentes, fastigiato-pulvinati, fructiferi vel varius antheridiferi. Folia succuba pro more imbricata, fere verticalia, erecto-patula et simul adscendentia, e basi semiamplectente orbicularia, integra, concaviuscula, in surculis fructiferis sensim usque

ad involucrum ampliata, in sicco adpressa, accumbentia. Amphigastria perexigua, subulata, persaepe obsoleta. Folia involucralia, caulinis praecuntibus, saepe apice subreflexis, grandiora, apice rotundato sinu angusto breviter, irregulariterve excisa, erecta, concava, subundulataque, perianthium conspicue excedentia et cum eo tota inferiori parte concreta. Perianthium e caulis apice carnosulo, tumescente, saccato, subinde deorsum nonnihil protuberante vel descendente oriundum, tubulosum, subcampaniforme, ore libero trilobum, lobis late ovato-triangularibus, obtusis, subemarginatisve, quorum ventralis (amphigastricus) minor. Calyptra perianthii fundo concreta, vertice irregulariter rumpens, inferne pistillidiis compluribus obsessa. Capsula grandis, elliptico-sphaeroidea, quadrivalvis, pedunculo capsula ipsa vix triplo longiore instructa. Sporae rotundae, laeves, badio-fuscae. Elateres bispiri, vaginati, grandes. Surculi, ramive antheridiferi fertilibus commixti. Antheridia in axilla foliorum eorundem sphaeroidea, longiuscule pedicellata.

Folia humecta pallescentia, membranacea, grandi-areolata. Cellulae leptodermaticae, rotundatae, granula oblonga foventes, areolis parvis trigonis, quadrigonisve pallescentibus distinctae. Capsulae membrana exterior, cellulis plerisque quadrilateris ad suturas nodulis fuscis, oblongatis, notatis, composita. Membranae vel parietis interioris cellulae, elongatae, parallelogrammae vel triangulares, variae, trabeculis transversis, fuscis, arcuatis, continuis, interruptis, anastomosantibusque, instructae.

Essendomi rivolto al Conservatore dell'erbario Rota, splendidamente acquistato dall'illustre Municipio della città di Bergamo, per ottenere un esemplare dell'Epatica che il Rota ha portato nella sua enumerazione manoscritta delle Epatiche della provincia di Bergamo col nome di *Sarcoscyphus sphacelatus*, n'ebbi questa specie di *Alicularia* che io credo bastantemente distinta dalla *scalaris*, così per il perianzio trilobo, che per la tessitura delle foglie, le quali nell'*A. scalaris*, presentano le loro cellule distinte da interstizii sensibilmente maggiori, attenuati agli angoli e come cinti di un orlo apparentissimo, risultante dalla parete delle cellule, onde gli interstizii medesimi sono costituiti.

Indicazione delle figure.

1. Sommità di caule fruttifero con capsula dopo la dispersione delle spore, dal lato dorsale del caule.

2. Sommità di caule fruttifero veduto lateralmente.

3. Sezione longitudinale del perianzio secondo l'asse del caule, e callitra od epigonio in esso incluso.

4. Involucro spogliato delle foglie superiori del caule, veduto lateralmente.

5-6. Involucro e perianzio di due diversi esemplari spianati.

7-8. Foglie propriamente dette con amfigastrii, all'ingrandimento, come le precedenti, di cinque volte il diametro.

9. Anteridio a 20 diametri.

10-11. Spore ed elaterio a 400 diametri.

12. Porzione della parete interna della capsula, e

13. Porzione della parete esterna della stessa a 400 diametri.

14. Segmento di foglia parimente a 400 diametri.

2. Alicularia geoscyphus n. sp.

Su rupi umide lungo la via del Sempione tra l'ospizio e il villaggio, sul finire di settembre.

In strata effusa dense aggregata, in sicco ferrugineo-fuscescens. Caulis crassiusculus, subcarnosus, ventre radiculis densis, tenuibus, per totam ferme longitudinem vestitus, arcte repens, quinque, septem millimetra in visis speciminibus aequans, a latere innovando parce demum divisus, apice definitus, eflagelliferus. Amphigastria nulla. Folia fere verticalia, succubo imbricata, secunda, sed non invicem adpressa, circumscriptione subreniformia, vel semicirculari-reniformia, apice sinu obtuso angusto vel latiusculo emarginata, subbilobaque, caeterum integerrima, concava, dilute fusco-rutilantia, in sicco crispabilia. Fructificatio terminalis. Constat toro vel perigynio carnoso ex apice caulis deorsum descendente, obtuse conoideo, radiculis barbato, intus cavum e quo involucrum et perianthium proficiscuntur. Perianthium ore irregulariter quadridentatum, dentibus subtriangularibus, cum involucro ore irregulariter plicato, perianthio ipso vix longiore, in tubum subcampaniforme concretum. Involucrum foliis caulinis prorsus conformibus sed sensim amplioribus, incubo-imbricatis, quorum suprema caeteris grandiora, involucri ipsius marginem attingentia, dorso squamatum, facie ventrali nudum. Pistillidia duo, vel tria in interiore tori cavitate imbutiformi excepta, unicum vero fertile. Calyptra oblongo-obovata, carnosula, stylo apiculata.

Capsula immatura sphaerica, pedunculo brevi, crasso instructa. Fructus maturi et antheridia desiderantur.

Cellulae foliorum amplae, rotundatae, pleraeque, inaequales, interstitiis trigonis distinctae, periphericae vix centralibus minores, semicirculares, vel ovato-truncatae.

L'analisi di questa specie condotta su esemplari raccolti nell'autunno del 1842, è tutt'altro che perfetta. Confesso che non mi è mai riescito di distrigare in modo soddisfacente le foglie superiori che immediatamente ne abbracciano l'involucro, nè di cogliere le forme precise che l'involucro stesso e il perianzio presentano nel loro lembo estremo, avvegnachè, in tutti gli individui sagrificati nelle dissezioni, il perianzio e l'involucro, non che le foglie subinvolucrali, risultarono, o già sfaldate dallo stillicidio di cui i cespiti furono irrigati, o talmente flosce e così fra di loro appiccicate, che per niun mezzo fu possibile spianarle in tutta la loro superficie e ritrarne esattamente il profilo. Comunque l'insieme delle particolarità che questa specie presenta, benchè incomplete negli ultimi loro dettagli, sembra a me più che sufficiente a dichiararne il carattere.

Indicazione delle figure.

1. Esemplare fruttifero veduto lateralmente.
2. Sommità di altro individuo consimile.
3. Perianzio veduto dalla parte ventrale.
4-5. Perianzii nella loro sezione longitudinale.
6. Lembo del perianzio e dell'involucro spianati.
7. Pistillidio tratto dal periginio o fondo del perianzio.
8-9-10. Foglie subinvolucrali.
11-12. Parti di stelo con foglie, all'ingrandimento di cinque diametri, come tutte le figure precedenti.
13. Segmento di foglia a 400 diametri.

3. Alicularia pachyphylla n. sp.

Su rupi in valle Cannobbina al lago Maggiore nel mese di settembre, senza fruttificazione.

Dense gregaria, intricata, sed non contexta, in sicco puniceo-fusca,

valde fragilis. Examphigastriata. Caulis rhizomatoideus, setaceus, prostratus, tortuosus, rigidiusculus, fuscescens, vage divisus. Rami erecti, vel adscendentes, compresso-crassiusculi, praesertim in sicco, inferne plerumque nudi, e ventre haud raro radiculigero vel plerumque ex apice innovantes, simulque ramos flagelliformes, nudos, tortuosos, saepe edentes, simplices, vel vage subdichotomi; pro more ob folia innovationum ab infimis gradatim ampliora, circumscriptione subclavati, longitudine centimetrum aequantes vel paullo longiores. Folia conferta, subverticalia, in sicco arcte accumbentia, madida, carnosula, sub lente pulchre punctato-areolata, leniter divergentia, et ad caulem erecto-patula, circumscriptione e basi lata semiamplectente et subinde in dorso caulis breviter decurrente, suborbicularia, concaviuscula, margine obsolete interdum sinuosa, caeterum integerrima. Rete foliorum elegans, validum, rufescens. Cellulae pleraeque rotundatae, grandiusculae, pachydermaticae, areolis intercalaribus trigonis, isthmo anguste distinctis vel confluentibus, atque areola trigona pallidiore notatis.

Più e più volte ho confrontato questa specie, che per difetto di fruttificazione potrebbe lasciare qualche dubbio relativamente alla sua ubicazione sistematica, colle Jungermannie europee integrifolie, avendone quasi di tutte esemplari nella mia collezione, e quindi colle molte forme di *Alicularia scalaris*, che in bel numero mi furono favorite dal chiarissimo Wimmer, ed ho dovuto conchiudere ch'essa non ha riscontro esatto nè tra le Jungermanniee, nè tra le Alicularie fin qui descritte, o sia per l'aspetto, o sia per il notevole spessore delle sue foglie. Benchè mancante di fruttificazione, pure io credo non esser lungi dal vero affermando ch'essa appartiene alle Alicularie e pel modo d'inserzione delle foglie, e per la loro tessitura, e per la forma compressa, e quasi claviforme dei rami, onde in qualche parte si avvicina alle forme minori dell'*Alicularia compressa*. Tuttavia pur da questa specie si distingue per la mancanza degli amfigastrii, per la forma delle foglie e per la loro consistenza, per cui disseccate si mantengono turgide, mentre nell'altra più o meno si contraggono e divengono ondeggiate e rugose.

Aggiungerò infine che i *Sphaguoeeetis*, a cui, per la presenza di stoloni flagelliformi agli steli, potrebbe eziandio essere paragonata l'*Alicularia pachyphylla*, si distinguono dalle Alicularie e dalle Jungermannie per tessitura di foglie totalmente diversa.

Indicazione delle figure.

1-2-3-4-5. Porzioni di steli veduti di fianco, all'ingrandimento di cinque volte il diametro.

6-7. Foglie spianate allo stesso ingrandimento.

8. Segmento di foglia a 100 diametri.

9. Segmento di foglia a 400 diametri.

IV.

JUNGERMANNIE ITALICHE

NUOVE O MENO NOTE.

1. Jungermannia alicularia n. sp.

Su rupi umide alla cateratta della valle dei Molinazzi presso Sestri di Ponente, nel marzo 1857.

Minuta, dense lateque gregaria, humecta laete virens. Exampliga-striata. Surculi crassiusculi, virides, ventre dense radiculosi, repentes, apice plus minusve surrecto-adscendentes, definiti, vel fructiferi atque e basi ventrali involucri gemmulam foliiferam exiguam, superiori anno novum surculum edituram proferentes, vel steriles, innovationibusque plerumque binis furcatim continuato, longitudine centimetro ut plurimum breviores. Folia plerumque dense conferta, fere verticalia, lata basi semiamplectentia, succubo-subcomplanato-disticha, concaviuscula, ad angulum fere rectum patula, oblique ovata, ovatave, apice rotundata, vel leniter obtuseque emarginata, a basi surculorum gradatim in fertilibus increscentia, cellulis amplis, chlorophyllosis, rotundato-polygonis, interstitiis trigonis, exiguis sejunctis, contexta, in sicco secundata, corrugataque. Folia superiora involucralibus proxima late ovata, subsemicircularia, involucralia aequantia, e basi concava, adpressa, patula, apice argute denticulata. Folia involucralia subquadrata, apice truncata, croso-repanda, concava, adpressa et invicem, ad speciem spathae bivalvis,

fructu etiam maturo, conniventia, perianthium conspicue superantia. Perianthium breve inclusum, subsphaericum, membranaceum, pallidum, ore quadri-quinquefidum, segmentis obtusis, truncatisve integris, vix nisi ima basi cum foliis involucralibus concretum. Pistillidia plura, minuta, cylindracea, unicum fertile. Calyptra obovata, apice stylo brevi apiculata, vertice demum irregulariter rumpens. Capsula exserta, subrotunda, atro-fusca, duplici cellularum strato contexta, quorum unus cellulis hexagonis contextus, alter cellulis amplioribus subquadratis ad suturas denticulato-appendiculatis, fuscescentibus. Sporae ovoideae muricatae. Elateres vaginati, dispiri.

Interessantissima specie la quale ricorda nell'aspetto e nel modo di crescere l'*Jungermannia nigrella* (*Primitiae hepaticologiae italicae* n.° 44. fig. *a.* 1-4), da cui nondimeno, anche a prima vista, si distingue per la sua statura alquanto maggiore, pel colore verde gaio delle foglie, per la forma loro e loro disposizione, e particolarmente pel distintivo, unico per avventura nelle specie europee, della sezione integrifoglia del genere Jungermannia, delle foglie sottoinvolucrali argutamente denterellate, per le foglie dell'involucro conniventi e sensibilmente maggiori del perianzio.

Questo carattere del perianzio, chiuso tra le foglie involucrali, rammenterebbe uno dei principali distintivi delle Alicularie, ma questa specie non può ad esse ridursi, in quanto che foglie involucrali e perianzio si presentano perfettamente distinti. Dico perfettamente, poichè, l'essere queste parti per brevissimo tratto e leggermente saldate alla loro base, non implica il carattere del genere Alicularia, nè ripugna a quelli del genere Jungermannia, in molte specie delle quali vedesi il perianzio inferiormente saldato all'involucro. Converrebbe modificare i caratteri del genere Alicularia per potervi comprendere questa specie.

Se io non avessi esaminato recentemente l'*Jungermannia scalaris stillicidiorum* di Raddi, della quale fo seguire la descrizione, non avrei forse esitato a riferirvi questa specie, e tanto più che la figura e descrizione dell'*Jungermannia stillicidiorum* non bene ne esprimono i caratteri.

Indicazione delle figure.

1–2. Parte superiore di due diversi individui, in uno dei quali la capsula è già sbucciata dall'involucro.

3. Innovazione.

4. Perianzio spogliato delle foglie involucrali.

5. Foglie involucrali, una delle quali presenta al suo lato ventrale una gemma o primordio di innovazione.

6. Foglie preinvolucrali.

7. Involucro spianato.

8. Pistillidio quasi maturo, con molti pistillidii sterili alla base.

9. Lo stesso un po' più avanzato nello sviluppo. All'ingrandimento di cinque volte il diametro, o poco più, come le precedenti.

10. Spore ed elaterio a 400 diametri.

11. Segmento di una valvola della capsula a 400 diametri.

12. Parte di stelo con due foglie, ingrandimento di cinque diametri.

13–14. Foglie diverse spianate, a cinque diametri.

15. Segmento di foglia a 400 diametri.

2. Jungermannia stillicidiorum.

Jungermannia scalaris stillicidiorum Raddi, Jungermann. etrusc. ed. Nees p. 9. tab. V. fig. 3 ex specimine Raddiano, DNtrs. Primit. hepat. italic. n.° 43.

Alicularia scalaris major rigidula, Synop. hepaticar. p. 11.

Jungermannia palustris etc. Mich. Nov. pl. gener. p. 8. tab. 5. fig. 6. 7.

In Toscana, comunissima ai stillicidii o gemitivi d'acqua, spesso in società col *Didymodon rigidulum* e colla *Tortula unguiculata*. Dal gennaio all'aprile. Raddi l. c.

Conferte gregaria, pallescens (e sicco), examphigastriata. Surculi crassiusculi, flaccidi, ventre toto radiculis densis barbato, arcte repentes, apice fructiferi vel innovando indefiniti, saepiusque bifidi. Folia semiverticalia, distiche complanata, imbricata, ad caulem patula, ovata, ovatove elliptica, integerrima, concaviuscula, tenera, flaccida, in sicco pallide virescentia. Folia involucralia caeteris multo ampliora, inferiori parte canaliculata, adpresso amplectentia, caeterum patula. Involucrum foliis involucralibus longius, membranaceum, ovatum, saepe antice fissum, demum bi-trifido dehiscens, vel apice toto fatiscens. Capsula alte pedunculata, sphaeroidea, fuscescens, valvis demum bipartilibus. Sporae rotundae vel ellipsoideae, fuscae, opacae, minutissime muriculatae. Elateres magni, dispiri, nudi.

Cellulae foliorum amplae, tenues, reticulantes, plerumque pentagonae vel hexagonae, granulis chlorophyllae exiguis farctae. Valvulae capsulae cellulis transverse elongatis, in series longitudinales exaratis compositae, interstitiis fuscescentibus.

Saepe ad basim dorsalem involucri, foliis involucralibus tecta adest gemmula minutissima, foliis aliquot accumbentibus constans, quae, ut videtur, caulis post fructificationem elongatur.

Parmi oramai superfluo il ripetere che la presente Jungermannia non può essere paragonata all'*Alicularia scalaris*, nè ad alcuna delle sue varietà. Però quindi innanzi, con minore esitazione, si potrà citare all'*J. stillicidiorum* il sinonimo e la relativa figura del Micheli, che, comunque rude, sufficientemente esprime nella forma del perianzio un carattere che più a questa specie, che al genere Alicularia conviene. Il celebre Lindenberg si era avveduto di questa sconcordanza di caratteri, che a me pure non era sfuggita, come può vedersi nelle citate mie Primizie. In quanto alla figura 7, e corrispondente sinonimo dello stesso Micheli, potrebbe ora nascere il dubbio, non sia più presto riferibile alla specie precedente, cioè all'*Jungermannia alicularia*.

Indicazione delle figure.

1. Sommità di stelo fruttifero con capsula matura.
2. Perianzio con involucro veduto dalla parte dorsale.
3. Perianzio spogliato dell'involucro, aperto e spianato colla gemmetta che nasce alla sua base ventrale.
4. Capsula prima della maturazione, colla calittra persistente alla base del peduncolo.
5. Capsula in cui le valve si sono separate in due segmenti, all'ingrandimento di cinque diametri, come le precedenti figure.
6. Spore ed elaterio a 400 diametri.
7. Innovazione da uno stelo infruttifero, e
8-9. Foglie diverse all'ingrandimento di cinque diametri.
10. Segmento di foglia a 400 diametri.
11. Parte di valvola della capsula a 400 diametri.

5. Jungermannia sphaerocarpoidea n. sp.

Su muri umidi, lungo la via dell'Acquasanta sopra Voltri nella Liguria occidentale, nell'aprile 1857.

E grege specierum minimarum. Lacte viridis, in strata latissima aequata coadunata. Examphigastriata. Surculi debiles, virescentes, ventre radiculis tenuissimis radicantes, apice plerumque definito assurgentes, et sub apice fructifero, vel e latere crebre sed vage innovantes. Innovationes, initio subinde fere flagelliformes surculis primariis multo tenuiores, varie adscendentes, vel flexuosae, interdum subdenudatae, demum surculo primario conformes. Surculi fructiferi, in visis speciminibus humi demersi, innovationibus penitus cooperti, marcescentes. Folia in innovationibus junioribus saepe secundo-compressa, caeterum divergenti-disticha, semiverticalia, patula, subrotunda, concaviuscula, integerrima, laxiuscule imbricata. Involucralia grandiora, subadpressa vel patula, canaliculato-amplectentia, circumscriptione cordato-rotundata. Perianthium involucro duplo saltem longius, oblongo-obovatum, apice conoideum, vix plicatum, quadrifidum, segmentis ovato-triangulis, apice denticulatis, subinde per paria cohaerentibus, ad speciem involucri bifidi. Pistillidia tria, plurave, unicum fertile. Epigonium e basi angustata obovoideum, vertice-fatiscens. Capsula sphaeroidea, minuta, pedunculo elongato, crassiusculo, diaphano, cellulis spiraliter saepe contortis composito, suffulta, pedunculi ipsius latitudine vix duplo major, matura fusca, quadrivalvis. Sporae rotundae, laeves, dilute fuscae, diaphanae. Elateres crassiusculi, dispiri, vaginati.

Folia flaccida. Cellulae eorundem polygonae, quadratae, pentagonae, hexagonae, inaequales tum forma, cum magnitudine, arcte invicem contiguae, interstitiis perexiguis vel inconspicuis, periphericae caeteris plerumque minores, omnes granula pauca, rotunda, oblongave, majuscula chlorophyllae foventes.

Unicamente per la forma e l'andamento delle divisioni dello stelo e per le dimensioni paragoncrei questa specie alla varietà β. dell'*Jungermannia crenulata* (Syn. hepatic. p. 90. Hueben. e Gentil n.° 115, *J. tenerrima* Raddi Jungermann. p. 9. tab. III. fig. 2), risultando del resto da essa molto diversa per la floscezza di tutte le parti e il colore, laddove l'accennata varietà si distingue per i suoi steli più presto rigidetti, le foglie

di tessitura più compatta, rimarchevoli per una leggera tintura come ferruginosa del loro colorito, e per essere di forma quasi semicircolare negli stoloni. Più presto, se io non erro, per l'insieme dei caratteri si accosterebbe all'*Jungermannia sphaerocarpa* (Syn. hepat. p. 93. Hueben. e Gentu n.° 63), di cui v'ha pure una forma gracilescente, se non che, ommessi i dettagli delle differenze che le due specie presentano al confronto delle loro parti più essenziali, v'ha già nelle foglie un carattere sufficiente a distinguerle. Le foglie dell'*J. sphaerocarpa* sono tessute di cellule con pareti più consistenti, rotondeggianti, onde evidentissime le areole intercalari di figura trigona o quadrilatera, mentre in questa essendo le cellule di pareti più sottili e di figura poligona, combaciando esattamente nei loro lati, formano una rete sottile e continua a maglie poligone.

Indicazione delle figure.

1. Sommità di stelo fruttifero con innovazioni.
2-3. Sommità di steli fruttiferi.
4. Simile veduta di fianco.
5. Sommità di un'innovazione.
6. Foglie vedute dalla parte ventrale.
7. Foglie da un ramo laterale, vedute dalla parte dorsale.
8. Una foglia spianata.
9. Foglie involucrali spianate.
10. Calittra dopo la proiezione della capsula.
11. Capsula matura ed aperta, all'ingrandimento di cinque diametri, come tutte le precedenti figure.
12. Frammento di membrana esteriore della capsula a 400 diametri.
13. Simile della membrana interna al medesimo ingrandimento.
14. Spore.
15. Elaterio a 400 diametri.
16. Lembo di foglia a 400 diametri.

4. Jungermannia tersa.

Jungermannia tersa Nees Europ. Leberm. I. p. 329 et IV. p. XLI. Syn. hepaticar. p. 94, Hamp. Hep. exsicc. ! Rabenh. Hepat. Europ. n.° 71.

Jungermannia cordifolia Mart. Fl. cryptog. erlang. p. 183. tab. IV. fig. 59 ex Nees.

Jungermannia tersa et Zeyheri Rota Enumer. mss.

Nelle colline delle vicinanze di Bergamo, secondo esemplari del D. Rota.

Dense implexa, polita, in sicco obscure fusca. Caulis crassiusculus, firmus, fuscescens, subtus radiculis elongatis, crebris, validis, radicans, alterne ramosus, indefinitus. Amphigastria nulla. Folia subsemiverticalia, succubo-imbricata, in planta madefacta adscendentia, patula, e basi latiuscula late oblique rotundato-ovata, integerrima, concaviuscula, subundulataque, nitidula, fuscescentia. Cellulae foliorum rotundatae, amplae, areolis intercalaribus trigonis fuscescentibus distinctae, marginales dimidiatae, caeteris plerumque minores. Fructificatio in ramis lateralibus abbreviatis, apice adscendentibus terminalis. Folia praeinvolucralia et involucralia reliquis multo ampliora, canaliculato-amplectentia, erecto-patula. Perianthium oblongo-obovatum, teretiusculum obtusum, apice plicatulum, foliis involucralibus multo longius, dentibus quatuor vel quinque dehiscens. Pistillidia plura, unicum fertile, epigonio stylo mucronato praeditum. Capsula pedunculo mediocri suffulta, ad basim usque quadrivalvis, valvis obovatis subcostatis. Cellulae membranae capsulae interioris plerumque ad formam parallelogram. accedentes et trabeculis transversis, fuscis, numerosis tessellatae. Cellulae membranae exterioris oblongatae, irregulares, ad suturas aculeolis fuscis praeditae.

Ho di varie località dell'Italia superiore alcune forme di Jungermannie che non dubito appartenere a questa specie, ma essendo infruttifere mi dispenso pel momento di divisarle. Variabile nel maggiore o minore sviluppo degli steli, e nella tinta più o men fosca delle foglie, è però notevole questa specie per la consistenza e levigatezza loro, onde presto si distingue fra le congeneri dalla divisione delle integrifoglie non amfigastriate.

Indicazione delle figure.

1. Porzione di stelo primario veduto lateralmente.
2. Innovazione o ramo laterale.
3-4. Foglie spianate.
5. Sommità di ramo fruttifero prima della proiezione della capsula.
6. Perianzio ed involucro con capsula aperta.
7. Pistillidio in via di evoluzione, all'ingrandimento di cinque diametri, come le figure precedenti.
8. Segmento di foglia a 400 diametri.

9. Particella della membrana interna della capsula a 400 diametri.
10. Simile della membrana esteriore al medesimo ingrandimento.

5. Jungermannia Hornschuchiana.

Jungermannia Hornschuchiana Nees Europ. Leberm. II. p. 153, IV. p. XLVIII. Syn. hepaticar. p. 101.

Trovata da Bonjean al monte Cenisio, in società della *Philonotis fontana falcata*. Debbo all'amico Professore Huguenin alcuni esemplari di questa specie estratti dall'erbario dello stesso Bonjean.

E majoribus, laxe gregaria, subfastigiata, in sicco fusco-pallescens. Caulis adscendens vel erectus, cum innovationibus, in speciminibus visis, centimetra tria longitudine attingens, senio inferne marcescens, ventre vix vel parce radiculigerus, e ventre ipso vel sub apice definito, innovationibus ut plurimum geminis continuatus. Folia membranacea, juniora pallescentia, ampla, laxiuscule succubo-imbricata, amplectenti-subverticalia, adscendentia, circumscriptione subrotundata, apice sinu subrectangulo vel obtuso breviter inaequaliterque biloba, atque ad sinum vulgo ansata, lobis obtusis vel subacutis inaequalibus, plerumque inflexis, caeterum integerrima, subundulata, antice in caulis dorsum eximie decurrentia, postice basi protracta, rotundata, caulem excedentia, in sicco adpressa corrugataque. Amphigastria exigua, tenerrima, varia, lanceolata, hinc vel utrinque denticulo vel lacinula ciliiformi basim versus instructa, vel subpinnatim ciliolata, vel bifida segmentis inaequalibus, integris vel lacinulatis, subinde obsoleta. Folia involucralia caeteris demum paullo ampliora, profundiusque biloba, magisque undulata, adpressa. Perianthium adscendens, demum folia involucralia excedens, obverse oblongum, apice contracto-apiculatum, vage secus longitudinem plicatum, ore lacinulato dehiscens, segmentis angustis apice penicillato ciliolatis. Pistillidia plura. Fructus deest. Cellulae foliorum grandes, inaequales, rotundatae vel obtuse angulatae, leptodermaticae, areolis intercalaribus trigonis exiguis distinctae; marginales caeteris plerumque minores, transverse pro more elongatae.

Indicazione delle figure.

1. Parte superiore di stelo infruttifero.
2. Sommità di stelo con rudimento di fruttificazione.

3. Sommità di stelo fruttifero da cui fu tolta una delle foglie involucrali.

4. Parte di stelo da cui sono state tolte le foglie corrispondenti del lato sinistro.

5. Una foglia veduta di fianco dal suo lato ventrale.

6-7-8-9. Foglia spianata, e figure rappresentanti l'apice di foglie diverse.

10-11-12. Amfigastrii diversi.

13. Amfigastrio da una innovazione.

14. Sezione trasversale di un perianzio, all'ingrandimento di cinque diametri, come tutte le figure che precedono.

15. Segmento dell'orificio del perianzio a 100 diametri.

16. Segmento di foglia a 400 diametri.

6. Jungermannia Laurentiana n. sp.

Nei dintorni di Caremno nella provincia di Bergamo, trovata dal Dott. Lorenzo Rota.

E majoribus, cum aliqua flavedine virens, laxe gregaria. Surculi crassiusculi, flexuosi, radiculis tenuibus, elongatis repentes, centimetra duo longitudine attingentes, simplices, sub apice definito vel e ventre innovantes, innovationibus surculo primario initio gracilioribus et laxifoliis. Folia semiverticalia, complanato-disticha vel leniter adscendentia, succubo-imbricantia, angulo fere recto porrecta, e basi lata in dorso surculi breviter decurrente oblique trapezioidea ovata, apice sinu lato semilunari excisa, bidentata, dentibus porrectis plerumque acutissimis, caeterum integra. Folia praeinvolucralia praecedentibus paullo ampliora, adscendentia vel erecta, lobis argute remoteque denticulatis, atque ad sinum plerumque ansata. Amphigastria exigua, tenerrima, ventre caulis adpressa e basi hinc vel utrinque denticulo aucta, lanceolato-subulata, in apicem piliformem desinentia, vel bifida, segmentis inaequalibus piliformi-subulatis. Folia involucralia caulinis ampliora erecto-adpressa, late quadrato-ovata, profundius saepiusque inaequaliter biloba, sinu ansato, lobis acutis argute denticulatis. Perianthium obverse oblongum, teretiusculum, apice obtusatum, ore dentato-plicatum, segmentis invicem conniventibus, apice penicillato-ciliolatis, involucrum longe superans. Pistillidia plura, unicum fertile. Epigonium stylo brevi mucronatum. Fructus maturus desideratur.

Folia firmiuscula et in sicco fere immutata, cellulae eorundem amplae, rotundatae, areolis intercalaribus trigonis, quadrigonisve amplis distinctae.

Strettamente affine all'*Jungermannia bantriensis* del celebre Hooker (Synops. hepaticar. p. 100), ne differisce per le foglie tessute di cellule più ampie, per il più rotondeggianti, per il seno o incavo della sommità delle foglie ottuso-semilunare, e infine per le foglie involucrali ondeggiate e finamente denterellate nel contorno dei loro segmenti. La *Jungermannia bantriensis*, di cui ho avuto un esemplare autentico dal chiarissimo Leumann, presenta le foglie il cui seno è quasi rettangolare, e inoltre le cellule o maglie del loro tessuto risultano sensibilmente più piccole e più piccoli gl'intervalli triangolari frapposti alle cellule stesse. In questa le foglie involucrali non differiscono punto dalle cauline.

Le differenze infine, che distinguono questa specie dalla precedente *Jungermannia Hornschuchiana*, risulteranno facilmente dal confronto delle relative figure.

Indicazione delle figure.

1-2. Parte superiore di due diversi surculi fruttiferi.

3. Parte di un ramo di secondo ordine dal lato dorsale.

4. Parte di un ramo simile dal lato ventrale con amfigastrii, all'ingrandimento di cinque diametri.

5. Amfigastrii diversi a 20 diametri.

6. Un amfigastrio a 100 diametri.

7. Due foglie involucrali da diversi individui fruttiferi.

8. Sommità del perianzio aperto e spianato, all'ingrandimento di cinque diametri, come la figura precedente.

9. Segmento dell'orificio del perianzio a 100 diametri.

10. Pistillidio in via di accrescimento a cinque diametri.

11. Segmento di foglia a 400 diametri.

NOTE

Sur les pages 68, 69 *et* 75 *du second Volume des* Opuscula Analytica *d'*Euler *publié en* 1785;

PAR

JEAN PLANA

La triple égalité

$$[1]\ldots\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx.x^{k-n-1}}{1+2x^k\cos.\theta+x^{2k}}\cdot\frac{\sin.\theta}{2k}=\int_0^1\frac{dx(x^{k-n-1}+x^{k+n-1})}{1+2x^k\cos.\theta+x^{2k}}\cdot\frac{\sin.\theta}{2k}\\ \displaystyle=\frac{\pi}{2k^2}\cdot\frac{\sin.\left(\frac{n}{k}.\theta\right)}{\sin.\left(\frac{n}{k}.\pi\right)},\end{cases}$$

trouvée par Euler dans ce Volume, par l'intégration directe, et sans l'emploi d'aucune série, est d'autant plus remarquable, que, à son aide, on peut substituer, pour toute valeur de x, plus petite que l'unité, la série *convergente*

$$x^k\sin.\theta-x^{2k}\sin.2\theta+x^{3k}\sin.3\theta-x^{4k}\sin.4\theta+\text{etc.},$$

au lieu de la fonction

$$\frac{x^k\sin.\theta}{1+2x^k\cos.\theta+x^{2k}}.$$

De sorte que, en faisant pour plus de simplicité $\frac{n}{k}=a$, l'on a l'équation

$$\frac{\pi}{2k^2}\cdot\frac{\sin.a\theta}{\sin.a\pi}=\frac{1}{2k}\int_0^1 dx(x^{-n-1}+x^{n-1}).\sum_1^\infty.(-1)^{i-1}x^{ik}\sin.i\theta.$$

En multipliant par $d\theta$ les deux membres de cette équation, et intégrant depuis $\theta=0$, il est clair qu'on en tire

$$\frac{\pi}{2kn}\left\{\frac{1}{\sin.a\pi}-\frac{\cos.a\theta}{\sin.a\pi}\right\}=\frac{1}{2k}.\sum_1^\infty.\frac{(-1)^{i-1}}{i}\left[\frac{1}{ik-n}+\frac{1}{ik+n}\right]-\frac{1}{2k}.\sum_1^\infty.\frac{(-1)^{i-1}}{i}\left[\frac{1}{ik-n}+\frac{1}{ik+n}\right]\cos.i\theta.$$

Partant nous avons

$$\frac{\pi}{2ku}\cdot\frac{\cos.a\theta}{\sin.a\pi}=\frac{\pi}{2ku}\cdot\frac{1}{\sin.a\pi}+\sum_{1}^{\infty}\cdot\frac{(-1)^{i}}{i^{2}k^{2}-n^{2}}-\sum_{1}^{\infty}\cdot\frac{(-1)^{i}.\cos.i\theta}{i^{2}k^{2}-n^{2}}\ .$$

Mais Euler a démontré dans son *Introductio in Analysin*, que l'on a l'équation

$$\frac{\pi}{2ku}\cdot\frac{1}{\sin.a\pi}+\sum_{1}^{\infty}\cdot\frac{(-1)^{i}}{i^{2}k^{2}-n^{2}}=\frac{1}{2n^{2}}\ .$$

Donc l'équation précédente devient, en multipliant par n^2 les deux membres;

$$[2]\ \ldots\ldots\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a\cos.a\theta}{\sin.a\pi}=\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty}\cdot\frac{(-1)^{i-1}.\cos.i\theta}{\left(\frac{i}{a}\right)^{2}-1}\ .$$

Cette équation, analytiquement parlant, doit subsister pour toute valeur de a, réelle ou imaginaire: donc en posant $a=\sqrt{-1}$ on en tirera

$$[3]\ \ldots\ldots\ \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(e^{\theta}+e^{-\theta})}{e^{\pi}-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}+\sum_{1}^{\infty}\cdot\frac{(-1)^{i}.\cos.i\theta}{i^{2}+1}\ ;$$

c'est-à-dire l'équation [21] que j'ai rapportée à la page 103 du Vol. XVI des Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin (Seconde Série). Il est évident que le *diviseur* 2 manque (par simple faute *typographique*) dans le premier membre de l'équation [21] que je viens de citer.

Si l'on voulait déduire cette même équation de la seconde des formules (b), qu'on voit dans la page 169 du second Volume des *Exercices de Calcul Intégral de* Legendre, il faudrait y faire $bx=\pi$, et diviser par 2 les deux membres; ce qui rendrait un peu obscure l'analyse par laquelle Legendre parvient à cette équation. La déduction de l'équation [3] par la série de Lagrange est spontanée. Mais j'ai voulu citer le mode de déduction par la formule de Fourier (page 231 de sa Théorie de la Chaleur) pour imprimer à ce résultat la restriction qui lui est inhérente, conformément aux idées publiées par ce grand Géomètre sur les séries trigonométriques de cette espèce. La démonstration que je viens de donner de l'équation (2), d'après Euler, prouve seulement que la découverte primitive de ce résultat remonte à l'année 1785: mais elle ne saurait être regardée comme équivalente à la démonstration de Fourier dans toute son étendue.

Dans la solution d'un nombre *infini* d'équations du premier degré,

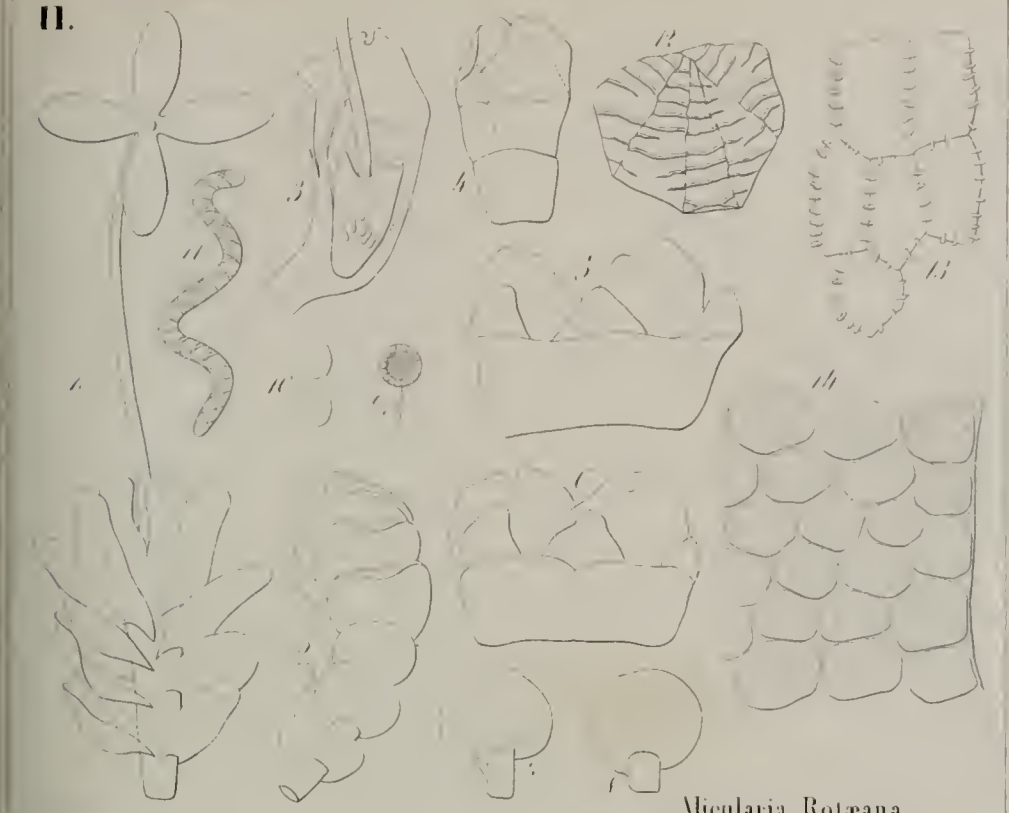
I.



Plagiochasma Italicum.

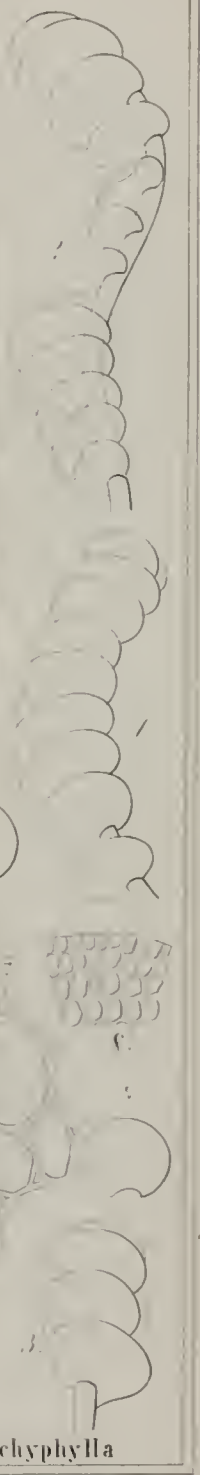

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

II.



Alicularia Rotæana.

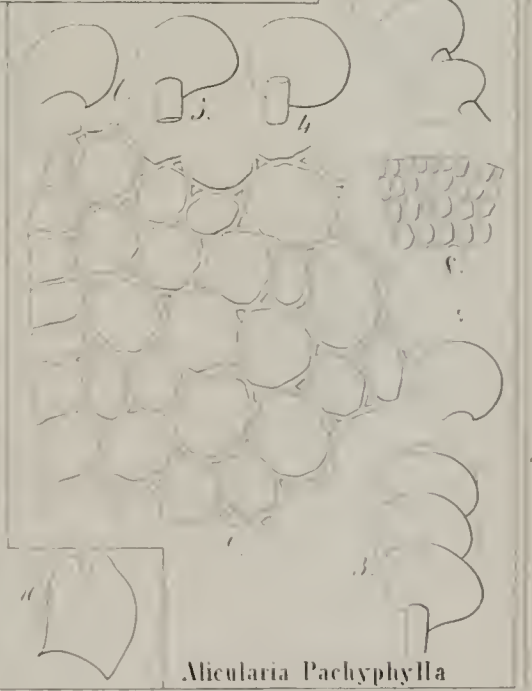
IV.



III.



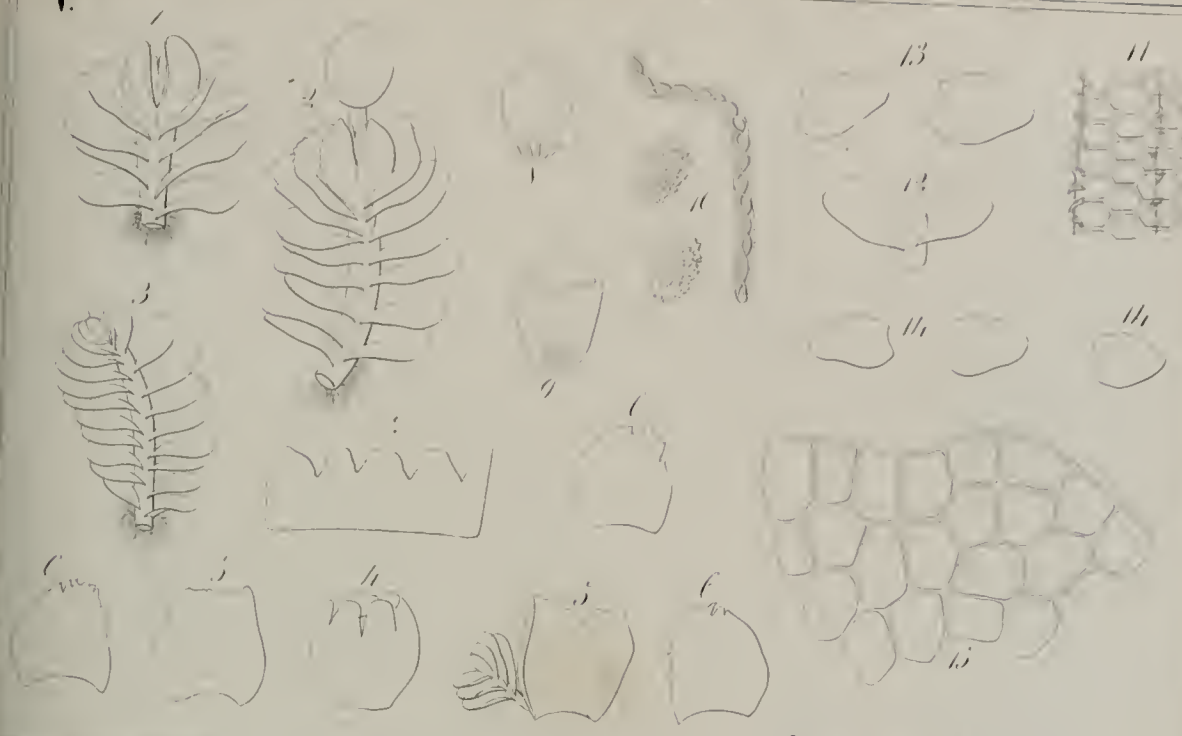
Alicularia Geoscyphus.



Alicularia Pachyphylla

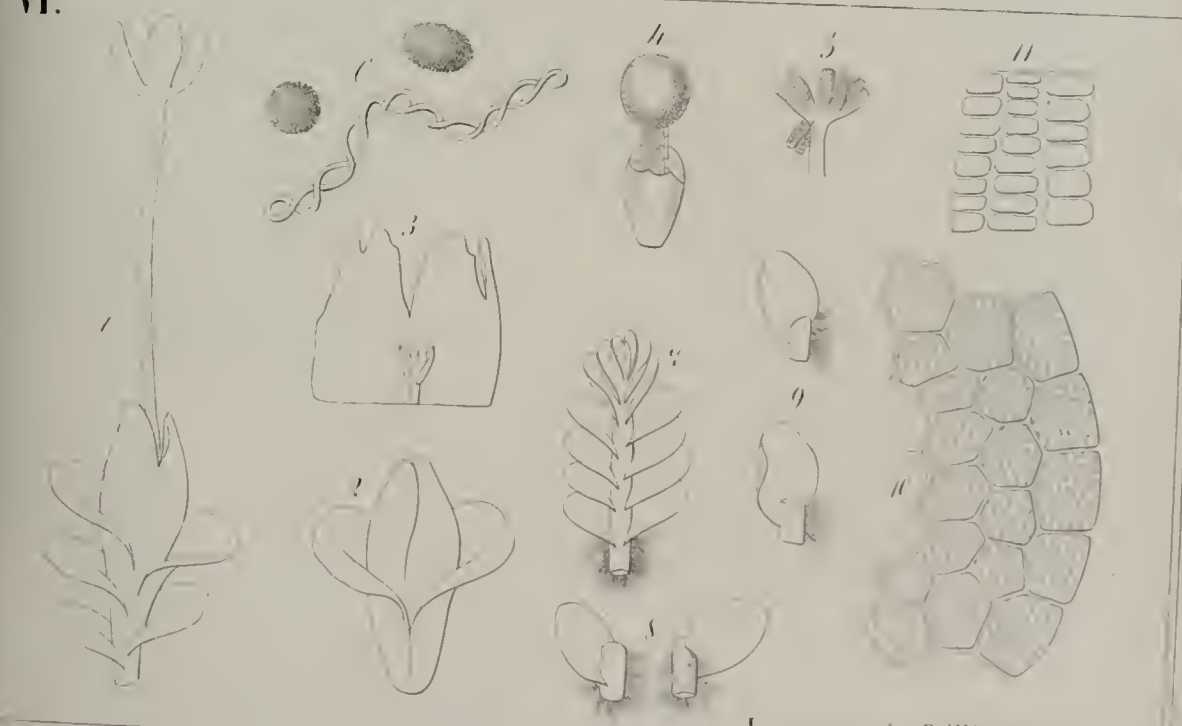

NATURAL HISTORY.

V.



Jungermannia Alicularia.

VI.



Jungermannia Stillicidiorum.


BRITISH
NATURAL HISTORY.

VII.



Jungermannia Sphærocarpoidea.

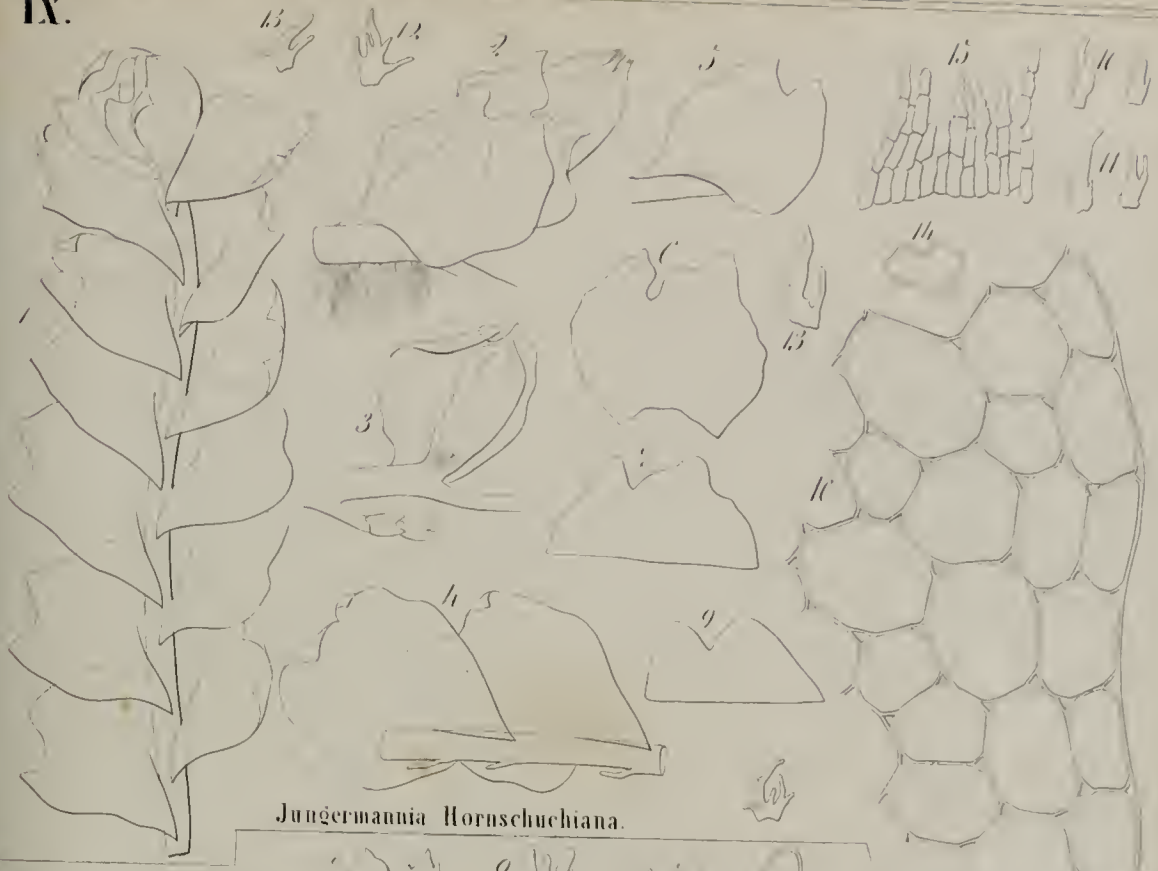
VIII.



Jungermannia Tersa.

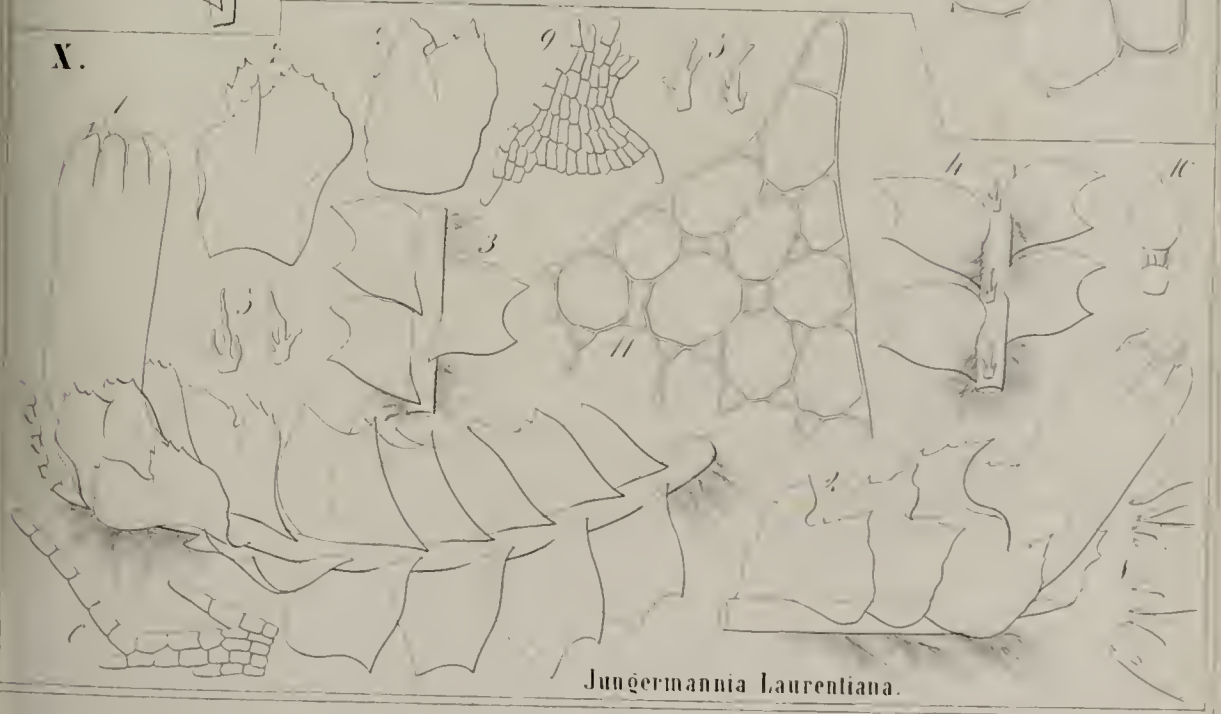

NATURAL HISTORY.

IX.



Jungermannia Hornschuchiana.

X.



Jungermannia Laurentiana.


NATURAL HISTORY

Fourier a évité l'emploi de toute équation semblable à celle admise, de prime abord, par Lagrange, vers la fin de la page 214 (où par faute typographique il y a $\frac{\beta'}{m}$ au lieu de $\frac{\beta'}{m^2}$) du troisième Tome des *Miscellanea Taurinensia*. Et en effet, une équation de la forme

$$1-(p^2A_{(1)}+1)+(p^4A_{(2)}+p^2A_{(1)})-(p^6A_{(3)}+p^4A_{(2)})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^n\{p^{2n}A_{(n)}+p^{2(n-1)}A_{(n-1)}\}=0$$

est tout-à-fait inadmissible, si le nombre de ses termes est fini. Et même, en supposant $n=\infty$, l'égalité à zéro peut être regardée au moins comme illusoire, puisque rien ne détruit le dernier terme affecté du plus grand indice. L'illusion disparaît, lorsqu'on détermine *a priori* la fonction, qui, par son développement, produit une telle équation. Si ce moyen présente des difficultés insurmontables, on pourra imiter le procédé de Fourier, et examiner, comme lui, « si, à mesure que le nombre des inconnues » augmente, chacune de leurs valeurs ne converge point vers une limite » finie, dont elle approche continuellement » (lisez la page 169 de la Théorie Analytique de la Chaleur).

La double équation d'Euler

$$S=\sum_{i}^{\infty}.m^{2\lambda}\cos.(m\pi)=0\ ,$$

que j'ai employée dans ma démonstration de la série de Lagrange, dont je viens de parler, pouvant être transformée dans l'équation

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1^{2\lambda}-\frac{1}{2^2}\Delta.1^{2\lambda}+\frac{1}{2^3}\Delta^2.1^{2\lambda}.\ldots\ldots+\frac{1}{2^{2\lambda+1}}\Delta^{2\lambda}.1^{2\lambda}\ ;$$

Euler, dans la page 500 de son *Calculus Differentialis*, n'avait qu'à citer sa formule de la page 288 pour éviter l'argument peu plausible, que l'infini est un nombre *neque par, neque impar*. En faisant successivement $\lambda=1$, $\lambda=2$, $\lambda=3$, etc., la formule précédente fait voir que l'on a $S=0$; et, par une induction fort naturelle, on étend la conclusion à toute valeur de λ. C'est uniquement dans ce sens que j'ai entendu parler, soit du mode d'existence, soit de la vérification de l'équation $S=0$.

Mais, en écrivant $S_{(\lambda)}$ au lieu de S, on pourrait démontrer, en général, la vérité de l'équation $S_{(\lambda)}=0$, en observant, que, pour toute valeur

de x plus petite que l'unité, l'on a, par une série convergente,

$$\frac{1-x^2}{1+2x\cos.\theta+x^2}=1+2.\sum_{1}^{\infty}.(-1)^i.x^i\cos.i\theta\ .$$

Donc, en développant $\cos.i\theta$ par la série toujours convergente

$$\cos.i\theta=1-\frac{i^2\theta^2}{1.2}+\text{etc.}\ ,$$

l'on aura

$$\frac{1-x^2}{1+2x\cos.\theta+x^2}=1-\frac{2x}{1+x}-\frac{2\theta^2}{1.2}X_{(1)}+\frac{2\theta^4}{1.2.3.4}X_{(2)}-\text{etc.}\ ,$$

en posant

$$X_{(\lambda)}=\left(\frac{x}{1+x}\right).1^{2\lambda}-\left(\frac{x}{1+x}\right)^2.\Delta.1^{2\lambda}.....+\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2\lambda+1}.\Delta^{2\lambda}.1^{2\lambda}\ .$$

Cette équation devant avoir lieu, sans définir l'arc θ, pour toute valeur de x plus petite que l'unité, et même à la limite $x=1$; si l'on y fait $x=1$, le premier membre devient nul, et en supprimant le facteur commun $2\theta^2$ l'on obtient l'équation

$$0=-\frac{S_{(1)}}{1.2}+\frac{\theta^2}{1.2.3.4}.S_{(2)}-\frac{\theta^4}{1.2...6}.S_{(3)}+\text{etc.}\ ,$$

de laquelle on tire la conséquence, qu'on doit avoir nécessairement $S_{(1)}=0$, $S_{(2)}=0$, $S_{(3)}=0$; et, en général, $S_{(\lambda)}=0$.

Corrections pour le Vol. XVI.

Page 97, ligne 3 du titre du Mémoire

Lisez $=2\alpha.....$ au lieu de $\frac{\alpha}{2}$; et

$\alpha''\left[\varphi(t+2x)+\varphi(t-2x)\right]$ au lieu de $\alpha''\left[\varphi(t+2x)-\varphi(t-2x)\right]$.

Page 98, ligne 20

Lisez $1-1+1-1+\text{etc.}=+\frac{1}{2}$ au lieu de $1-1+1-1+\text{etc.}=-\frac{1}{2}$.

Page 103, ligne 16

Lisez $\frac{\pi}{2}.\frac{(e^x+e^{-x})}{e^\pi-e^{-\pi}}=.....$ au lieu de $\frac{\pi.(e^x+e^{-x})}{e^\pi-e^\pi}=.....$

Page 104, ligne 2

Lisez $=\frac{2}{2}.\sqrt{1}-.....$ au lieu de $=\frac{1}{2}.\sqrt{1}-.....$

MÉMOIRE

Sur les formules propres à déterminer la parallaxe annuelle des étoiles simples, ou optiquement doubles

PAR

JEAN PLANA

Lu dans la Séance du 12 novembre 1858.

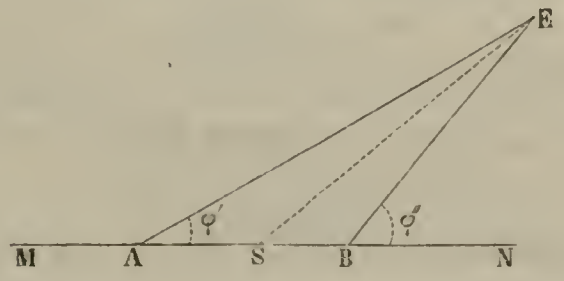
§ I.

Il est permis de négliger l'excentricité de l'orbite de la Terre dans la solution de ce problème, lorsqu'il s'agit d'une première approximation, et de l'application de la théorie à des observations, qui, malgré la grande délicatesse avec laquelle elles doivent être toujours faites, ne comportent pas un degré de précision comparable avec la valeur absolue des très-petits termes dépendans de cette excentricité.

Si je ne me trompe, les nouveaux rapprochements que je vais faire sont utiles pour éclaircir à la fois la partie théorique et historique de cette question.

Cela posé, en désignant par $2a$ le diamètre de l'orbite de la Terre, et par r la distance de l'étoile au centre du Soleil, la petite fraction $\frac{a}{r}$ est la quantité qui exprime la tangente de l'angle (que nous nommerons φ) sous lequel le rayon a, disposé perpendiculairement à la distance r, depuis le centre du Soleil, serait vu du centre de l'étoile.

D'après cette définition, si nous considérons le plan du triangle AEB



formé par l'étoile E, et les deux visuelles AE, BE, tirées à l'étoile des deux positions A et B de la Terre, diamétralement opposées dans le plan même de l'écliptique, on y voit les deux angles φ', φ'', l'angle $AEB = E$, et la distance $ES = r$ de l'étoile au centre du Soleil, milieu de AB. Or, en projettant les deux lignes $AE = r'$, $BE = r''$ sur le plan de l'écliptique, et nommant λ', l'; λ'', l'' les latitudes et longitudes géocentriques de l'étoile, observées des deux points A et B de la Terre, si l'on nomme Θ et $180° + \Theta$ les longitudes du Soleil aux mêmes points, l'on aura

$$\cos.\varphi' = \cos.\lambda'.\cos.(\Theta - l') ,$$

$$\cos.\varphi'' = \cos.\lambda''.\cos.(180° + \Theta - l'') ;$$

et

$$[1] \ldots\ldots \frac{a}{r} = \text{tang.}\,\theta = \frac{\sin.(\varphi'' - \varphi')}{\sqrt{2.\sin.^2\varphi' + 2.\sin.^2\varphi'' - \sin.^2(\varphi'' - \varphi')}} ,$$

en supposant que le point E, projetté sur le diamètre AB tombe sur son prolongement. Mais si, cette projection, tombe sur un point de ce même diamètre, l'on aura

$$[2] \ldots\ldots \frac{a}{r} = \text{tang.}\,\theta = \frac{\sin.(\varphi' + \varphi'')}{\sqrt{2.\sin.^2\varphi' + 2.\sin.^2\varphi'' - \sin.^2(\varphi' + \varphi'')}} .$$

En effet; nous avons dans le premier cas, $\varphi'' = E + \varphi'$;

$$r'.\sin.E = 2a.\sin.\varphi'' \; ; \qquad r'.\sin.(\varphi'' - \varphi') = 2a.\sin.\varphi'' .$$

Mais, dans le plan du même triangle, il y a aussi le triangle AES, formé par les trois lignes a, r', r, lequel donne

$$[3] \ldots\ldots \qquad r^2 = a^2 + r'^2 - 2ar'.\cos.\varphi' .$$

Donc, en substituant pour r' sa valeur

$$r' = 2a.\frac{\sin.\varphi''}{\sin.(\varphi'' - \varphi')} ,$$

il est évident que l'on a;

$$r^2 = a^2 \left\{ 1 + \frac{4.\sin^2\varphi''}{\sin.^2(\varphi'' - \varphi')} - \frac{4.\sin.\varphi''.\cos.\varphi'}{\sin.(\varphi'' - \varphi')} \right\} ;$$

$$\frac{a^2}{r^2} = \frac{\sin.^2(\varphi'' - \varphi')}{4.\sin.^2\varphi'' - \sin.^2(\varphi'' - \varphi') - 2.\sin.(\varphi'' - \varphi')\sin.(\varphi'' + \varphi')} ;$$

$$\frac{a^2}{r^2}=\frac{\sin.^2(\varphi''-\varphi')}{2.\sin.^2\varphi'+2.\sin.^2\varphi''-\sin^2(\varphi''-\varphi')}\ ;$$

et, par conséquent, la formule [1].

Pour démontrer la formule [2], il suffit de remarquer que, dans le second cas, l'on a:

$$\varphi'+\varphi''+E=180^\circ\ ;\qquad r'\sin.(180^\circ-\varphi'-\varphi'')=2a.\sin.\varphi'\ :$$

de sorte que, dans l'équation [3], il faut remplacer r' par

$$r'=2a\cdot\frac{\sin.\varphi''}{\sin.(\varphi''+\varphi')}\ ;$$

ce qui donne

$$\frac{a^2}{r^2}=\frac{\sin.^2(\varphi''+\varphi')}{4.\sin.^2\varphi''-\sin.^2(\varphi''+\varphi')-2.\sin.(\varphi''-\varphi')\sin.(\varphi''+\varphi')}\ ;$$

d'où l'on tire la formule [2].

En nommant φ l'angle ASE; λ et l la latitude et longitude héliocentrique de l'étoile, nous avons les deux équations

$$\cos.\varphi=\cos.\lambda.\cos.(180^\circ+l-\Theta)\ ,$$

$$\sin.\varphi=\frac{r'}{r}\sin.\varphi'=\frac{2a}{r}\cdot\frac{\sin.\varphi'.\sin.\varphi''}{\sin.(\varphi''-\varphi')}\ ,$$

par lesquelles on voit, que les équations [1] et [2] sont équivalentes à celles-ci; savoir:

$$[4]\ \ldots\ldots\quad\frac{a}{r}=\text{tang.}\,\theta=\sin.(\varphi''-\varphi')\cdot\frac{\sin.\varphi}{2.\sin.\varphi'.\sin.\varphi''}\ ,$$

pour le premier cas; et

$$[5]\ \ldots\ldots\quad\frac{a}{r}=\text{tang.}\,\theta=\sin.(\varphi''+\varphi')\cdot\frac{\sin.\varphi}{2.\sin.\varphi'.\sin.\varphi''}\ ,$$

pour le second cas.

Pour déterminer la latitude héliocentrique λ, nécessaire au calcul de l'angle φ, remarquons que, pour une position quelconque du Soleil ayant pour longitude Θ, l'on a la formule générale

$$[6]\ \ldots\ldots\quad\text{tang.}\,\lambda'=\frac{\text{tang.}\,l}{\sqrt{1+\frac{2a}{r}\cdot\frac{\cos.(\Theta-l)}{\cos.\lambda}+\frac{a^2}{r^2}\cdot\frac{1}{\cos.^2\lambda}}}\ .$$

Donc, en observant la latitude géocentrique λ' au moment de la quadrature de l'étoile avec le Soleil, l'on aura $\Theta - l = 90°$, ou $\Theta - l = 270°$, et par conséquent $\cos.(\Theta - l) = 0$, ce qui réduit la formule précédente à

$$\text{tang.}\,\lambda' = \frac{\text{tang.}\,\lambda}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\cos.^2\lambda}}} .$$

Mais, la quantité $\frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\cos.^2\lambda}$ est, en général, très-petite comparativement à l'unité, surtout, si l'on donne l'exclusion aux étoiles dont la latitude est fort approchante de 90°. Donc, l'on aura alors $\lambda' = \lambda$. Ainsi, on peut déterminer les trois angles φ, φ', φ'' qui entrent dans le second membre de la formule [4] par des observations géocentriques.

Et pour avoir la différence $\lambda'' - \lambda'$ (qu'on appelle parallaxe de latitude) par une formule indépendante des angles φ, φ', φ'', on peut remarquer, que, la formule [6] étant appliquée à la seconde position de la Terre, diamétralement opposée, donne:

$$\text{tang.}\,\lambda'' = \frac{\text{tang.}\,\lambda}{\sqrt{1 - \frac{2a}{r} \cdot \frac{\cos.(\Theta - l)}{\cos.\lambda} + \frac{a^2}{r^2} \cdot \frac{1}{\cos.^2\lambda}}} .$$

Donc, en négligeant les termes qui seraient multipliés par le *carré* de $\frac{a}{r}$, l'on a

$$\text{tang.}\,\lambda'' - \text{tang.}\,\lambda' = \frac{2a}{r} \cdot \frac{\text{tang.}\,\lambda' \cos.(\Theta - l)}{\cos.\lambda} ;$$

c'est-à-dire

$$\text{tang.}\,(\lambda'' - \lambda') = \frac{2a}{r} \cdot \frac{\text{tang.}\,\lambda' . \cos.(\Theta - l)}{\cos.\lambda \{1 + \text{tang.}\,\lambda' . \text{tang.}\,\lambda''\}} .$$

Mais la petitesse de la différence entre λ' et λ'' permet ici de remplacer $1 + \text{tang.}\,\lambda' . \text{tang.}\,\lambda''$ par

$$1 + \text{tang.}^2\lambda' = \frac{1}{\cos.^2\lambda'} ,$$

et même de faire $\frac{\cos.\lambda'}{\cos.\lambda} = 1$, et alors l'on a:

[7] ..... $$\text{tang.}\,(\lambda'' - \lambda') = \frac{2a}{r} \sin.\lambda' . \cos.(\Theta - l) ,$$

qui est l'équation ordinaire entre la parallaxe annuelle et la parallaxe

de latitude. C'est par elle qu'on voit : 1.° que la parallaxe $\lambda'' - \lambda'$ est *nulle* pour les étoiles situées dans le plan de l'écliptique, puisque, à leur égard, $\sin.\lambda' = 0$; 2.° que la parallaxe $\lambda'' - \lambda'$ est nulle pour les étoiles situées hors de l'écliptique, au moment de leur quadrature avec le Soleil ; c'est-à-dire, lorsque $\Theta - l = 90°$, ou $\Theta - l = 270°$.

Il y a une autre équation semblable entre la parallaxe annuelle, et la *parallaxe de longitude* $l'' - l'$. En effet ; la formule générale

$$[8] \ldots\ldots \qquad \text{tang.}(l' - l) = \frac{a}{r} \cdot \frac{\sin.(\Theta - l)}{\cos.\lambda + \frac{a}{r}\cos.(\Theta - l)} \ ,$$

étant appliquée au lieu de la Terre, diamétralement opposé, l'on a ;

$$\text{tang.}(l'' - l) = -\frac{a}{r} \cdot \frac{\sin.(\Theta - l)}{\cos.\lambda - \frac{a}{r}\cos.(\Theta - l)} \ .$$

Donc, en retranchant cette équation de la précédente, il viendra ;

$$\text{tang.}(l' - l) - \text{tang.}(l'' - l) = \frac{\frac{a}{r}\cos.\lambda . \sin.(\Theta - l)}{\cos.^2\lambda - \frac{a^2}{r^2}\cos.^2(\Theta - l)} \ ;$$

d'où l'on tire

$$[9] \ldots \text{tang.}(l' - l'') = \frac{\frac{a}{r}\cos.\lambda . \sin.(\Theta - l)}{\left[\cos.^2\lambda - \frac{a^2}{r^2}\cos.^2(\Theta - l)\right]\left[1 + \text{tang.}(l' - l)\,\text{tang.}(l'' - l)\right]} \ .$$

Mais la petitesse du produit $\text{tang.}(l' - l)\,\text{tang.}(l'' - l)$, comparativement à l'unité, et la petitesse du carré $\frac{a^2}{r^2}$ (en excluant les cas où $\cos.\lambda$ aurait une très-petite valeur) permettent de réduire cette équation à

$$\text{tang.}(l' - l'') = \frac{a}{r} \cdot \frac{\cos.\lambda . \sin.(\Theta - l)}{\cos.^2\lambda} \ ,$$

et alors l'on a ;

$$[10] \ldots\ldots \qquad \cos.\lambda . \text{tang.}(l'' - l') = \frac{a}{r} \cdot \sin.(l - \Theta) \ .$$

La formule [9] démontre : 1.° que la parallaxe de longitude $l'' - l'$ est nulle pour les étoiles situées au pôle de l'écliptique, puisque, à leur

égard $\cos.\lambda = 0$: 2.° que cette parallaxe $\left(\frac{a}{r}$ et $\Theta - l$ demeurant les mêmes$\right)$ croît à mesure que les étoiles se rapprochent du plan de l'écliptique: 3.° qu'au moment de la conjonction ou de l'opposition, la parallaxe de longitude est nulle, à cause de $\sin.(\Theta - l) = 0$.

Pour estimer les effets produits par la variation de la distance des étoiles à la Terre, il faut observer que, la formule [3],

$$r' = r.\sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2} - \frac{2ar'}{r^2}.\cos.\varphi'} ,$$

en négligeant le carré $\frac{a^2}{r^2}$, donne

$$r' = r + \frac{ar'}{r}\cos.\varphi' = r + \frac{ar'}{r}\cos.\lambda'.\cos.(\Theta - l') ;$$

$$r'' = r + \frac{ar''}{r}\cos.\varphi'' = r - \frac{ar''}{r}\cos.\lambda''.\cos.(\Theta - l'') ;$$

et par conséquent

$$[11] \ldots\ldots \quad r' - r'' = \frac{2ar'}{r}.\cos.\lambda'.\cos.(\Theta - l') ,$$

en posant $\cos.\lambda''.\cos.(\Theta - l'') = \cos.\lambda'.\cos.(\Theta - l')$, ce qui n'altère pas sensiblement cette égalité.

Ainsi, la différence $r' - r''$ sera à peu près *nulle* pour les étoiles fort rapprochées du pôle de l'écliptique, et augmentera à mesure que les étoiles (*coeteris paribus*) seront plus rapprochées du plan de l'écliptique. C'est en vertu de la formule [11] que, GALILÉE, dans la *Giornata Terza* de ses Dialogues, décrivait l'effet du mouvement de la Terre sur la distance des étoiles avec ces paroles remarquables pour l'époque (1632):

« *Quanto poi all'avvicinarsi o allontanarsi per tal moto la Terra* » *alle stelle, a quelle che sono nell'eclittica, si avvicina ella, e si discosta* » *per quanto è tutto il diametro dell'orbe magno; ma alle stelle intorno* » *al polo dell'eclittica, tale accostamento o allontanamento è quasi nullo:* » *e all'altre questa diversità si fa maggiore, secondo che elle sono più* » *vicine all'eclittica* ». Mais, pour entendre le reste de cette conception de GALILÉE, il faut observer, que notre formule [4], en y faisant

$$\sin.\varphi = \sin.\varphi'' = \sin.\varphi' ,$$

donne

$$\sin.(\varphi''-\varphi')=\frac{2a}{r}\cdot\sin.\varphi'=\frac{2a}{r}\cdot\sqrt{1-\cos.^2\varphi'}\ ;$$

et à cause de $\cos.\varphi'=\cos.\lambda'.\cos.(\Theta-l')$;

$$[12]\ \ldots\ldots\ \sin.(\varphi''-\varphi')=\frac{2a}{r}\cdot\sin.\lambda'.\sqrt{1+\frac{\sin.^2(\Theta-l')}{\text{tang.}^2\lambda'}}\ .$$

En appliquant cette formule à l'instant de la conjonction ou de l'opposition de l'étoile avec le Soleil (où $\sin.(\Theta-l')=0$) l'on a:

$$[13]\ \ldots\ldots\ \sin.(\varphi''-\varphi')=\frac{2a}{r}\cdot\sin.\lambda'\ .$$

C'est la différence $\varphi''-\varphi'$, que Galilée envisageait comme la parallaxe des étoiles. Et en ce sens il disait:

« *La diversità di apparenza (la quale con termine proprio dell'arte* » *potremo chiamare parallasse delle stelle fisse) è maggiore o minore,* » *secondo che le stelle osservate sono più o meno vicine al polo dell'e-* » *clittica, sì che finalmente delle stelle che sono nell'eclittica stessa, tal* » *diversità si riduce a nulla* » (*). Tout cela est conforme à l'équation [13]; où l'existance du facteur $\frac{2a}{r}$ permet aussi de dire:

« *Che la diversità d'aspetto si fa maggiore o minore, secondo che* » *la stella osservata fosse a noi più vicina o più remota* ».

Ainsi, la formule [13], et *non* la formule [10] est celle qui s'adapte au raisonnement de Galilée.

Ce rapprochement démontre que, Delambre, n'a pas saisi avec justesse l'explication des effets de la parallaxe donnée par Galilée, en disant, à la page 656 du 1.er Volume de son Histoire de l'Astronomie moderne, « qu'il explique d'*abord* la parallaxe *de longitude* »; ce qui reviendrait à dire, que Galilée considérait la projection $l''-l'$ de la parallaxe sur le plan de l'écliptique, au lieu de la parallaxe $\varphi''-\varphi'$. L'écriture des formules algébriques est éminemment propre pour donner aux conceptions géométriques toute la force qui leur est inhérente.

(*) Ces derniers mots, pour être bien compris, il faut entendre qu'ils sont appliquables à une étoile placée sur le prolongement même du diamètre AB de l'orbite de la Terre, et non à toute étoile qui, sans latitude, aurait une longitude différente de celle du Soleil. C'est une étoile pour laquelle notre triangle AEB s'évanouit.

C'est de quoi je trouve un autre exemple dans un passage de la page 430 du premier Volume de l'*Astronomie Populaire* d'Arago. Pour cela remarquons que le triangle AEB, formé par les trois lignes $2a$, r', r'', devient isoscèle, si l'on a, $r'=r''$. Alors, $\varphi''=\varphi'$, et notre formule [2] donne;

$$\frac{a}{r}=\frac{\cos.\varphi'}{\sin.\varphi'}=\tang.(90^\circ-\varphi')=\tang.\left(\frac{180^\circ-\varphi'-\varphi''}{2}\right);$$

ce qui revient à dire, que la parallaxe annuelle est égale à la moitié de l'angle à l'étoile E, lorsque son centre se projette sur le centre même du Soleil. Mais, pour toute autre cas, la transition au cas général, exigeant le concours des formules [1] et [2], est loin d'avoir ce degré de facilité qui paraît compatible avec l'instruction que Arago croyait suffisante pour entendre son *Traité*.

§ II.

En appliquant la formule [4] à une autre étoile, pour laquelle les quantités φ, φ', φ'', θ, r, seraient, respectivement, φ_1, φ_1', φ_1'', θ', R, l'on aura l'équation

$$\frac{a}{R}=\tang.\theta'=\sin.(\varphi_1''-\varphi_1')\cdot\frac{\sin.\varphi_1}{2.\sin.\varphi_1'.\sin.\varphi_1''}.$$

Donc, en supposant fort petite la différence, soit de latitude, soit de longitude, entre les deux étoiles, on pourra, à raison de la petitesse des facteurs $\sin.(\varphi''-\varphi')$, $\sin.(\varphi_1''-\varphi_1')$, considérer comme égaux les seconds facteurs

$$\frac{\sin.\varphi}{2.\sin.\varphi'.\sin.\varphi''},\qquad\frac{\sin.\varphi_1}{2.\sin.\varphi_1'.\sin.\varphi_1''};$$

et alors, la différence $\tang.\theta-\tang.\theta'$ devient,

$$\tang.\theta-\tang.\theta'=\frac{a}{r}-\frac{a}{R}=\frac{\{\sin.(\varphi''-\varphi')-\sin.(\varphi_1''-\varphi_1')\}\sin.\varphi}{2.\sin.\varphi'.\sin.\varphi''};$$

d'où l'on tire

$$\frac{a}{r}\left(1-\frac{r}{R}\right)=\frac{\sin.\frac{1}{2}[(\varphi_1'-\varphi')-(\varphi_1''-\varphi'')]\cos.\frac{1}{2}[(\varphi_1'+\varphi')-(\varphi_1''+\varphi'')]\sin.\varphi}{2.\sin.\varphi'.\sin.\varphi''}.$$

Et comme la différence $\frac{1}{2}(\varphi_1'+\varphi')-\frac{1}{2}(\varphi_1''+\varphi'')$ est, par sa nature,

aussi fort petite, il est permis de remplacer par l'unité le facteur

$$\cos.\tfrac{1}{2}\left[(\varphi_1'+\varphi')-(\varphi_1''+\varphi'')\right] ;$$

ce qui donne

$$[14] \ldots\ldots \quad \frac{a}{r}\left(1-\frac{r}{R}\right)=\frac{\sin.\frac{1}{2}\left[(\varphi_1'-\varphi')-(\varphi_1''-\varphi'')\right]\sin.\varphi}{\sin.\varphi'.\sin.\varphi''} .$$

Donc, en supposant fort grande la distance R de la seconde étoile, comparativement à la distance r de la première, on pourra réduire à l'unité le facteur $1-\frac{r}{R}$, et alors l'on a;

$$[15] \ldots\ldots \quad \frac{a}{r}=\text{tang.}\,\theta=\frac{2.\sin.\frac{1}{2}\left[(\varphi_1'-\varphi')-(\varphi_1''-\varphi'')\right]\sin.\varphi}{2.\sin.\varphi'.\sin.\varphi''} .$$

Or il n'est pas impossible que les deux petits arcs $(\varphi_1'-\varphi')$, $(\varphi_1''-\varphi')$ puissent être mesurés avec des lunettes armées de micromètres, en supposant que les deux étoiles sont vues, au même instant, dans le champ de la lunette. Donc, en appliquant ce mode d'observation à des couples d'étoiles pour lesquelles la condition

$$\frac{r}{R}= \text{à une très-petite fraction} ;$$

serait effectivement vraie, on pourra éliminer la nécessité de mesurer, *séparément*, les deux angles φ', φ'' avec la dernière précision, et obtenir le *sinus* de l'angle à l'étoile E, d'après l'équation

$$\sin.E=2.\sin.\tfrac{1}{2}\left[(\varphi_1'-\varphi')-(\varphi_1''-\varphi'')\right] ,$$

qui, en raison de la petitesse de ces différences, revient à dire, que

$$[16] \ldots\ldots \quad E=(\varphi_1'-\varphi')-(\varphi_1''-\varphi'') ,$$

ce qui ramène la mesure du très-petit arc E, à celle des deux arcs $(\varphi_1'-\varphi')$, $(\varphi_1''-\varphi'')$, comparativement beaucoup plus grands, et susceptibles d'être mesurés avec de puissantes lunettes munies de micromètres filaires, ou semblables aux héliomètres.

C'est ainsi que M.r F. G. W. Struve a pu constater, que la parallaxe annuelle de l'étoile α *Lyrae* est

$$=0'',2619 \text{ avec l'erreur probable } 0'',0254 ,$$

en la comparant à une étoile télescopique de la *dixième grandeur* qui

en est distante de 43 secondes. Par là on on voit une étoile *optiquement* double, et non un système binaire: M.r Struve ayant prouvé que la petite étoile ne participe pas au mouvement propre annuel de la plus brillante.

Par la même méthode, Bessel, a pu faire constater, en choisissant des étoiles de comparaison de la *neuvième* et *dixième* grandeur, éloignées de l'étoile plus brillante 61 *Cygni* de *cinquième grandeur*, non de quelques secondes d'arc, mais de *plusieurs minutes*, que la parallaxe annuelle de cette dernière étoile est

$$= 0'',3483 \text{ avec l'erreur probable } 0'',0095 .$$

Ce résultat, confirmé par les observations faites en 1842 par le Docteur C. A. F. Peters avec un grand cercle vertical d'Ertel, démontre que l'hypothèse

$$\frac{a}{r}\left(1-\frac{r}{R}\right)=\frac{a}{r}=0'',3483 ,$$

est sensiblement vraie pour l'étoile *Cygni*.

Mais, à l'égard de l'étoile de première grandeur α *Lyrae*, le résultat du même M.r Peters étant $0'',103 \pm 0'',053$, on ne peut l'accorder avec celui de M.r Struve, sans attribuer la différence à l'influence des erreurs probables. Car il serait à-peu-près absurde de vouloir l'attribuer à l'équation $\frac{r}{R}=\frac{159}{262}=0,607$, puisque la petite étoile de *dixième grandeur*, à laquelle a été comparée la très-brillante étoile α *Lyrae*, serait, contre toute vraisemblance, à une distance R du Soleil, moindre que le double de la distance r.

Ces deux résultats ne me paraissent pas avoir la moindre force pour infirmer l'hypothèse que l'on fait en réduisant l'équation [14] aux équations [15] et [16]. L'équation [16] est, dans le fond, celle suggérée en 1632 par Galilée, comme capable de fournir une preuve sensible du mouvement de la Terre, puisée dans les observations du Ciel étoilé. Mais il faudrait élargir sa pensée au-delà de la signification attachée à ses paroles, pour soutenir qu'il y avait là toute la méthode proposée en 1781 par William Herschel avec des développemens d'une nouvelle importance, et appliquée avec un succès tout-à-fait positif, à la distance d'environ un demi-siècle, par M.rs Struve et Bessel.

C'est un fait digne d'attention celui du silence complet de Piazzi sur ce passage des Dialogues de Galilée dans son historique sur la parallaxe annuelle des étoiles, publié en 1817 aux pages 209 et 210 du Tome premier de son Traité d'Astronomie. Mais cela prouve seulement, que Piazzi n'avait pas pénétré toute la finesse de l'idée de Galilée. Il y a là un trait de son génie inventif, et je saisis l'occasion pour faire observer, que le superlatif *altissima*, par lequel il caractérise « *la picciolissima » stella vicinissima ad alcuna delle maggiori »* dans la *Giornata Terza*, ne doit pas être traduit par les mots *très-grande hauteur*, capables de faire croire qu'il s'agit d'une hauteur *angulaire*, mais bien par les mots *à une très-grande distance*, qui sont conformes à la restriction que $\frac{r}{R}$ soit une très-petite quantité; restriction absolument nécessaire pour le succès de la méthode. Et, pour plus de clarté sur ce point, j'ajouterai que Galilée qualifie l'ancienne planète Saturne qui, de son temps, était la plus éloignée du Soleil, par les mots *altissimum Planetam*. C'est de quoi on a la preuve dans une de ses lettres du 13 novembre 1610, où il explique le logogryphe par lequel il avait caché ses observations sur la figure de Saturne, pour faire cesser, sur son interprétation, les inquiétudes de Kepler, et satisfaire en même temps la curiosité de l'Empereur Rodolphe II.

Galilée, dans ses écrits postérieurs aux Dialogues, n'a donné aucun développement à l'idée originale dont il est ici question: on croirait qu'il l'avait oubliée. Au commencement de 1639 il disait, comme en 1623 dans le *Saggiatore*, que l'immense distance des étoiles est démontrée par l'excessive petitesse de leur diamètre angulaire, et il ajoutait que, peu avant de perdre la vue, il avait trouvé un moyen très-exact pour mesurer leur diamètre (Lettre à un anonyme du 15 janvier 1639 où il parle des grands Télescopes construits à Naples par Fontana). Ce qu'il y a en outre d'assez remarquable dans les passages cités des Dialogues, publiés en 1632, est le progrès fait, depuis quelques années, par Galilée lui-même dans sa manière de concevoir l'effet du mouvement de la Terre sur la position apparente des étoiles. Car dans une de ses lettres de 1624, adressée à un nommé Francesco Ingoli, qui produisait comme un puissant argument contre le système de Copernic la fixité de la configuration des étoiles, il lui disait que la distribution des étoiles à une égale distance de la Terre était un *postulatum*: « *che nè voi, nè altri lo proverà mai in eterno* ».

Néanmoins, les progrès qu'il avait faits pendant les 23 années, écoulées depuis 1609, époque de la publication de l'ouvrage *De Stella Martis*, jusqu'en 1632, ne l'avaient pas amené à pénétrer le véritable génie de KEPLER et à acquérir la conviction du mouvement elliptique; et surtout à la nécessité de détruire dans son esprit l'existence des mouvemens épicycloïdaux autour de centres vides. Au point d'avancer vers la fin de la *Giornata Quarta* de ses Dialogues, que la question de la figure de l'orbite de Mars « *non si poteva ancora indubitatamente risolvere* » et qu'il était nécessaire d'admettre les excentriques et les épicycles pour expliquer « *gli accostamenti e discostamenti dei Pianeti dalla Terra* », lesquels, suivant lui, sont « *occasioni necessarie dell'introdur gli eccentrici, e gli* » *epicicli* ».

Sur ce dernier point, ceux qui voudraient s'engager à prendre sa défense pourraient faire remarquer, que, plusieurs années auparavant, dans une de ses lettres datée du 4 mai 1612, il avait dit « *che questi epicicli* » *non sono veri e reali, ma posti dai puri astronomi per facilitare i loro* » *calcoli, ma non già da ritenersi per tali dagli astronomi filosofi* ». Mais écrire le 30 juin 1612 que la nature « *si è compiaciuta di far* » *movere le stelle erranti circa centri diversi*; c'était livrer par le mot *diversi* la preuve qu'il n'avait pas saisi la grande idée de KEPLER, sa loi des aires proportionnelles au temps décrites par les rayons vecteurs, et qu'il conservait dans sa tête la triple erreur de COPERNIC: de faire mouvoir les planètes autour de *différents centres fictices*, sur des *cercles*, avec des mouvemens *uniformes*, au lieu de les faire mouvoir toutes autour d'un même et unique centre, celui de la masse même du Soleil.

Toutefois, la lettre du 4 mai 1612 (qui est celle citée par ARAGO à la page 261 du Tome 3.ème de ses Notices Biographiques, et *non* la postérieure du 30 juin) où on lit: « *son sicurissimo che ci sono moti* » *circolari che descrivono cerchi eccentrici ed epicicli* », considérée dans sa totalité, est loin d'infirmer le pas rétrograde par lequel il finissait ses Dialogues, deux années *après* la mort de KEPLER. De KEPLER qui s'était empressé de lui envoyer, peu de temps après l'impression, un exemplaire de son immortel ouvrage, où GALILÉE pouvait apprendre « *come stia la* » *struttura dell'orbe di Marte, che è quella che volgarmente si chiama* » *la sua teorica* »; et apprendre le grand secret par lequel « *si possono* » *totalmente levar gli eccentrici e gli epicicli* », ainsi qu'il exprimait le désir de le savoir dans sa lettre déjà citée du 30 juin 1612.

Alors Galilée aurait senti qu'il y avait un énorme intervalle entre les mouvemens circulaires et uniformes de Copernic, et les mouvemens elliptiques des planètes autour d'un seul et même centre. Je doute fort que Galilée ait jamais compris l'ouvrage de Kepler *De Stella Martis*, et qu'il ait su séparer ses rêveries pythagoriciennes de ses recherches, conduites avec une combinaison profonde de la géométrie, du calcul et des observations de Tycho-Brahé. Néanmoins ses découvertes sur la chûte des graves, le mouvement parabolique, et la théorie du mouvement uniformément accéléré ont contribué, plus que celles de Kepler, aux progrès de la science du mouvement, en général, faits par Huygens et Newton. Mais en lisant l'historique de Laplace sur la grande découverte de l'attraction universelle, on conçoit, par ses rapprochemens lumineux, qu'il était absolument impossible d'aller plus loin que Kepler, sans franchir les limites qui séparent la Géométrie et l'Algèbre ordinaire du Calcul Infinitésimal.

Pour justifier, au moins en partie, le doute que je viens d'avancer, je puis citer le passage suivant d'une lettre de Galilée du 19 novembre 1634, datée d'Arcetri, à *Frà Fulgenzio* Micanzio : « *Al virtuoso, che ella dice,* » *potrà con occasione far intendere, che io ho stimato sempre il* Keplero » *per ingegno libero (e forse troppo) e sottile, ma che il mio filosofare* » *è diversissimo dal suo; e che può essere, che scrivendo delle medesime* » *materie, solamente però circa i movimenti celesti, abbiamo talvolta* » *incontrato in qualche concetto simile, sebben pochi, onde abbiamo* » *assegnato di alcuno effetto vero la medesima ragion vera; ma questo* » *non si verificherà di uno per cento de' miei pensieri* ».

Pour renforcer ce même doute, j'ajouterai que, dans une de ses lettres à Mons.r *Pietro* Dini du 23 *marzo* 1614, au lieu de concevoir le mouvement *elliptique* de Mars, comme Kepler autour du Soleil, il le conçoit circulaire, excentrique à celui de la Terre autour d'un centre vide, sans s'apercevoir qu'il avait contre lui, non des opinions, mais l'admirable démonstration mathématique de Kepler.

Il fallait n'avoir pas lu son ouvrage pour écrire alors : « *Essendo l'Ec-* » *centrico un cerchio che ben circonda la Terra ma non la contiene nel* » *suo centro, ma da una banda; non si ha da dubitare, se il corso di* » *Marte sia eccentrico alla Terra, vedendosi egli ora più vicino, ora* » *più remoto, intantochè ora lo veggiamo piccolissimo, ed altra volta* » *di superficie sessanta volte maggiore, adunque qualunque siasi il suo*

» *rivolgimento, egli circonda la Terra, egli è una volta circa otto volte* » (nous dirions *cinque* aujourd'hui) *più presso che un'altra, talchè il* » *voler ammettere la mobilità della Terra, solo con quella concessione* » *e probabilità che si ricevono gli Eccentrici ed Epicicli, è un'ammetterla* » *per sicurissima, verissima ed irrefragabile* ».

On peut conjecturer, que GALILÉE a lu l'ouvrage de KEPLER avec l'esprit fortement préoccupé de son idée fausse pour expliquer le phénomène des marées. Sans cette préoccupation il aurait senti que le philosophe ne devait pas considérer « *come proprietà occulte e fanciullezze* » les aperçus vrais et profonds de KEPLER. Par malheur « les meilleurs esprits » s'abusent quelquefois sur leurs propres conceptions ».

S'il est possible, jetons un voile sur la condamnation de GALILÉE prononcée à Rome en 1633: elle a frappé la moins importante de ses productions scientifiques. Lui-même, en 1638, près du tombeau, en a tiré la plus noble, et pour ses juges, la plus flétrissante vengeance, en publiant, sur une terre étrangère à l'Italie, l'ouvrage qui atteste toute la puissance de son génie et lui assure l'immortalité.

§ III.

En faisant $\varphi''-\varphi'=V'$, $\varphi_1''-\varphi_1'=V''$, notre formule [4] donnera

$$\frac{2a}{r}=\frac{\sin. V'}{\sin. \varphi'}\,; \qquad \frac{2a}{R}=\frac{\sin. V''}{\sin. \varphi'}\,,$$

en négligeant, pour le système optiquement double des deux étoiles, la petite différence entre φ, φ'' et φ'. Il suit de là que

$$\frac{\frac{a}{r}-\frac{a}{R}}{\frac{a}{r}+\frac{a}{R}}=\frac{\sin. V'-V''}{\sin. V'+\sin. V''}\,;$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sin. V'}{\sin. V''}=\frac{R+a\left(\frac{R}{r}-1\right)}{R-a\left(\frac{R}{r}-1\right)}\,.$$

Mais, en supposant fort grand le rapport $\frac{R}{r}$, on peut réduire à $\frac{R}{r}$ la

différence $\frac{R}{r} - 1$; et alors l'on a

$$\frac{\sin. V'}{\sin. V''} = \frac{1 + \frac{a}{r}}{1 - \frac{a}{r}} = 1 + \frac{2a}{r} ,$$

en négligeant le carré $\frac{a^2}{r^2}$.

Cette équation, analogue à celle dont parle Jacques Gregory dans sa lettre à Oldenburg du 8 juin 1675, citée par Arago à la page 438 du 1.er Volume de son *Astronomie Populaire*, donne;

$$\sin. V' - \sin. V'' = \frac{2a}{r} \cdot \sin. V'' ;$$

d'où l'on tire

$$\sin. \tfrac{1}{2}(V' - V'') = \frac{a}{r} \cdot \sin. V'' ,$$

en remplaçant par l'unité le *cosinus* du très-petit arc $\frac{1}{2}(V' + V'')$; ce qui s'accorde à très-peu près avec l'équation [15] que j'ai donnée plus haut

Galilée n'est pas cité par Gregory dans cette lettre, où, son idée, de comparer les variations de la distance angulaire entre deux étoiles visibles dans le même champ d'une lunette, est exposée d'une manière beaucoup plus explicite, et en connexion plus intime avec la parallaxe annuelle des étoiles. Toutefois il me paraît, que, dans cette lettre, la description de la méthode en question n'est pas exposée de la manière la plus précise et la plus nette. C'est seulement après le rapprochement des formules précédentes que j'ai pu saisir le trait caractéristique de l'analyse de Gregory.

En ayant sous les yeux, non seulement la formule [15], mais aussi la formule [14], on conçoit que les observations faites par Robert Long et William Herschel, à leur insçu, sur des *systèmes binaires*, sont néanmoins précieuses pour établir le principe que la différence $1 - \frac{r}{R}$ doit être sensiblement nulle à l'égard des étoiles physiquement doubles. Car ces observations offrent la mesure, ou du moins les limites entre lesquelles doit être comprise l'évaluation du second membre de l'équation [14], et par conséquent l'évaluation du premier membre.

Je ne saurai terminer ce Mémoire sans payer un tribut d'éloges à M.r le Doct. C. A. F. Peters pour son excellent ouvrage, *Recherches sur la parallaxe des étoiles fixes*, publié à S.t Pétersbourg en 1853. Ses réflexions, que je relis aux pages 148 et 149, sont à la fois frappantes par leur justesse, et profondes pour faire entrevoir les progrès futurs de l'*Astronomie Stellaire*. Rien n'est plus vrai: « Les distances des étoiles » resteront toujours relatives tant que la parallaxe moyenne des étoiles » de première grandeur, ou des étoiles d'un autre ordre quelconque de » grandeur, est inconnue ».

Avant de franchir une telle barrière, il faudra, je pense, reprendre la recherche de l'étoile australe de *première grandeur* α^2 *Centauri*, avec de puissantes lunettes micrométriques, pour faire cesser tous les doutes sur le résultat définitif $0''{,}9721$, et renforcer la probabilité, que $\pm 0''{,}064$ sont les véritables limites de l'erreur qui peut l'affecter.

On ne saurait trop multiplier les observations de ce genre sur les trois étoiles 61 *Cygni*, α *Lyrae*, α^2 *Sagittarii* dont les positions relatives à l'Équateur et à l'Écliptique, pour le commencement de l'année 1858, sont:

61. *Cygni*
$AR = 21^h.\ 0'.31'',86$; $l = 334°.40'.\ 7''$;
$D = +38°.\ 3'.11'',65$; $\lambda = +\ 51°.52'.\ 5''$;

α *Lyrae*
$AR = 18^h.32'.\ 7'',79$; $l = 283°.19'.40''$;
$D = +38°.39'.13'',97$; $\lambda = +\ 61°.44'.34''$;

α^2 *Sagittarii*
$AR = 14^h.29'.58'',22$; $l = 245°.35'.27''$;
$D = -60°.14'.29'',\ 8$; $\lambda = -\ 39°.\ 7'.29''$.

PRODROME

D'UNE FLORE TERTIAIRE DU PIÉMONT

PAR

EUGÈNE SISMONDA

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE TURIN,
L'UN DES QUARANTE DE LA SOCIÉTÉ ITALIENNE DES SCIENCES DE MODÈNE, ETC.

Lu dans la seance du 29 mai 1859.

Les magnifiques travaux phytographiques qui ont paru dans ce dernier demi-siècle par les soins de Sternberg, Adolphe Brongniart, G. Mantell, Göppert, Unger, Heer, Massalongo, Ettingshausen, Gaudin et bien d'autres Auteurs, dont les noms jouissent de la plus juste célébrité parmi les Naturalistes, ont fait connaître toute l'importance paléontologique des débris végétaux, que l'on trouve ensevelis dans les terrains fossilifères, pour ainsi dire, de tous les âges, et ont démontré combien ces mêmes débris peuvent aider la géologie, soit dans la détermination chronologique des différents terrains, soit dans l'interprétation des conditions physiques, sous lesquelles se sont accomplis les phénomènes de la fossilisation végétale.

L'analyse des ouvrages nombreux publiés particulièrement par les savants mentionnés, nous apprend que les phyllites, les carpolithes, en un mot, les débris de plantes de toutes sortes, que l'on trouve à l'état fossile, sont bien plus nombreux qu'on ne le croyait, et qu'il n'y a presque pas dans la Flore actuelle un Genre ou une Famille, qui ne soit représentée par quelques espèces dans l'un ou l'autre des terrains antédiluviens. L'analyse de ces ouvrages nous apprend encore de quelle

manière s'est développée l'organisation végétale à la surface de la terre, et à travers les siècles innombrables qui s'écoulèrent pendant chaque époque géologique; car c'est seulement par cette analyse que nous pouvons connaître que les continents des époques silurienne et dévonienne étaient couverts d'une végétation fort riche, mais composée de seules plantes acotylédonées, et que dans l'époque carbonifère, au milieu d'un grand développement atteint par les acotylédonées et particulièrement par des Fougères arborescentes, des Lycopodiacées et des Equisétacées, parurent pour la première fois des plantes gymnospermes, telles que les Cicadées, les Conifères, etc., dont les restes fossiles ont formé ces grands dépôts de Houille, qui constituent une source inépuisable de richesse pour plusieurs contrées de l'Europe. Cette analyse nous apprend en outre que, pendant la période triasique, le domaine des Fougères de grande taille cessa et la domination passa aux gymnospermes, particulièrement aux Conifères et aux Cicadées, domination, qui continua pendant les périodes jurassique et crétacée, bien que dans les derniers temps de la craie l'organisation végétale ait éprouvé de profondes modifications, et aux monocotylédonées, telles que des Palmiers, se soient ajoutées des plantes dicotylédonées.

Elle nous fait voir que dans l'époque tertiaire, la Flore commença à s'approcher des formes de la Flore actuelle, les Cicadées ayant disparu presque tout à fait dans la période éocénique, tandis que les Bétulinées, les Cupulifères, les Ulmacées, les Salicinées, les Légumineuses et autres familles de l'ordre des dicotylédonées angiospermes prenaient à leur tour un très-grand développement pendant la période miocénique. Ajoutons enfin que le rapprochement dans la dernière période tertiaire, c'est-à-dire dans la période pliocénique, devint tel, que le Phytographe ne trouve pas quelquefois des caractères assez importants pour séparer les espèces fossiles de la période pliocénique de celles qui vivent encore maintenant.

Persuadé, à mon tour, de l'importance des plantes fossiles, depuis quelques années je me suis livré à l'étude de celles qui se trouvent dans les terrains tertiaires du Piémont. Je croyais d'abord qu'une monographie des phyllites piémontaises n'aurait pas été un travail bien long et bien difficile; mais à mesure que j'avançais dans ce travail, j'ai vu qu'il prenait des proportions assez grandes, et que les difficultés de l'exécution allaient bien au delà de mes prévisions. Les matériaux qui dans le commencement se bornaient aux empreintes que le Musée minéralogique possédait, il y a quatre ans, et qui consistaient en un petit

nombre de phyllites des collines de Stradella, de l'Astésan, de la Morra et de Superga, par les recherches que fit ensuite M. le Prof. A. Sismonda dans la Savoie et dans les environs de Guarène, et par celles que je fis moi-même dans plusieurs endroits du Piémont, ainsi que par la communication bienveillante d'une très-belle série de phyllites de la colline de Turin, et de quelques localités de l'Apennin ligurien, telles que Bagnasque, Cadibona, Stella, etc., qui m'a été faite par M. l'Av. Barthélemy Gastaldi, les matériaux, disais-je, se sont de beaucoup augmentés, et avec les matériaux se sont augmentées les difficultés de la détermination des espèces. Malgré tout cela, j'ai aujourd'hui la satisfaction de pouvoir présenter à l'Académie le prodrome de mon travail.

Dans ce premier essai je me propose de faire seulement connaître, d'une manière générale, la nature de la végétation tertiaire de notre pays, et de prendre date sur la publication de quelques espèces nouvelles que j'y ai reconnues. Je me borne, par conséquent, à donner un tableau méthodique des espèces, et à tracer la diagnose de celles que je crois encore inconnues.

TABLEAU MÉTHODIQUE DES ESPÈCES

ESPÈCE	SYNONYMIE PRINCIPALE	AGE ET LOCALITÉ				
		T. éocène ou nummulitique	T. miocène inférieur ou nummulit.e supérieur	T. miocène moyen	T. miocène supérieur	T. pliocène
Classis 1.a CRYPTOGAMAE.						
Ordo FUNGI.						
Fam. PYRENOMYCETES.						
Gen. RHYTISMA Fries.						
Rhytisma maculiferum Heer	*Xilomites maculifer* Heer ....,	.....	Bagnasque.			
Lenzites Gastaldii Heer	.....	.....	.....	Turin.		
Ordo ALGAE.						
Fam. FUCACEAE.						
Gen. CYSTOSEIRITES Sternb.						
Cystoseirites communis Ung.	.....	.....	.....	Turin.		
— *gigantea?* E. Sism.	.....	Mezzano dans la vallée de la Trebbia.				
Gen. CHONDRITES Sternb.						
Chondrites Targionii Sternb.	*Fucoides Targionii* Brong.	Mezzano, Trebbia.				
— *furcatus* Sternb.	— *furcatus* Brong.	St-Remo.				
— *arbuscula* Fischer-Ooster	.....	St-Remo	Cocconato, vallée du Po; Tortone.			
Ordo FILICES.						
Fam. POLYPODIACEAE.						
Gen. LASTRAEA.						
Lastraea stiriaca Beer	*Polypodites stiriacus* Ung.	.....	Bagnasque; Stella	Sarzanello.		
Gen. ASPIDIUM Sw.						
Aspidium pulchellum Heer	.....	.....	.....	.....	Guarene.	
— *Fischeri* Heer	*Lastraea Fischeri* Heer	.....	Cadibona.			
— *dalmaticum* Heer	*Goniopteris dalmatica* Al. Braun.	.....	Thônens (Savoie).			

Gen. PTERIS Sw.					
Pteris inaequalis HEER	.....	.....	Stella.		
Gen. PHYSAGENIA.					
Physagenia Parlatorii HEER	.....	.....	Bagnasque.		
Ordo CALAMARIAE.					
Fam. EQUISETACEAE.					
Gen. EQUISETUM LINN.					
Equisetum .....sp.....	.....	.....	.....	.. ..	Guarene.
Classis 2.ª PHANEROGAMAE.					
Sub-Classis 1.ª GYMNOSPERMAE.					
Ordo CONIFERAE.					
Fam. CUPRESSINEAE.					
Gen. GLYPTOSTROBUS ENDL.					
Glyptostrobus europaeus HEER	*Taxodium europaeum* BRONGN...	....	.....	Sarzanello.	
..... var. *Ungeri* HEER	*Glyptostrobus oeningensis* UNG. (non BRAUN.)	.....	Bagnasque.		
Gen. CALLITRITES ENDL.					
Callitrites Brongniarti ENDL.	*Thuites callitrina* UNG.	.....	.....	Turin.	
Gen. THUIA LINN.					
Thuia Göpperti E. SISM.	.....	.....	.....	.....	Guarene.
Fam. ABIETINEAE.					
Gen. SEQUOIA ENDL.					
Sequoia Langsdorfii HEER	*Taxites Langsdorfii* BRONGN. ...	.....	.....	Sarzanello.	
Gen. ARAUCARITES STERNB.					
Araucarites Sternbergi GÖPP.	.....	.....	.....	Turin.	
Gen. PINUS LINN.					
Pinus palaeostrobus ETTING.	(*Pinites*)	.....	.....	Turin.	
— *oceanines* UNG.	(*Pinites*)	... .	.....	Turin.	
— *Lardyana* HEER	.....	.....	.....	Turin.	
— *austriaca* UNG.?	.....	.....	.....	Turin.	
— *Massalongi* E. SISM.	*Pinus Haidingeri* UNGER see. GAUDIN.	.....	.....	.....	Chieri.

ESPÈCE	SYNONYMIE PRINCIPALE	AGE ET LOCALITÉ				
		T. éocène ou nummulitique	T. miocène inférieur ou nummulit.e supérieur	T. miocène moyen	T. miocène supérieur	T. pliocène
Pinus taedaeformis? UNG.				Turin.		
— *Abies?* LINN.						Astésan.
— *Ettingshauseni* E. SISM.				Turin.		
— .....sp. ind. (amentum masc.).				Turin.		
— .....sp. ind. (squama divis. *Picea*)					Guarene.	
Fam. GNETACEAE.						
Gen. EPHEDRITES UNG.						
Ephedrites Sotzkianus UNG.				Turin.		
Sub-Classis 2.ª MONOCOTYLEDONEAE.						
Ordo GLUMACEAE.						
Fam. GRAMINEAE.						
Gen. ARUNDO LINN.						
Arundo Göpperti HEER	(*Culmites*)		Thônens (Savoie).			
Gen. PHRAGMITES TRIN.						
Phragmites oeningensis Al. BRAUN.	(*Culmites Göpperti* MUNST)			Turin	Guarene.	
Gen. POACITES BRONGN.						
Poacites .....spec. indet.				Turin.		
Fam. CYPERACEAE.						
Gen. CYPERUS LINN.						
Cyperus Chavannesi HEER			Bagnasque.			
— *Deucalionis?* HEER			Bagnasque.			
— *reticulatus* HEER			Stella; S. Justine.			
Gen. CYPERITES LINDL. et HUTT.						
Cyperites macrophyllus E. SISM.					Morra.	
— *gracillimus* E. SISM.				Turin.		
— *angustissimus* A. BRAUN.				Turin.		

Ordo PALMAE.					
DIVIS. PINNATAE.					
Gen. PHOENICITES BRONGN.					
Phoenicites Pallaviciaii E. SISM.	.....	.....	Cadibona.		
Ordo SPADICIFLORAE.					
Fam. TYPHACEAE.					
Gen. SPARGANIUM LINN.					
Sparganium valdense HEER	.....	.....	Stella.		
Ordo FLUVIALES.					
Fam. NAJADEAE.					
Gen. ZOSTERITES BRONGN.					
Zosterites marina UNG.	.....	.....	.....	Turin.	
Gen. CAULINITES BRONGN.					
Caulinites dubius HEER	.....	.....	.....	Turin.	
Sub-Clas. 3.ª DICOTYLEDONEAE.					
Ordo ITEOIDEAE.					
Fam. BALSAMIFLUAE.					
Gen. LIQUIDAMBAR LINN.					
Liquidambar europaeum Al. BRAUN...	.....	.....	.....	Sarzanello.	Guarene.
Fam. SALICINEAE.					
Gen. POPULUS LINN.					
Populus balsamoides GÖPP.....	*P. crenulata* HEER - *P. emarginata* GÖPP. - *P. eximia* GÖPP.	.....	.....	.....	Guarene et Piobesi.
— *leucophylla* UNG.	.....	.....	.....	Sarzanello	
— *Leuce* UNG.	*Phyllites Leuce* ROSSM.	.....	Stella.		
Gen. SALIX LINN.					
Salix macrophylla HEER	.....	.....	Bagnasque.		
— *denticulata* HEER	.....	.....	.....	.....	Guarene.

ESPÈCE	SYNONYMIE PRINCIPALE	AGE ET LOCALITÉ				
		T. éocène ou nummulitique	T. miocène inférieur ou nummulit.e supérieur	T. miocène moyen	T. miocène supérieur	T. pliocène
Ordo AMENTACEAE.						
Fam. MYRICEAE.						
Gen. MYRICA Linn.						
Myrica Studeri Heer	*Myrica integrifolia* Heer (non Unger)				Stradella.	
— *Merloi* E. Sism.					Guareoe.	
Fam. BETULACEAE.						
Gen. ALNUS Holl.						
Alnus Kefersteinii Heer	*Alnites Kefersteinii* Göpp.		Bagnasque		Guarene.	
— *nostratum* Ung.					Guarene.	
— *gracilis* Ung.				Turin.		
Gen. BETULA Linn.						
Betula denticulata Göpp.				Sarzanello.		
Fam. CUPULIFERAE.						
Gen. CARPINUS Linn.						
Carpinus grandis Ung.	*Betula carpinoides* Göpp.			Turin.		
— *pyramidalis* Heer	*Ulmus pyramidalis* Göpp.			Sarzanello.		
Geo. CORYLUS Linn.						
Corylus Heeri E. Sism.					Guarene; S. Damien.	
— *gigas* E. Sism.					Morra.	
Gen. QUERCUS Linn.						
Quercus chlorophylla Ung.				Turin	Piobesi.	
— *myrtilloides* Ung.	*Myrica antiqua* Etting.				Guarene.	
— *argute-serrata* Heer					Guareue.	
— *Lonchitis* Ung.				Turin.		
— *furcinervis* Ung.	*Phyllites furcinervis* Rossm.		Bagnasque			
— *undulata* Web.					Guarene.	
— *pseudo-Castanea* Göpp.					Guarene et Piobesi.	
— *Brongniarti* E. Sism.					Morra.	

Quercus Capellinii GAUD.				Sarzanello.		
— *Charpentieri* GAUD.				Sarzanello.		
— *Drymeja* UNG.					Guarene.	
— *neriifolia* A. BRAUN					Guarene.	
— *Gastaldii* HEER				Turin.		
Gen. FAGUS TOURN.						
Fagus Deucalionis UNG.					Guarene.	
— *castaneaefolia* UNG.				Turin ...	Guarene.	
— *attenuata* GÖPP.				Sarzanello.		
Gen. CASTANEA TOURN.						
Castanea Kubinyi KOW.				Turin et Sarzanello.		
— *atavia?* UNG.					Guarene.	
Fam. ULMACEAE.						
Gen ULMUS LINN.						
Ulmus Braunii HEER					Guarene.	
— *Bronnii* UNG.					Guarene.	
Gen. PLANERA WILD.						
Planera Ungeri ETTING.	*Zelcova Ungeri* KOW.			Sarzanello.	Guarene	Asiésan.
Fam. MOREAE.						
Gen. FICUS TOURN.						
Ficus lanceolata HEER	*Apocynophyllum lanceolatum* O. WEB.			Turin ...	Stradella.	
— *Sarzanella* GAUD.				Sarzanello.		
— *tiliaefolia* HEER					Guarene.	
— *panduraeformis* E. SISM.					Guarene.	
Fam. PLATANEAE.						
Gen. PLATANUS LINN.	*P. Oeynhausiana* GÖPP. - *P. rugosa* GÖPP. - *P. Guillelmae* GÖPP. - *P. cuneiflora* GÖPP. - *Quercus platanoides* GÖPP. - *Q. rotundata* GÖPP.					
Platanus aceroides GÖPP.				Sarzanello.	Guarene et Stradella.	
Ordo PROTEINAE.						
Fam. LAURINEAE.						
Gen. LAURUS LINN.						
Laurus obovata O. WEB.				Turin.		
— *primigenia* UNG.			Cosseria et Stella.			
— *princeps* HEER	*Laurus primigenia* O. WEB. (non UNG.)			Sarzanello.	Guarene.	

ESPÈCE	SYNONYMIE PRINCIPALE	AGE ET LOCALITÉ				
		T. éocène ou nummulitique	T. miocène inférieur ou nummulit.e supérieur	T. miocène moyen	T. miocène supérieur	T. pliocène
Laurus Swoszowiciana UNG.			Bagnasque.			
— *phoeboides* ETTING.				Turin.		
Gen. OREODAPHNE.						
Oreodaphne Heeri GAUD.				Sarzanello	Guarene.	
Gen. BENZOIN NEES ab ESENB.						
Benzoin attenuatum HEER					Guarene.	
Gen. SASSAFRAS NEES ab ESENB.						
Sassafras Ferrettianum MASSAL.	*Laurus Ferrettiana* MASS.				Piobesi; Guarene.	
Gen. CINNAMOMUM BURN.						
Cinnamomum Rossmaesleri HEER	*Phyllites Cinnamomum* ROSSM.			Ceva.		
— *Scheuchzeri* HEER				Turin et Sarzanello.		
— *lanceolatum* HEER	*Daphnogene lanceolata* UNG.			Turin.		
— *polymorphum* HEER	*Ceanothus polymorphus* BRAUN.			Turin	Guarene.	
— *Buchi* HEER	*Daphnogene Buchi* HEER			Turin.		
— *spectabile* HEER			Stella.			
Gen. DAPHNOGENE UNG.						
Daphnogene Gastaldii E. SISM.					Guarene.	
Fam. PROTEACEAE.						
Gen. BANKSIA L.						
Banksia longifolia HEER, var. *haering.*				Turin.		
Gen. DRYANDROIDES UNG.						
Dryandroides laevigata HEER			Nuceto.			
— *banksiaefolia* HEER	*Myrica banksiaefolia* UNG.		Bagnasque.			
— *lignitum* ETTING.	*Quercus lignitum* UNG.		Bagnasque	Turin.		
— .....sp. indet.				Turin.		
Ordo BICORNES.						
Fam. ERICACEAE.						
Gen. ANDROMEDA LINN.						
Andromeda protogaea UNG.				Turin et Sarzanello.		

Gen. VACCINIUM Linn.					
Vaccinium acheronticum Ung.	.....	.....	.....	.....	Guarene.
Ordo STYRACINAE.					
Fam. EBENACEAE.					
Gen. DIOSPYROS Linn.					
Diospyros brachysepala A. Braun. ...	.....	.....	.....	Turin ...	Guarene.
— *pannonica* Etting.	.....	.....	.....	Turin.	
Fam. SAPOTACEAE.					
Gen. SAPOTACITES Etting.					
Sapotacites minor Etting.	*Pyrus minor* Ung.	.....	.....	Turin et Sarzanello.	
Gen. LABATIA Mart.					
Labatia salicites Wess.	.....	.....	.....	Turin.	
Ordo CONTORTAE.					
Fam. APOCYNEAE.					
Gen. APOCYNOPHYLLUM Ung.					
Apocynophyllum helveticum Heer	.....	.....	Nuceto.		
Ordo RUBIACINAE.					
Fam. RUBIACEAE.					
Gen. GARDENIA Ellis.					
Gardenia Braunii Heer	.....	.....	.....	Turin.	
Gen. ECHITONIUM Ung.					
Echitonium Sophiae O. Web.	.....	.....	.....	Ceva.	
Ordo UMBELLIFLORAE.					
Fam. ARALIACEAE.					
Gen. HEDERA Linn.					
Hedera Strozzii Gaud.	.....	.....	.....	Sarzanello.	
Ordo POLYCARPICAE.					
Fam. MAGNOLIACEAE.					
Gen. LIRIODENDRON Linn.					
Liriodendron Procaccinii? Ung.....	.....	.....	.....	.....	Stradella.

ESPÈCE	SYNONYMIE PRINCIPALE	AGE ET LOCALITÉ				
		T. éocène ou nummulitique	T. miocène inferieur ou nummulit.e supérieur	T. miocène moyen	T. miocène superieur	T. pliocène
Ordo CALYCIFLORAE.						
Fam. COMBRETACEAE.						
Gen. TERMINALIA Linn.*						
Terminalia radobojensis Ung.	.....	.....	.....	.....	Guarene.	
Ordo MYRTIFLORAE.						
Fam. MYRTACEAE.						
Gen. EUGENIA Micb.						
Eugenia Haeringiana Ung.	....	.....	.....	Turin.		
— *Aizoon* Ung.....	.....	.....	.....	.....	Guarene.	
Gen. EUCALYPTUS Herit.						
Eucalyptus oceanica Ung.	.....	.....	.....	Turin.		
— *Haeringiana* Etting.	.....	.....	.....	Ceva.		
Ordo COLUMNIFERAE.						
Fam. BUTTNERIACEAE.						
Gen. DOMBEYOPSIS Ung.						
Dombeyopsis Phylirae Etting.....	.....	.....	.....	Turin.		
Fam. TILIACEAE.						
Gen. GREWIA Juss.						
Grewia crenata Heer	*Dombeyopsis crenata* Ung.	.....	Bagnasque.			
Ordo ACERA.						
Fam. ACERINEAE.						
Gen. ACER Linn.						
Acer trilobatum A. Braun	*Phyllites trilobatus* Sternb.	.....	.....	.....	Piobesi.	

Fam. SAPINDACEAE.					
Gen. SAPINDUS Linn.					
Sapindus falcifolius A. Braun.	.....	.....	.....	Turin ...	Guarene.
— *Hazslinszkyi* Etting.	.....	.....	.....	.....	Guarene.
Ordo FRANGULACEAE.					
Fam. CELASTRINEAE.					
Gen. CELASTRUS Kuntn.					
Celastrus Capellinii Heer	.....	.....	.....	Sarzanello.	
— *pedemontana* Heer	.....	.....	Cadibona.		
— *Heeri* E. Sism.	.....	.....	.....	.....	Guarene.
— *Ungeri* E. Sism.	.....	.....	.....	Turin.	
Fam. ILICINEAE.					
Gen. ILEX Linn.					
Ilex? longifolia Heer	.....	.....	Bagnasque.		
Fam. RHAMNEAE.					
Gen. RHAMNUS Juss.					
Rhamnus Eridani Ung.	.....	.....	Bagnasque	.....	Guarene.
— *acuminatifolius* O. Web.	.....	.....	.....	.....	Guarene.
— *Decheni* O. Web.	.....	.....	.....	.....	Guarene.
— *Rassmaessleri* Ung.	*Phyllites rhamnaides* Rossm. ...	.....	Bagnasque	.....	Guarene et Piobesi.
— *ducalis* Gaud.	.....	.....	.....	Sarzanello.	
— *Gaudini??* Heer	.....	.....	Bagnasque.		
Gen. PALIURUS Tour.					
Paliurus Sismondanus Heer	.....	.....	Bagnasque.		
Gen. BERCHEMIA Neck.					
Berchemia multinervis Heer	*Karwinskia multinervis* A. Braun	.....	.....	Sarzanello.	Guarene.
Ordo THEREBINTHINEAE.					
Fam. JUGLANDEAE.					
Gen. JUGLANS Linn.					
Juglans Nux-taurinensis Ad. Brongn..	*Juglandites Nux-taurinensis* Stern.	.....	.....	.....	Morra.

ESPECE	SYNONYMIE PRINCIPALE	AGE ET LOCALITÉ				
		T. éocène ou nummulitique	T. miocène inferieur ou nummulit.e supérieur	T. miocène moyen	T. miocène supérieur	T. pliocène
Juglans minor STERNB.			Belforte.			
— *acuminata* A. BRAUN.				Turin et Sarzanello.	Guarene.	
— *bilinica* UNG.	*Phyllites juglandiformis* STERNB..		Bagnasque	Sarzanello.		
Gen. PTEROCARYA.						
Pterocarya Massalongi GAUD.				Sarzanello.	Guarene.	
Gen. ENGELHARDTIA.						
Engelhardtia producta HEER	*Carpinus producta* UNG. / *Engelhardtia Sotzkiana* ETTING.			Turin.		
Ordo LEGUMINOSAE.						
Fam. PAPILIONACEAE.						
Gen. GLEDITSCHIA LINN.						
Gleditschia Wesselii WEB.					Guarene.	
Gen. CAESALPINIA LINN.						
Caesalpinia Falconeri HEER					Guarene.	
Gen. CASSIA LINN.						
Cassia hyperborea UNG.				Turin.		
— *phaseolites?* UNG.					Guarene.	
Gen. DALBERGIA ROXB.						
Dalbergia retusaefolia HEER				Turin.		
— *bella* HEER					Guarene.	
Gen. COLUTEA LINN.						
Colutea Salteri HEER					Guarene.	
Incertae sedis.						
Phyllites reticulatus HEER			Bagnasque.			
— *De-Visianii* E. SISM.					Guarene.	
Folliculites Kaltennordheimensis ZENK..			Cadibona.			

ESPÈCES NOUVELLES OU INÉDITES.

1. Lenzites Gastaldii Heer.

Tab. I, fig 1-2.

L. pileo coriaceo, magno, evidenter zonato, lamellis validis, confertis.

Ce champignon, dont M.r le Professeur Heer a fait la dédicace à M.r l'Av. Gastaldi, qui le premier l'a trouvé appliqué sur un morceau de bois fossile de la colline de Turin, présente des demi-chapeaux fossiles, de la longueur de quatre pouces et de la largeur d'un pouce et demi. La partie supérieure est partagée en plusieurs zones voisines l'une de l'autre et couvertes de poils; la partie inférieure est lamelleuse, et ses lamelles sont coriaces, robustes, ordinairement ramifiées.

Cette espèce fossile a beaucoup de rapport avec le *Lenzites betulina* Fries, que l'on trouve sur le tronc de plusieurs arbres à des latitudes fort différentes, c'est-à-dire dans des régions boréales, tempérées et chaudes (Guinée).

Foss. dans le terrain miocénique moyen de la colline de Turin.

2. Thuia Göpperti E. Sism.

Tab. III. fig. 5-6.

T. foliis verticillatis, quadrifariam imbricatis, squamaeformibus, adnato-adpressis, carinatis, convexis.

Je me hâte d'avouer que cette nouvelle Conifère présente beaucoup d'analogie avec le *Thuia Saviana* de Massa marittima, décrite par M.r Gaudin dans son 3.ème Mémoire *Contributions à la Flore fossile italienne* pag. 12, pl. I, fig. 4-20 et pl. II, fig. 6-7; mais je m'empresse en même temps de dire, qu'un examen attentif fait voir des différences assez fortes pour en autoriser la séparation.

Notre espèce et le *Thuia Saviana* ont en commun la disposition verticillée et la carène des feuilles, caractères qui expliquent l'apparente

identité de physionomie qui existe entre les deux espèces; mais le *Thuia Göpperti* se distingue pour avoir les folioles du milieu moins obtuses à leur extrémité libre, dépassant de plus le niveau des deux feuilles latérales, pour avoir ces folioles plus prolongées et plus aiguës en bas, enfin pour avoir les feuilles latérales plus régulièrement convexes, ce qui donne à chaque nœud une figure ovoïde et moins échancrée que dans le *Thuia Saviana*.

Foss. dans le terr. mioc. sup. de Guarene.

3. Pinus Massalongi E. Sism.

Tab. I, fig. 7-8.

P. strobilis ovatis, mill. 70 *longis*, 38 *latis*, *squamis rhomboidalibus*, *transverse carinatis*, *tuberculosis*, *radiato-striatis*.

Les cônes du *Pinus Massalongi* se présentent sous une forme ovoïde avec la base un peu plus large que le sommet. La partie conservée par la fossilisation donne soixante et dix mill. de longueur et trente-huit de largeur; malgré ces chiffres, on ne peut pas fixer au juste le rapport entre les deux diamètres du cône, car le sommet est incomplet.

Les écailles sont d'une figure presque rhomboïdale et disposées de façon qu'un angle obtus représente l'extrémité libre de chaque écaille, et l'angle obtus correspondant se perd dans le pétiole. Leur surface externe est traversée par une carène aiguë, bombée au milieu, parsemée de petits bourrelets, et couverte de stries irrégulières, qui paraissent rayonner du centre vers la périphérie.

Deux individus seulement de cette espèce ont été trouvés jusqu'à présent, et ils l'ont été dans les marnes miocéniques supérieures des environs de Chieri. L'un d'eux, qui fait partie de la collection de l'Institut technique de Turin, a été mentionné et figuré par M.r Gaudin dans son ouvrage *Mémoire sur quelques gisements de feuilles fossiles de la Toscane* (Zurich, 1858), et ce savant Naturaliste, non sans en avoir signalé les différences, l'a rapporté au *Pinus Haidingeri*, décrit et figuré par Unger dans sa *Chloris protogea*, pag. 73, pl. XIX, fig. 9-11; mais avec M.r le Prof. Massalongo nous sommes persuadés qu'il s'agit d'une espèce nouvelle.

Foss. dans les marnes mioc. sup. des environs de Chieri.

4. Pinus Ettingshauseni E. Sism.

Tab. III, fig. 1-2.

P. foliis geminis, latis, carinatis, apice sejuncto.

Feuilles réunies deux à deux, dépassant la largeur ordinaire des feuilles de ce Genre, carénées dans toute leur longueur, et avec le sommet un peu fendu.

Ces caractères rapprochent beaucoup notre espèce du *P. Lepios* Ung. (*Pinites*), mais elle en diffère par la carène des feuilles, qui manque dans l'espèce de Unger. Ils la rapprochent aussi du *P. Hampeana* Göpp. (*Pinites*), dont les feuilles sont également carénées, mais beaucoup moins larges.

Foss. dans le terr. mioc. moyen de la colline de Turin.

5. Pinus ..... sp..... *(amentum masculinum).*

Tab. III, fig. 3.

Fleur mâle d'une espèce indéterminable de Pin et, peut-être, d'une de celles que l'on trouve dans le même gisement, sans que cependant on puisse l'assurer.

Foss. dans le terr. mioc. moyen de la colline de Turin.

6. Pinus ..... sp..... *(squama strobili).*

Tab. III, fig. 4.

Ecaille d'un cône de Pin, de la division des *Picea* L.

Foss. dans le terr. mioc. sup. de Gnarene.

7. Cyperites gracillimus E. Sism.

Tab. 1, fig. 3-4.

C. foliis augustissimis, margine revolutis, vix 1 *mill. latis, medio carinatis, utrinque nervis* 8-9 *confertis.*

Ce sont des faisceaux de petites feuilles linéaires à bords fort recourbés et traversées dans toute leur longueur par une carène très-saillante, de

façon à représenter comme deux demi-cylindres creux soudés à côté l'un de l'autre.

Les nervures latérales semblent au nombre de huit ou neuf de chaque côté, et sont très-resserrées.

D'abord, on pourrait voir de l'affinité entre cette espèce et le *Cyp. paucinervis;* mais un examen un peu attentif montre bientôt que, dans le *Cyp. gracillimus*, les bords sont plus recourbés, la carène plus saillante et les nervures latérales plus nombreuses. Au reste, nous le disons une fois pour toutes, il ne faut pas attacher aux divisions spécifiques établies sur de simples empreintes fossiles l'importance et la valeur des espèces faites par les Botanistes, qui s'occupent de la Flore actuelle, et établies ordinairement sur un grand nombre d'individus complets, et dont, par conséquent, on peut étudier tous les organes dans les différentes phases de végétation.

Foss. dans le terr. mioc. moyen de la colline de Turin.

8. Cyperites macrophyllus E. Sism.

Tab. I, fig. 5-6.

C. foliis 26 mill. latis, medio carinatis, utrinque multinervosis, nervis veluti in series linea prominula distinctas dispositis.

Je distingue cette espèce par le nom de *macrophyllus* pour signaler la largeur de ses feuilles, qui surpasse celle de la plupart des espèces congénères connues. La portion que je possède, et qui ne représente point la partie la plus large, parcequ'elle appartient au sommet de la feuille, a cependant 26 millimètres de largeur. La nervure médiane ne forme point, eu égard aux grandes dimensions du limbe, une carène fort prononcée, mais elle y est assez visible; les nervures latérales sont très-nombreuses, fines, convergentes vers le sommet de la feuille, et partagées, pour ainsi dire, en huit séries par des plis longitudinaux, qui marchent tous droit sans faire aucune convergence vers le sommet, et qui par conséquent coupent les véritables nervures à commencer du point où commence la convergence de celles-ci.

Le *Cyperites macrophyllus*, soit pour la grandeur des feuilles, soit pour la multiplicité des nervures latérales, tient beaucoup du *Cyperus Chavannesi*, décrit par M.r Heer dans la *Flora tertiaria Helvetiae*; il s'en distingue cependant, parceque ses nervures sont toutes homogènes,

et quoiqu'elles soient partagées en plusieurs séries par des lignes plus saillantes, ces lignes ne sont point représentées par des nervures plus fortes, comme l'on voit dans le *C. Chavannesi*, mais par de simples plis, qui n'ont rien de commun avec les nervures. Ajoutez que dans notre espèce manquent les filets transversaux, qui forment dans les feuilles du *C. Chavannesi* une élégante réticulation à mailles rectangulaires.

Foss. dans le terr. mioc. supérieur de la Morra.

9. Phoenicites Pallavicinii E. Sism.

Tab. IV.

Ph. foliis pinnatis, pinnis subpetiolatis, alteris oppositis, alteris alternis, flabellatis, undique papillis rugisve exasperatis, nervo medio validiori, nervis longitudinalibus parallelis, crebris, rhachide crassa, cylindrica?

Ce palmier, que j'ai déjà fait connaître à l'Académie dans la séance du 2 janvier de cette année, est une pièce magnifique, soit sous l'aspect de la conservation, soit par rapport à sa grande taille. L'individu que nous avons à décrire, n'est qu'une petite portion de feuille, mais il donne cependant un mètre et demi de longueur sur soixante et dix centimètres de largeur. Il a été découvert dans les argiles qui forment le toit de la mine de lignite de Cadibona, et on en doit l'extraction aux soins intelligents de l'Ingénieur M.r Cheviller, et du Chef-mineur de la même mine M.r Serre.

Le Marquis A. Pallavicini, propriétaire de la mine, en fit cadeau à l'Institut technique de Turin; dès lors on tâcha de le classer et de le déterminer. Dans ce but, M.r l'Av. Gastaldi (1) en fit tirer une petite photographie, qu'il s'empressa de soumettre au jugement du Prof. Heer. Le savant phytographe de Zurich, jugeant l'espèce d'après cette petite et très-obscure photographie, la rapporta, avec des doutes cependant, au *Phoenicites salicifolia* Ung. (*Cycadites salicifolia* Sternb.). Mais le même Prof. Heer, aussitôt qu'il eut examiné le grand dessin du palmier de Cadibona, que nous avons fait tirer, et où l'on voit cette belle feuille réduite à la moitié seulement de ses dimensions naturelles, s'aperçut tout de suite des différences qui existent entre ce palmier

(1) Gastaldi: *Cenni sui vertebrati fossili del Piemonte*; pag. 61.

et le *Phoenicites salicifolia* Ung., et y reconnut avec nous le type d'une espèce nouvelle. De cette espèce je me plais à faire hommage au Marquis A. Pallavicini, qui est le propriétaire de la mine de lignite de Cadibona, dans laquelle l'empreinte a été trouvée, et qui, à plusieurs égards, a bien mérité de la patrie.

Le *Phoenicites Pallavicinii* est caractérisé par des pinnules longues, étroites (linéaires), graminées, carénées, c'est-à-dire avec une nervure médiane assez saillante, disposées en éventail, un peu rétrécies à la base, presque pétiolées, et couvertes sur toute leur longueur d'une sorte de granulation fine, qui leur donne un aspect chagriné. Cette granulation n'est point parfaitement homogène; car, avec la loupe, on s'aperçoit qu'aux grains sont mêlés de petits plis, ou mieux, que les grains ou papilles sont tantôt rondes, tantôt allongées. La forme des pinnules, que nous avons dit être longues, étroites, graminées, sub-pétiolées, suffit pour faire distinguer cette espèce du *Ph. salicifolia* Ung., comme leur granulation suffit pour l'éloigner de toutes les espèces connues de ce genre. Le rachis paraît subcylindrique; mais il se pourrait que la fossilisation en eût effacé les angles.

Foss. dans les argiles mioc. infér. de Cadibona.

10. Myrica merloi E. Sism.

Tab. III, fig. 10-11.

M. foliis coriaceis, spathulatis; basi petiolato-attenuata; margine apicem versus dentato, dentibus obtusiusculis; nervis secundariis camptodromis.

Feuille évidemment coriace, arrondie au sommet et atténuée à la base, ce qui lui donne une forme presque spatulée; bord orné de dents obtuses et irrégulières sur la moitié supérieure, parfaitement entier sur la moitié inférieure; nervures secondaires camptodromes; autres nervures très-fines et formant une élégante réticulation.

Parmi les caractères que je viens d'assigner à cette nouvelle espèce de *Myrica*, il y en a plusieurs qui sont communs à la *M. deperdita* Ung., tels que la nature coriace du tissu, l'atténuation de la base et les dentelures bornées à la moitié supérieure du bord. Cependant malgré ces points de rapport, on pourra toujours aisément distinguer notre espèce de la *M. deperdita*, en remarquant que celle-là a le sommet beaucoup

plus arrondi, les nervures secondaires plus nombreuses et surtout camptodromes, tandis que dans la *M. deperdita* elles sont craspidédromes.

Je dédie cette espèce à M.r l'Abbé Anselme Merlo, qui m'a beaucoup aidé dans la recherche des Phyllites des gypses de Guarene, où il demeure habituellement, et je saisis avec plaisir cette occasion pour lui témoigner ma vive reconnaissance.

Foss. dans le terr. mioc. sup. de Guarene.

11. Corylus Heeri E. Sism.

Tab. II, fig. 1.

C. foliis rotundatis, apice obtusis, duplicato dentatis, dentibus parvulis, obtusiusculis.

Au premier abord, en examinant cette espèce, on croit avoir affaire au *Corylus Avellana*; mais un examen un peu attentif fait voir des différences assez importantes et qui en justifient suffisamment la séparation.

Les feuilles du *C. Heeri* sont des feuilles larges, presque rondes, tronquées au sommet, et avec de petites dents émoussées sur le bord; nervure médiane très-prononcée, nervures secondaires aussi assez fortes; quelques nervures tertiaires par-ci par-là, courbées. D'après ces caractères, on voit que, malgré l'analogie que nous avons déjà avouée entre cette nouvelle espèce et le *C. Avellana*, on pourra la distinguer en rappelant que les feuilles du *C. Avellana* sont moins larges, sont cordiformes, ont un sommet aigu, et le bord à double dentelure et à dents aiguës.

Foss. dans le terr. mioc. sup. de Guarene et de S.t-Damien.

12. Corylus gigas E. Sism.

Tab, II, fig. 2.

C. foliis magnis, rotundatis, apice obtusis?

Complétant avec l'imagination cette phyllite, on obtient une feuille qui dépasse toutes les limites atteintes par les espèces connues de ce Genre; cette considération de la largeur extraordinaire de la feuille, jointe à son *facies* tout à fait particulier, qui ressort clairement de la comparaison que l'on peut faire très-aisément de sa figure (Tab. II. fig. 2) avec celle

du *C. Heeri* (tab. II. fig. 1), m'a engagé à l'envisager comme une espèce nouvelle, et à la distinguer par l'épithète qui en indique le caractère principal.

Foss. dans le terr. mioc. sup. de la Morra.

13. Quercus Brongniarti E. Sism.

Tab. I, fig. 9.

Q. foliis coriaceis, obovato-lanceolatis?, basi attenuatis, petiolatis, margine integerrimo, paullulum revoluto, nervis secundariis angulo acuto secedentibus, simplicibus, vix camptodromis.

L'empreinte lisse et bien marquée, dont il est ici question, atteste une feuille coriace et forte, conditions qui ne sont pas rares dans les Chênes. Une foule de caractères la font considérer comme une espèce nouvelle, mais plus particulièrement sa forme obovale avec le sommet peut-être lancéolé; je dis peut-être, parceque le seul exemplaire que je possède est incomplet, et ce n'est que d'après le *facies* général et l'allure des bords que je suppose que la feuille se terminait à façon de lance. A cette forme obovale-lancéolée il faut ajouter, comme caractères principaux distinctifs de l'espèce, le bord absolument entier, et un peu recourbé, la base fort attennée et se confondant peu à peu dans le pétiole; une nervure médiane de médiocre grosseur; nervures secondaires complètement simples, formant avec la médiane un angle aigu de 42°, droites jusque près du bord, puis légèrement camptodromes.

Ce Chêne, à ce qu'il me semble, se distingue de toutes les espèces fossiles déjà décrites; dans aucune autre on ne trouve que les nervures secondaires forment avec la médiane un angle si aigu; je la dédie à M.r le Prof. Adolphe Brongniart, à qui la phytographie est redevable de tant de progrès.

Foss. dans le terr. mioc. sup. de la Morra.

14. Quercus Gastaldii Heer.

Tab. III, fig. 9.

Q. foliis longis, apice acuminato, basi longe petiolata; nervis secundariis compluribus, subparallelis, craspidodromis; margine versus basim integerrimo, versus apicem denticulato.

Cette nouvelle espèce de *Quercus* a été établie par M.r le Prof. Heer,

qui le premier en eut l'original entre les mains. Elle est caractérisée par des feuilles longues, atténuées aux deux extrémités, particulièrement à l'extrémité libre, qui était, à ce qu'il semble, très-effilée. Ces feuilles sont pourvues d'un long pétiole articulé, et présentent des nervures secondaires nombreuses, presque parallèles, et dont une grande partie, aboutissant aux dents marginales, est craspidédrome, tandis que celles qui se trouvent près de la base se terminent simplement contre le bord, qui dans la partie inférieure de la feuille n'a plus aucune dentelure.

Le *Q. Drymeja* Ung. aurait aussi un pétiole long, le bord entier vers la base, et une partie des nervures secondaires craspidédromes; cependant il n'y aura jamais de difficulté à distinguer l'espèce de M. Heer, dont les nervures secondaires sont beaucoup plus nombreuses, moins repliées vers le sommet, craspidédromes sur une plus longue extension du bord, disposées à angle moins aigu contre la nervure médiane, et dont enfin la dentelure marginale est proportionnellement moins prononcée.

Foss. dans le terr. mioc. moyen de la colline de Turin.

13. Ficus panduraeformis E. Sism.

Tab. III, fig. 12.

F. foliis subellipticis, penninerviis, medio instar panduraе contractis, seu margine profunde uni-excavato, ceteroquin integerrimo; nervis secundariis tenuibus, subrectis, ad marginem usque interdum productis.

J'ai cru un instant que la profonde échancrure que l'on voit sur les bords de cette feuille, et d'où j'ai tiré le nom de *panduraeformis*, n'était qu'une érosion accidentelle faite probablement par quelque insecte, et que par conséquent ladite feuille devait se rapporter à quelques-unes des espèces de Figuier déjà décrites, et avec lesquelles, abstraction faite de l'échancrure sus-mentionnée, elle présente de l'analogie, comme, pour en citer une, avec le *Ficus jynx* Ung., qui est l'espèce qui lui ressemble de plus. Mais un examen sérieux, et à la loupe, fait sur les deux empreintes a démontré, soit à M.r Heer, soit à moi, que le pourtour est intact, qu'il n'a jamais été entamé par des insectes, et que la profonde échancrure marginale, qui donne à la feuille la forme d'une guitare est une échancrure naturelle et symétrique.

Appuyé sur ce caractère, je donne cette phyllite comme une nouvelle

espèce de Figuier, et j'ajoute, comme caractères distinctifs secondaires, une figure presque elliptique, un bord tout-à-fait entier, une base apparemment plus obtuse que le sommet, des nervures secondaires très-minces et qui forment avec la médiane un angle presque droit.

Foss. dans le terr. mioc. sup. de Guarene.

16. Daphnogene Gastaldii E. Sism.

Tab. III, fig. 13.

D. foliis coriaceis, lanceolatis, apice obtusiusculo, margine integerrimo, basi inaequilatera, petiolo crasso, revoluto; nervis secundariis superioribus vix conspicuis.

La nature coriace du tissu, l'intégrité du bord et son *facies* général sont les caractères qui nous engagent à classer cette phyllite dans les Daphnogènes, parmi lesquelles elle doit être considérée comme une espèce nouvelle, grâce particulièrement à sa base large et inéquilatérale, et à son sommet bien prolongé en forme de lance.

Je la dédie à M.r le Chev. Barthélemy Gastaldi, et je le remercie publiquement pour la belle collection de phyllites de la colline de Turin, qu'il a bien voulu mettre à ma disposition, collection qui lui appartenait jadis et qu'il a déposée à l'Institut technique de Turin.

Foss. dans le terr. mioc. sup. de Guarene.

17. Dryandroides Gaudini E. Sism.

Tab. II, fig. 5.

D. foliis coriaceis, longissimis, lineari-ellipticis, in petiolum attenuatis, margine integerrimo, nervis secundariis tenuibus, camptodromis.

Quoique cette feuille soit incomplète, on s'aperçoit facilement qu'elle devait être très-longue, et plus longue probablement que les feuilles du *D. banksiaefolia* avec lequel elle a quelque analogie. Ses principaux caractères sont: pourtour elliptique, bord sans la moindre trace de dentelures, base atténuée et faisant insensiblement passage au pétiole, nervure moyenne de médiocre grosseur, nervures secondaires très-minces, formant avec la moyenne un angle de 65° à 70°, camptodromes, tissu coriace.

Pour la forme elliptique, l'atténuation de la base et quelques autres

caractères, l'espèce que je viens de décrire offre, comme je l'ai signalé plus haut, quelque analogie avec le *D. banksiaefolia*; mais il suffit, pour distinguer l'une de l'autre, de remarquer, que le bord du *D. banksiaefolia* est denté, tandis que dans notre espèce il est complètement entier.

Foss. dans le terr. mioc. moyen de la colline de Turin.

18. Celastrus Capellinii Heer.

Tab. II, fig. 4.

C. foliis petiolatis, ovalibus, basi rotundatis, integerrimis, coriaceis, nervo medio valido, nervis secundariis obsoletis.

Feuilles coriaces, robustes, luisantes, soutenues par un pétiole aussi fort robuste et assez long; bord sans la moindre dentelure, nervure médiane très-prononcée, nerfs secondaires très-fins et sans subdivision ultérieure, voilà les caractères principaux qui séparent cette espèce de ses congénères.

M.r le Prof. Heer, qui le premier eut entre les mains l'original de cette espèce, y reconnut le type d'une espèce nouvelle, qu'il dédia à M.r Capellini, Naturaliste très-zélé, qui l'avait trouvée dans le terrain miocénique supérieur de Sarzanello. Mais M.r le Prof. Heer, dans le but généreux et bienveillant de ne point diminuer les matériaux à mon travail sur les phyllites du Piémont, laissa inédite cette espèce avec plusieurs autres aussi piémontaises, et qu'il avait reçues de l'Avocat Gastaldi ou du D.r Capellini même, et il me donna la faculté de les publier.

Je saisis ici l'occasion de le remercier de ce très-délicat témoignage d'amitié, qu'il a bien voulu me donner, ainsi que de la rare bonté, avec laquelle il a daigné m'aider de ses conseils toutes les fois que je lui ai communiqué quelque doute de classification.

Foss. dans le terr. mioc. sup. de Sarzanello.

19. Celastrus pedemontana Heer.

Tab. II, fig. 3.

C. foliis membranaceis, lanceolatis, basi attenuatis, integerrimis, nervis secundariis angulo acuto secedentibus, subsimplicibus, margine camptodromis.

Cette feuille n'a plus la consistance coriace, qui caractérise l'espèce

précédente; elle est membraneuse, la nervure médiane y est bien prononcée et y fait une forte saillie, les nervures secondaires sont moins fines que dans le *Celastrus Capellinii* et près du bord, qui est parfaitement entier, elles se replient un peu en dedans, et se font camptodromes. On aperçoit encore des traces de nervures tertiaires, mais très-obscures. Le sommet et la base manquent, néanmoins la forme lancéolée de la feuille est évidente.

Par cette forme lancéolée et par d'autres caractères, le *Celastrus pedemontana* se rapproche du *Celastrus elaenus* Ung., mais l'espèce piémontaise pourra aisément en être distinguée à cause de sa base plus allongée et plus rétrécie.

Foss. dans le terr. mioc. inf. de Cadibona.

20. Celastrus Heeri E. Sism.

Tab. III, fig. 7.

C. foliis obovatis, petiolatis, dentatis; nervo medio sinuoso; nervis secundariis longis, secus marginem decurrentibus, e nervo medio angulo acuto secedentibus.

Il n'y a aucune forme parmi les espèces de *Celastrus* connues, à laquelle cette magnifique phyllite puisse se rapporter. C'est donc sans la moindre hésitation que je la déclare une espèce nouvelle. Son *facies* est tout-à-fait singulier, et suffirait à lui seul pour la faire séparer de tous les *Celastrus* déjà décrits. En outre, en abordant les détails de structure de cette feuille, il reste à signaler la direction en *zigzag* de la nervure médiane, la longueur des nervures secondaires, et leur tendance à se porter toutes vers le sommet, cotoyant, pour ainsi dire, le bord, qui à son tour présente aussi dans ses dentelures irrégulières un caractère distinctif de cette espèce, que j'aime à intituler au savant Auteur de la *Flora tertiaria helvetica*, M.r Oswald Heer.

Foss. dans le terr. mioc. sup. de Guarene.

21. Celastrus Ungeri E. Sism.

Tab. III, fig. 8.

C. foliis subfalcato-ellipticis, petiolatis, penninerviis; margine integerrimo, nervo medio debili, nervis secundariis debilissimis, parallelis, versus apicem regulariter convergentibus, subcamptodromis.

On ne saurait trouver dans ce *Celastrus* un caractère exclusif bien saillant, à l'aide duquel on puisse au premier abord le distinguer des autres espèces congénères; mais, avec une comparaison scrupuleuse, on arrive à saisir les modifications d'organisation par lesquelles cette espèce acquit une physionomie tout à fait particulière, qui la distingue des autres *Celastrus* connus.

Examiné dans ses détails, le *C. Ungeri* serait caractérisé par des feuilles coriaces, pétiolées, elliptiques, mais courbées et, pour ainsi dire, falciformes, avec bord entier, nervures faibles, les secondaires parallèles, toutes régulièrement dirigées vers le sommet et presque camptodromes.

Le *Celastrus* qui a plus de ressemblance avec cette nouvelle espèce est le *C. elaenus* Ung.; cependant, pour un œil un peu exercé dans ce genre de comparaisons, il n'y a pas lieu à confusion.

Foss. dans le terr. mioc. moyen de la colline de Turin.

22. Ilex? longifolia Heer.

Tab. II, fig. 6.

I. foliis elongatis, lanceolatis?, coriaceis, nitidis, margine sparsim spinuloso-dentatis, nervo medio valido, nervis secundariis subtilissimis, valde curvatis, camptodromis, areis reticulatis.

C'est avec quelque doute que M.r Heer a rapporté cette espèce au genre *Ilex*; les nervures et les dents sont bien celles de ce genre, mais à cause du mauvais état de conservation du seul individu que nous possédons, il est impossible de vérifier si tous les autres caractères génériques viendraient à l'appui d'une telle classation. Quoi qu'il en soit, la feuille en question est une feuille épaisse, coriace, lisse, assez longue, de forme, à en juger par la partie conservée, lancéolée, et avec le pourtour ça et là garni de petites dents aiguës et en forme d'épines. Nervures secondaires

fort minces, camptodromes ou recourbées en dedans et laissant des espaces remplis d'une élégante réticulation à mailles pentagonales.

Foss. dans le terr. mioc. infér. de Bagnasque.

23. Paliurus Sismondanus Heer.

Tab. II, fig. 7.

P. foliis magnis, membranaceis, ovalibus, integerrimis, vel obsolete crenulatis, tripli vel quintupli-nerviis, nervis acrodromis.

Cette espèce de *Paliurus*, que M.r Heer a voulu me faire l'honneur de distinguer par mon nom, présente de grandes feuilles membraneuses et lisses, traversées par trois ou cinq nervures acrodromes, c'est-à-dire, dont les paires sont parallèles au pourtour et s'étendent de la base jusqu'au sommet. De ces nervures principales, et particulièrement de la nervure médiane, partent en sens horizontal de très-minces fibrilles, qui par leur anastomoses forment de grandes mailles polygonales; base large et arrondie.

Le bord ordinairement un peu ondulé et entier, laisse voir encore sur quelques exemplaires des commencements de dentelures à peine visibles et irrégulièrement gravées sur les deux côtés de la feuille.

Le *Paliurus Sismondanus* a de l'affinité avec le *P. ovoideus* de Göppert, duquel cependant il se distingue par sa figure parfaitement ovale.

Foss. dans le terr. mioc. infér. de Bagnasque.

24. Phyllites reticulatus Heer.

Tab. II, fig. 8.

Ph. foliis coriaceis, nitidis, crenulatis, nervo medio valido, crasso, nervis secundariis subtilissimis, valde ramosis, camptodromis.

C'est une grande feuille lisse, noire, coriace avec la base évidemment méquilatérale. Nervure médiane très-développée en bas, mais filiforme au sommet; nervures secondaires camptodromes, et donnant lieu, par leurs nombreuses divisions et subdivisions, à des aréoles polygonales, dont quelques-unes hexagonales fort élégantes. Pourtour finement crénelé.

Foss. dans le terr. mioc. infér. de Bagnasque.

25. Phyllites De-Visianii E. Sism.

Tab. III, fig. 14.

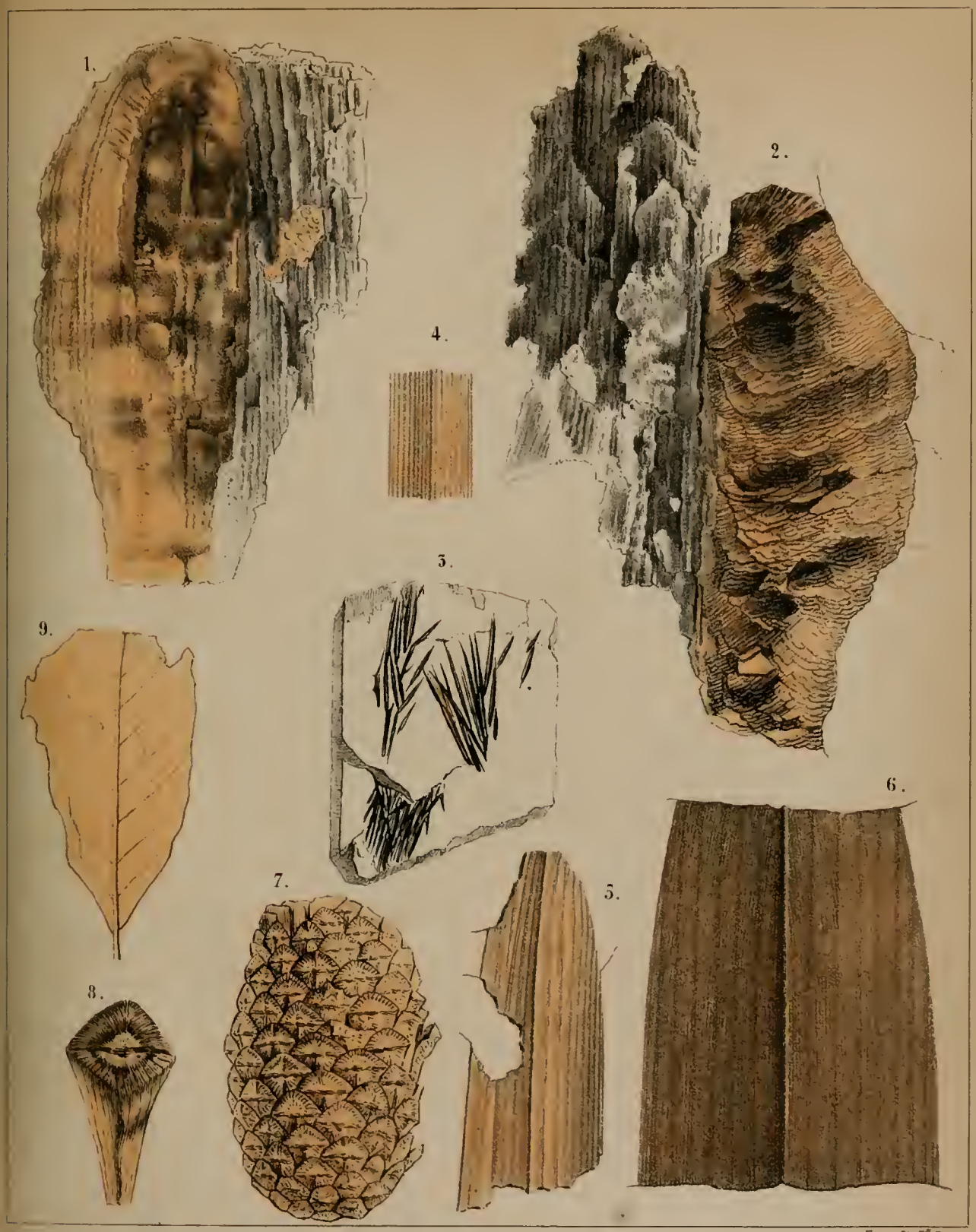
Ph. foliis subreniformibus, petiolatis?, palminerviis, grosse-dentatis; dentibus subaequalibus, obtusis.

Le Genre qui présente quelque forme analogue à cette belle phyllite, c'est le *Populus;* mais l'analogie n'est cependant pas telle que j'ose la ranger parmi les Peupliers, d'autant plus que le seul individu que je possède jusqu'à présent, et qui est celui dessiné à *tab.* III. *fig.* 14, étant réduit à moins de la moitié, laisse des incertitudes sur l'organisation des parties qui manquent.

Jugeant d'après les lois de la symétrie, le pourtour de la phyllite devait être arrondi, subréniforme, et les nervures principales au nombre de trois. Elle portait probablement un pétiole, et dans ce cas il commençait à se dessiner au centre de l'échancrure. Nervures secondaires et tertiaires assez visibles, et presque toutes prolongées jusqu'au bord, sur lequel on voit une dentelure très-prononcée, représentée par des dents inégales, c'est-à-dire plus petites vers la base que vers le sommet.

Foss. dans le terr. mioc. sup. de Guarene.

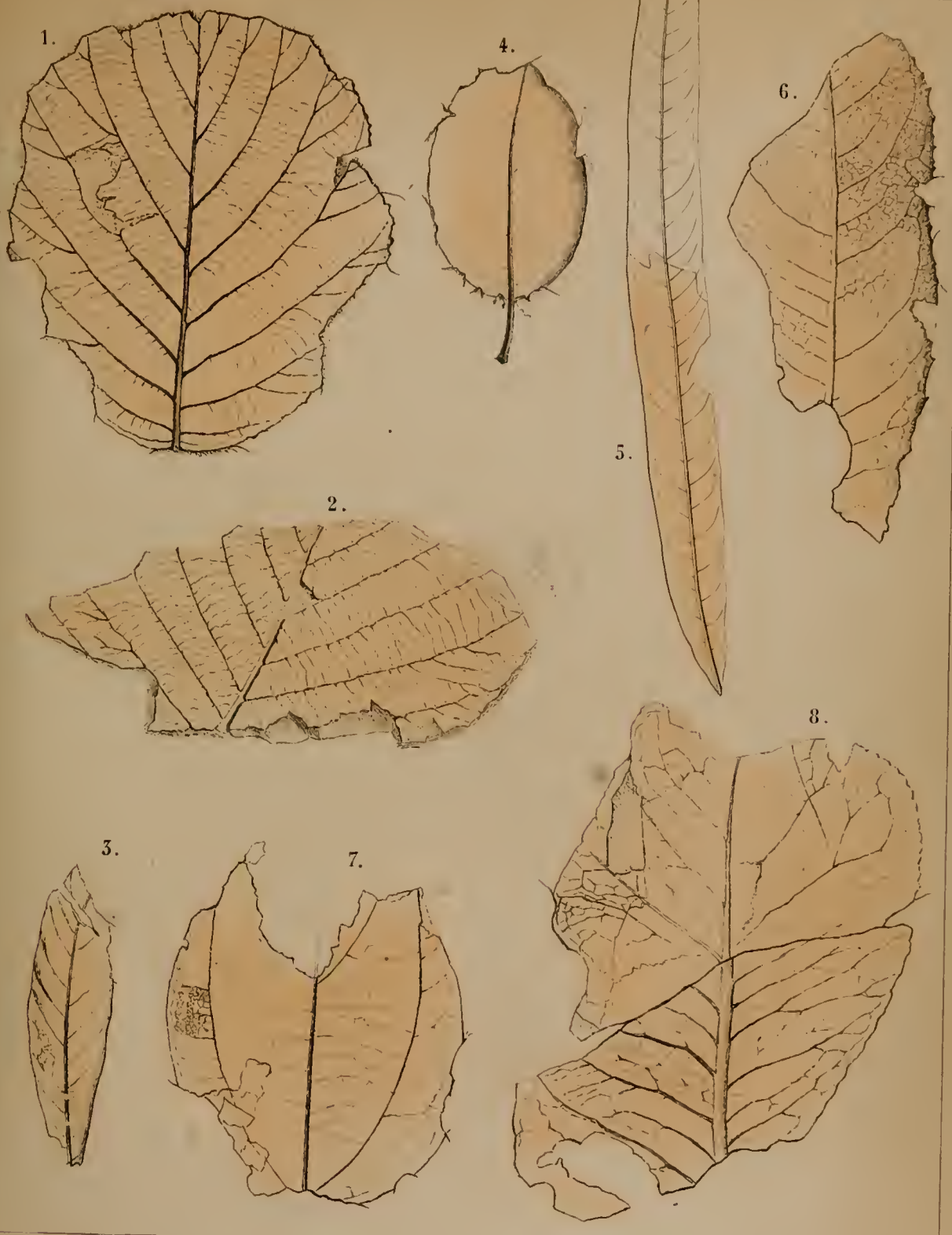
En m'appuyant sur les nombreux matériaux, dont je viens de présenter le catalogue à l'Académie, je pourrais à présent entrer dans des considérations de quelque importance, soit par rapport à la stratigraphie des couches phyllitifères, soit pour ce qui tient à l'histoire des espèces et aux corollaires géologiques, qui naturellement dérivent de leur identité ou de leur analogie avec les espèces d'autres régions italiennes ou étrangères déjà bien exploitées et connues sous ce même aspect; mais, conséquent à mon but actuel, qui est seulement de prendre date sur la publication des espèces nouvelles ou inédites, je réserve ces considérations pour le travail général.



Torino Lit.e Doyen

1. Lenzites Gastaldii Heer. *part sup.* 2. Id. *part infer.* 3. Cyperites gracillimus E. Sism. 4. Id. *ingrand*
5. Cyperites macrophyllus E. Sism. 6. Id. *ingrand* 7. Pinus Massalongi E. Sism. 8. Id. *Squama ingrand*
9. Quercus Brongniarti E. Sism.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY.



Torino Lit. Fils Doyen

1. Corylus Heeri E. Sism. — 2. Corylus gigas E. Sism. — 3. Celastrus pedemontana Heer. — 4. Celastrus Capellinii Heer. 5. Dryandroides Gaudini E. Sism. — 6. Ilex? longifolia Heer. — 7. Paliurus Sismondanus Heer. — 8. Phyllites reticu-latus Heer.

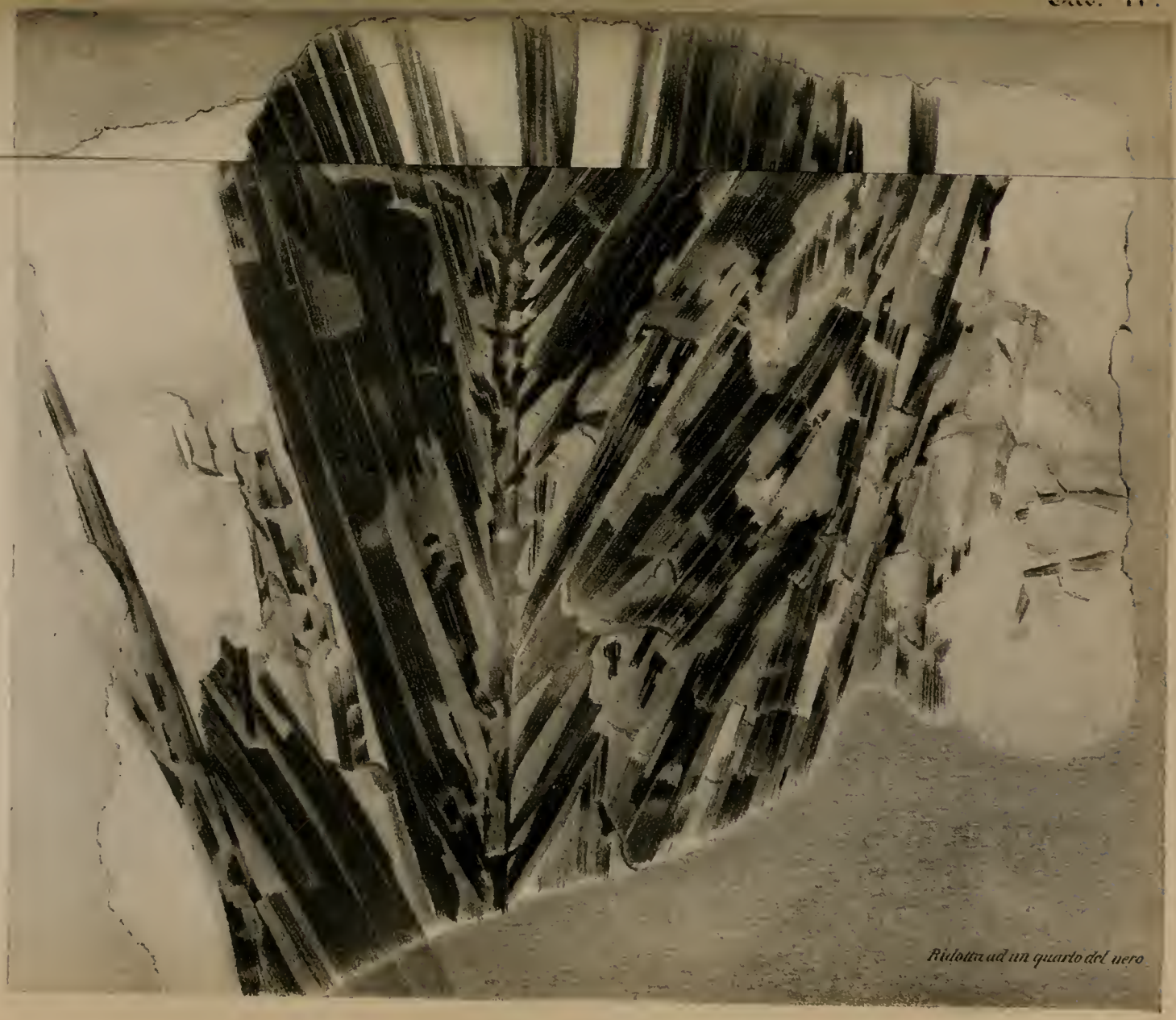

NATURAL HISTORY



Torino Lit.ª F.lli Doyen.

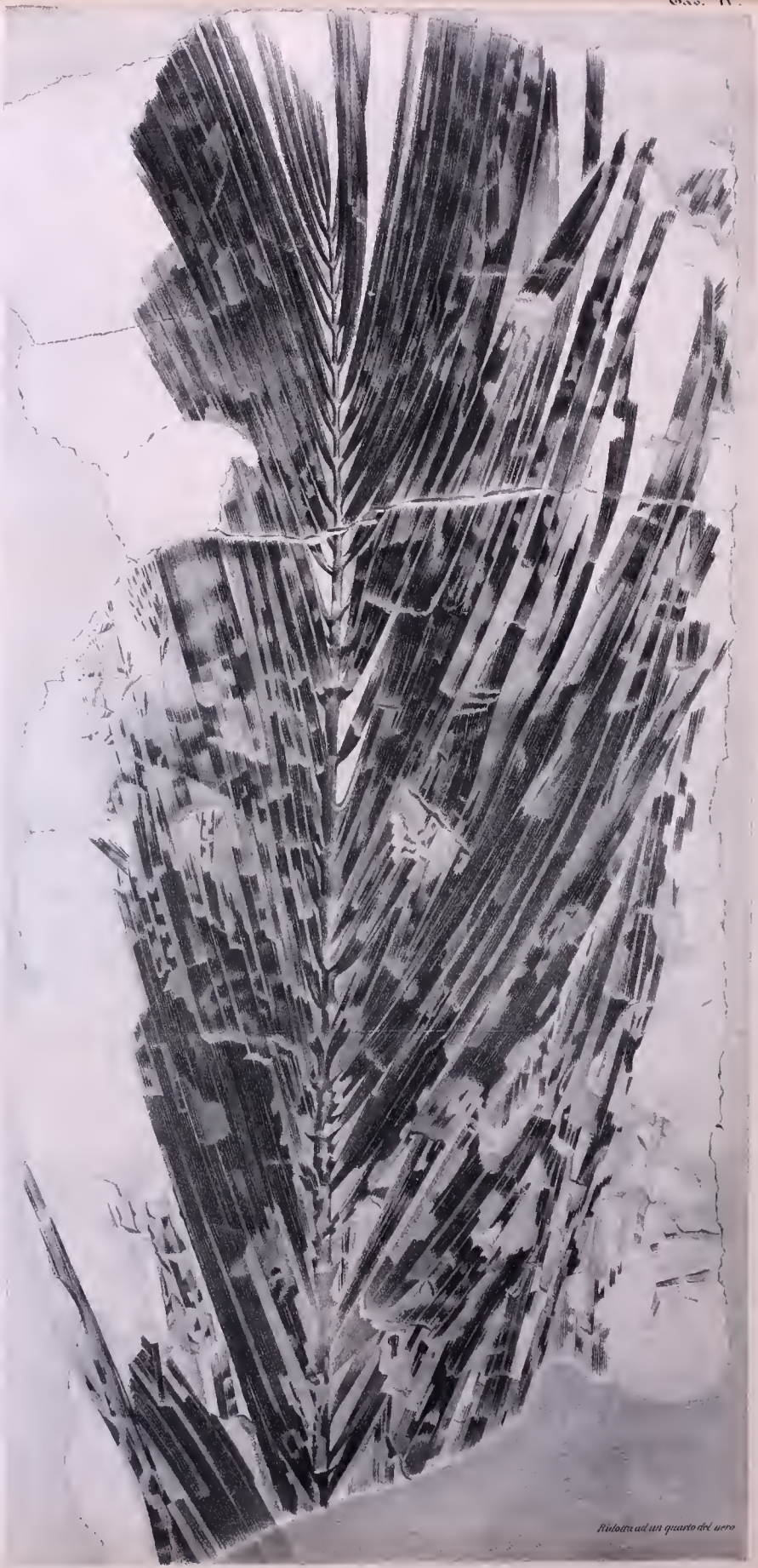
1. 2. Pinus Ettingshauseni E. Sism. — 3. Pinus sp. *(Fiore maschio)*. — 4. Pinus sp. *(Squama)*
5. Ihnia Goepperti E. Sism. — 6. Id. *Ingrand.* — 7. Celastrus Heeri E. Sism. — 8. Celastrus Ungeri E. Sism.
9. Quercus Gastaldii Heer. — 10. Myrica Merloi E. Sism. — 11. Id. *Parz. ingrand.* — 12. Ficus pandurae formis E. Sism.
13. Daphnogene Gastaldii E. Sism. — 14. Phyllites De-Visianii E. Sism.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY



Torino Lit. F^lli Doyen

Phoenicites Pallavicinii E. Sism.



Phoenicites Pallavicinii E. Sism.

SCIENZE

MORALI STORICHE E FILOLOGICHE

MEMORIE

DELLA

REALE ACCADEMIA

DELLE SCIENZE

DI TORINO

SERIE II. — TOM. XVIII.

SCIENZE MORALI STORICHE E FILOLOGICHE

TORINO

STAMPERIA REALE

MDCCCLIX.

DEL PRINCIPIO SUPREMO

DEL DIRITTO

DEL PROF.

PIETRO ALBINI

Memoria approvata nell'adunanza del 14 del 1854.

Una delle indagini più ardue e nello stesso tempo più importanti della scienza giuridica, e più propriamente della filosofia del diritto, è quella di rintracciare qual sia l'idea, o verità cardinale da cui derivano e con cui si trovano logicamente connesse tutte le verità e le regole giuridiche, e che perciò chiamasi *principio supremo del diritto*. Tanto più che l'efficacia e l'influenza di questo principio si estende nelle sue remote conseguenze e nelle sue pratiche applicazioni a tutte le parti della scienza del diritto. I tentativi per stabilire tale principio incominciarono dacchè i giuristi filosofi e i cultori della filosofia rivolsero le loro indagini, taluni a distinguere il diritto dalla morale, altri a separare affatto quello da questa e ad attribuire al diritto una sfera del tutto separata e indipendente da quella della morale. Dalle quali indagini sorse la scienza del diritto naturale, che più tardi prese il nome di *filosofia del diritto*.

La diversità del principio che si pose a base di questa nuova scienza, i germi della quale s'incontrano già più o meno confusamente negli scolastici, e segnatamente negli scritti di quel grande che sopra tutti gli altri come aquila vola, S. Tommaso, e nella *Monarchia* dell'Alighieri, differenzia fra di loro i sistemi di filosofia del diritto che si succedettero seguendo le fasi dei sistemi filosofici, i quali vennero disputandosi il primato.

Non è mio intendimento, onorandissimi Colleghi, di fare l'esposizione anche solo sommaria e l'esame critico delle teoriche delle varie scuole da Grozio sino ai nostri giorni, per istabilire il principio supremo del diritto. Chè un tale assunto eccederebbe i limiti di una memoria accademica. Io mi restringerò ad esporvi il risultamento di alcuni miei studi

sopra questo arduo subietto, e ad accennare di volo alcune delle principali dottrine intorno al medesimo.

Il principio supremo del diritto affinchè valga a soddisfare alle esigenze della scienza, dee fornire un criterio sicuro per discernere ciò che è giusto od ingiusto nei rapporti esteriori degli uomini fra di loro in quanto l'estrinsecazione dell'umana attività si riferisce agli umani diritti, dee segnare la distinzione tra la legge morale e la legge giuridica, senza separare però e staccare affatto questa da quella. Uopo è anzi che faccia conoscere il nesso tra queste due norme delle umane azioni.

Inoltre la verità che costituisce il principio supremo del diritto debbe essere di tal comprensione, che in sè riassuma e in certa guisa compendii tutte le verità e le regole giuridiche. Poichè la scienza del diritto, considerata nel suo complesso, non debb'essere che l'ordinata deduzione delle verità e delle regole giuridiche da questo principio, e il diritto positivo nel suo stato normale esser non dee che l'attuazione e l'esplicazione successiva di questo stesso principio.

Nello stabilire il principio fondamentale del diritto, se male non mi appongo, alcuni errarono per difetto, altri per eccesso, altri per incompleta enunciazione del vero che vuol essere posto a base della scienza giuridica.

Errarono per difetto coloro che si arrestarono ad una verità secondaria, o cercarono il criterio per discernere il giusto là dove non poteva trovarsi. A questa categoria appartengono quelli che elevarono a principio fondamentale del diritto l'utile, la sociabilità, la volontà comune. Poichè l'utile può bensì considerarsi come un elemento del diritto, il risultato della sua osservanza, ma nulla ha in sè d'assoluto, d'immutabile che possa servir di lume a discernere il giusto dall'ingiusto. L'utilità anche generale è conseguenza della giustizia attuata, ma non può fornire il criterio per determinare *a priori* ciò che sia giusto nè nei rapporti di gius pubblico interno, nè nei rapporti individuali, nè nei rapporti internazionali.

La sociabilità non esprime che una qualità, sebbene essenzialissima dell'uomo. Ora mal si potrebbe da una qualità del soggetto umano dedurre la distinzione tra giusto ed ingiusto. Affermando doversi tenere per giusto ciò che tende conservare la società tranquilla e ordinata, o si parla della società umana in generale, e si esprime un concetto troppo vago e indeterminato e soverchiamente complesso: o si parla della conservazione di una determinata società politica di uno stato, e allora si ricade nel sistema utilitario.

Molto meno si potrebbe ammettere la volontà comune qual fonte del giusto nei rapporti sociali. Perocchè la volontà dell'uomo è una forza o potenza di agire che non ha in se stessa la propria legge che la governi e diriga, ma l'ha fuori di lei. Essa è per se medesima una potenza contingente, relativa, incostante, che può volgersi al vero come al falso, al bene come al male, ed è quindi sfornita di carattere legislatorio.

Tal è la volontà dell'uomo individualmente considerato: nè altrimenti può essere la volontà collettiva di qualunque quantità d'individui: giacchè il numero non cambia l'essenza di queste volontà.

Egli è d'uopo risalire a quella legge che debb'essere norma di codeste volontà o individualmente o collettivamente considerate per conoscere ciò che esse debbono volere e fare. La stessa volontà universale non sarebbe giusta perchè tale, ma come indizio od espressione di ciò che è giusto in se stesso. Per altra parte la volontà comune non si risolve infine che nella volontà del maggior numero. Ma donde si trarrebbe l'obbligo di sottomettersi a ciò che i più vogliono? Se non si allega altra ragione che la volontà del maggior numero, non si avrà altra ragione che la forza. Se si adduce per ragione l'utilità comune, ci troviamo di nuovo a fronte del sistema utilitario.

Errano per eccesso coloro che allargando la sfera del diritto più di quello che la natura del medesimo il comporti, stabiliscono per principio fondamentale che il diritto è condizione e mezzo della vita morale dell'uomo, o il complesso delle condizioni interne ed esterne dipendenti dalla volontà, e necessarie allo sviluppamento e al compimento della destinazione razionale individuale dell'uomo e dell'umanità.

Questi pronunziati hanno primamente troppo del vago e dell'indeterminato, che mal si conviene ad un principio, il quale come cardine di una scienza dee splendere della luce di un vero incontrastabile, non ci porgono un concetto chiaro e preciso del diritto nè nel senso soggettivo nè nel senso oggettivo, cioè nè come facoltà nè come legge. Secondamente la vita morale dell'uomo, la destinazione dell'uomo e dell'umanità, costituiscono, a mio credere, un oggetto ben più elevato ed ampio di quello a cui mirar possa il diritto. Tali dottrine nelle pratiche loro applicazioni condurrebbero facilmente ad assoggettare all'azione del diritto degli atti che per loro natura non possono entrare nella sua sfera, condurrebbero inoltre ad ampliare indebitamente e ad alterare l'ufficio dell'autorità civile.

A questa categoria si possono pure riportare quei sistemi che con-

fondono il principio del diritto con quello della morale, e non distinguono dalla morale che il diritto positivo. Altri per ultimo colsero sostanzialmente nel vero, ma non sembra l'abbiano espresso con quella precisione ed esattezza che sarebbe necessaria, e le loro teoriche perciò hanno in parte i difetti, o conducono ad alcuni inconvenienti che si ravvisano nei sistemi or ora accennati. Tale mi sembra la teorica la quale pone per principio generale del diritto, per criterio onde discernere ciò che è giusto, l'accordo della libertà di ciascheduno colla libertà di tutti secondo una legge generale. Pronunziato certamente luminoso e fecondo, ma che oltre all'essere esso pure assai vago, esprime tutt'al più l'ufficio negativo del diritto, di non nuocere agli altri, mentre il diritto essendo essenzialmente sociale, inchiude eziandio un ufficio positivo, quello di cooperare anche al bene altrui entro certi limiti.

Per incompleta enunciazione del vero sembrami pure potersi appuntare la dottrina che nell'umana personalità pone il principio e il fine del diritto. Siccome nell'umana personalità s'incontra l'elemento morale non meno che l'elemento sensibile, si conchiude che entrambi questi elementi debbonsi trovare nel diritto. Venendo quindi ad esprimere più nettamente il concetto di questa dottrina si enuncia la formola: essere conforme al diritto tutto ciò che è secondo il bene morale e insieme il bene sensibile dell'uomo, ossia l'utile dell'uomo, quello insomma che è conforme al bene intero dell'umana personalità.

Non si può negare che il pronunziato sia per diversi rispetti vero.

Egli è fuor di dubbio, che il diritto nel suo concetto razionale ed assoluto è morale insieme ed utile, nel senso che il diritto non può prescrivere ciò che sia intrinsecamente inonesto, o che essendo onesto non rechi anche qualche utilità, ossia qualche bene sensibile, come non può vietare ciò che sia essenzialmente onesto.

Ma primamente vuolsi notare che *il bene morale* sta propriamente nell'intimo dell'animo di ogni individuo, perchè consiste nella conformità dell'intenzione, ossia della determinazione della volontà colla legge morale, sia che questa determinazione si manifesti, sia che non si manifesti esteriormente e rimanga chiusa nell'intimo dell'animo. Dicendo dunque essere secondo il diritto, cioè giuridicamente giusto tutto ciò che oltre all'essere conforme al *bene sensibile*, lo è anche al *bene morale*, s'introduce con questa seconda frase nel concetto del diritto un elemento estraneo al medesimo, e che sfugge alla sua azione. Poichè il diritto e l'autorità destinata a pro-

muoverne l'osservanza non possono spingersi a scrutare le secrete intenzioni di chi agisce e vedere se si accordino o non colla legge morale.

Chi per esempio agogna alla roba altrui, ma non osa stender la mano per appropriarsela, unicamente perchè s'accorge che non riescirebbe nel suo intento, o sarebbe scoperto e punito; chi anela a vendicarsi del suo nemico, e cova nel suo cuore odio mortale contro di esso, ma s'astiene dall'attentare alla vita di lui, non perchè abborra dal sangue, e perchè ciò sia essenzialmente illecito, ma unicamente per tema del patibolo, non agisce certo in modo conforme alla morale, negli atti interni non v'ha certo bene morale, pur nondimeno la sua condotta è conforme al diritto, lo scopo del diritto è ottenuto.

Secondamente non è esatto il dire, che scopo della legge giuridica sia il *bene intero dell'umana personalità*. Perocchè per tal guisa si viene ad attribuire al diritto e per conseguenza alla società politica destinata ad attuarlo un fine che eccede assolutamente i mezzi che le sono proprii. E per verità il bene intero dell'umana personalità non è infine altro che la felicità, cioè l'integrale appagamento dell'uomo, e questo è bensì il fine ultimo a cui mira l'umanità, ma il pretendere il bene intero dell'umana personalità dall'azione del diritto e della società politica è un pretendere ciò che quello e questa sono per loro propria natura impotenti a dare.

Dopo i tentativi fatti da tanti gagliardi e potenti ingegni, i quali tuttavia non riuscirono a stabilire una dottrina che fosse affatto immune da censure più o meno gravi, e che non si ravvisasse per qualche lato difettosa o insufficiente all'intento, può certo sembrare non senza ragione atto di temerità, che io voglia mettermi per sì arduo e scabroso cammino, quasi che pretenda di essere più degli altri fortunato. Ciò nondimeno mi sia lecito di esporre candidamente le mie idee su questo difficile tema, giovandomi delle indagini di quelli che mi precedettero.

Tutte le forze e potenze create essendo ordinate ad un fine, hanno una legge che le dirige ad effettuarlo. Gli esseri irrazionali hanno in se stessi una legge impressa dal Creatore per la quale sono fatalmente e ineluttabilmente tratti al fine per cui sono destinati e ne sorge l'ordine maraviglioso della natura fisica.

L'uomo, essere intelligente e volente, perfettibile e socievole, è capace d'apprender la legge che regolar dee la sua attività e di uniformarsi ad essa onde raggiungere il fine pel quale è creato.

Tre categorie di esseri si affacciano alla mente dell'uomo. Iddio, altri esseri a lui simili, gli esseri irrazionali, animati o inanimati essi siano.

L'uomo non può non riconoscere queste tre categorie di esseri, quali sono in realtà, ed essendo egli dotato di ragione e di libero arbitrio, apprende la legge eterna di giustizia, la legge morale che gl'impone di riconoscere non solo speculativamente, ma eziandio praticamente, cioè in tutti i suoi atti interni ed esterni liberi le preaccennate tre categorie di esseri quali essi sono. Ne deriva quindi in ogni uomo la morale necessità di riconoscere Iddio come supremo Creatore ed ordinatore di ogni cosa, sommo bene, somma verità, somma giustizia; gli altri uomini come suoi simili, aventi la stessa origine, la stessa natura, lo stesso fine. Riconoscerli praticamente come tali, importa non solo l'astenersi dall'arrecar loro nocumento qualsiasi, ma il cooperare altresì per quanto è possibile al loro bene: gli altri esseri nei quali non isplende alcuna personalità, si presentano e voglionsi riconoscere come aventi ragion di mezzo.

Quindi il supremo principio morale, secondo la formola di un illustre filosofo italiano, sta « nel pratico riconoscimento degli esseri secondo la loro dignità ed eccellenza, » che riassume e compendia tutti i doveri dell'uomo verso Dio, verso se stesso, verso i suoi simili.

L'attività dell'uomo considerata in relazione alla legge morale e per conseguenza in relazione a Dio e al suo ultimo fine ci porge il concetto del *dovere*.

L'attività dell'uomo estrinsecantesi nei rapporti esteriori co' suoi simili sia per operare il bene morale, sia per conseguire il suo bene sensibile nei limiti dell'onesto, ossia pe' suoi legittimi fini, ci porge il concetto del *diritto* soggettivamente considerato, cioè come podestà.

Quest'attività, che nelle diverse forme sotto le quali si manifesta e per la diversità degli oggetti a cui si applica, ci presenta il complesso degli umani diritti, ha d'uopo d'essere regolata, onde non trascenda i proprii limiti, ha d'uopo d'essere tutelata, affinchè non venga nel suo esercizio turbata o manomessa dalla forza o dall'astuzia altrui, ha d'uopo di essere coadiuvata, affinchè acquisti quell'esplicamento di cui è capace: ha d'uopo per ultimo di essere coordinata con quella degli altri, affinchè non ne sorgano conflitti e ne risulti il maggior bene di tutti. Chè l'uomo non può essere considerato in istato d'isolamento, ma in istato di società. È vero che alla legge morale sono sottoposti anche i diritti, in quanto che tutti gli atti liberi dell'uomo, senza distinzione di sorta, soggiacciono al suo impero. Ma la legge morale li regola in ordine al fine ultimo dell'uomo e al perfezionamento assoluto del medesimo.

Inoltre la legge morale rigetta ogni coazione, perchè la coazione può

bensì impedire l'estrinsecazione di un atto morale od astringere a qualche atto esterno, ma nè può impedire la malvagia intenzione o l'interna determinazione della volontà al male, in che sta propriamente l'atto immorale, nè può tramutare la malvagia intenzione in buona, che costituisce propriamente l'atto morale e il bene morale. Onde che essa per se sola non può servire a tutelare, regolare e coordinare con efficacia i diritti umani.

La coesistenza pertanto, non che di una moltitudine, di due soli uomini, basta perchè si manifesti all'intelletto di ciascheduno di essi un'altra legge, la quale regola l'estrinsecazione della legittima attività d'ogni uomo nei mutui rapporti co' suoi simili. È questa la *legge giuridica*, il diritto oggettivamente considerato.

Ma la legge nel senso più generale non è infine che una nozione della mente colla quale l'uomo giudica le azioni che in una sfera più o meno larga può o non fare.

Ora qual è quella nozione, quel vero, col lume del quale può l'uomo giudicare ciò che gli sia o non lecito nei rapporti esterni co' suoi simili, e gli sia guida a regolare la propria attività nelle sue estrinsecazioni a fronte di essi e coordinarla al maggior bene di tutti? Questa nozione, questo vero cardinale che costituisce il supremo principio del diritto ed esprime perciò colla formola più semplice la legge giuridica, è, a mio avviso, *il pratico riconoscimento esteriore della personalità giuridica dell'uomo considerata in se stessa e nell'esplicamento che riceve nelle diverse forme del consorzio umano.*

Questo principio così formolato ha primamente il grande vantaggio di fissare la distinzione tra la morale e il diritto, distinzione che è uno dei più segnalati progressi della filosofia del diritto fecondo di sì importanti conseguenze nella teorica e nella pratica, evitando però in un medesimo due estremi opposti non meno erronei e pericolosi, di confondere cioè la morale col diritto, o di distaccare e scindere affatto questo da quella.

La formola or ora enunciata guida anzi a cogliere il nesso che congiunge queste due norme che regolano le umane azioni e le mutue loro attinenze. Perocchè il principio morale, il riconoscimento degli esseri secondo la loro entità ed eccellenza, principio che regola tutta l'umana libertà in ogni sua manifestazione interiore ed esteriore, nella sua assoluta generalità, comprende virtualmente e necessariamente anche il principio del diritto, il riconoscimento esteriore dell'umana personalità. Onde che il principio obbligatorio della morale fa sentire la sua efficacia anche nella

sfera del diritto: essendo evidente che tutto ciò che prescrive o vieta il diritto, considerato nel suo stato normale, cioè quale debb'essere, lo prescrive e lo vieta pure la morale: per lo contrario non tutto che prescrive o vieta la morale lo può vietare o prescrivere il diritto. Intendesi perciò essere vero ciò che fu già da altri notato che la morale è prima del diritto, nel diritto e dopo il diritto, e come la morale sia il più potente e il più efficace ausiliario del diritto.

Scindete affatto la morale dal diritto, e nella teoria voi romperete l'anello che congiunge le scienze giuridiche colle morali e colle metafisiche, nella pratica toglierete all'ordine sociale il più saldo suo fondamento.

Egli è d'uopo però che io dichiari più apertamente il concetto sovra espresso.

Parlando di un *riconoscimento pratico* insieme ed *esteriore* dell'umana personalità si determina la natura del diritto non meno che la sfera entro cui esso si circoscrive. Di vero, il riconoscimento *pratico* indica che non si tratta di un riconoscimento puramente speculativo, ma di un riconoscimento che si manifesta coi fatti, cioè colle azioni libere dell'uomo, con quelle azioni alle quali concorre l'intelligenza e la volontà.

Inoltre il riconoscimento pratico dell'umana personalità si può effettuare in due modi, *passivamente*, cioè coll'astenersi unicamente dagli atti che rechino ad altri nocumento: *attivamente*, cioè col coadiuvare i nostri simili al conseguimento dei legittimi loro fini. Rendesi quindi manifesto come il diritto oggettivamente considerato, cioè la legge giuridica non abbia un ufficio puramente negativo, secondo che alcuni opinano, in quanto si restringa a impedire che gli uomini si nuocciano a vicenda, ma abbia altresì un ufficio positivo ossia attivo, prescrivendo entro certi limiti di cooperare al bene altrui. Chè altrimenti il diritto non sarebbe sociale, come esige la natura dell'uomo e lo stato naturale dell'umanità. E certo è che la società civile, la quale ha per iscopo l'attuazione della legge giuridica, non provvede unicamente alla pura e semplice tutela dei diritti, ma tende eziandio a promuovere il bene comune colla cooperazione dei socii. Se non che questo pratico riconoscimento, in modo passivo o in modo attivo si manifesti, non è che *esteriore* nel senso che il diritto, tenendosi pago del fatto di questo riconoscimento, non si spinge, nè può spingersi a investigare l'intenzione con cui si agisce. E in ciò sta la principal nota caratteristica del diritto, che ne segna i limiti e lo distingue dalla morale. Perocchè questa mirando al perfezionamento assoluto dell'uomo,

bada all'intenzione dell'agente e non è soddisfatta, se non si opera il bene per se stesso senza considerazione dell'utile o del danno, del piacere o del dolore che ne possa derivare all'agente.

La legge morale non si tien paga del riconoscimento esteriore dell'umana personalità: essa esige che a questo riconoscimento esteriore corrisponda il riconoscimento interno, in cui, come ho già notato, sta propriamente l'atto morale, il bene morale. Si scorge quindi l'essenziale differenza tra il dovere morale e il dovere giuridico. Il quale avendo il suo termine in un'altra persona, e adempiendosi o coll'astenersi da atti che nuocerebbero ad altri, e perciò col lasciare intatto un bene che ad altri appartenga, o col fare atti con cui si procura ad altri un bene sensibile, con qualunque intenzione si adempia il dovere giuridico e si adoperi anche la forza per astringere il renitente all'adempimento di esso, lo scopo è ottenuto. Per lo contrario il dovere morale non è adempiuto se non vi concorre l'intenzione dell'agente e l'interna determinazione della volontà di uniformarsi alla legge morale. Laonde viene a confermarsi ciò che dissi poc'anzi che la coazione è inconciliabile colla legge morale.

Ho parlato del riconoscimento della *personalità giuridica*, per indicare che l'oggetto proprio della legge giuridica è di regolare, tutelare, coordinare l'attività umana che si manifesta sotto la forma dei diritti. E qui stimo opportuno l'avvertire che sotto il nome di diritto in senso proprio viene a designarsi non solo la podestà di fare tutto ciò che *lecitamente possiamo*, ma anche tutto ciò che *moralmente dobbiamo fare*. Avvegnachè quegli atti, i quali secondo la nostra coscienza a fronte della legge morale sono per noi una morale necessità, un dovere, nella loro estrinsecazione, in faccia ai nostri simili assumono il carattere di un diritto. E in vero niuno negherà che noi abbiamo giusta ragione di esigere d'essere rispettati da tutti e protetti dalla società sia quando adempiamo dei doveri morali o religiosi, sia quando facciamo atti leciti che ci rechino qualche utilità. Il perchè egli è principalmente nella coscienza dei proprii diritti, nell'inviolato esercizio di essi che l'uomo sente la sua dignità.

Il riconoscimento della personalità giuridica dell'uomo considerato nel senso or ora spiegato riassume tutte le regole giuridiche che dirigono le azioni degli uomini nei rapporti individuali e sociali, compendia in sè tutti i doveri giuridici, è il principio regolatore di tutti i diritti. Per tal modo si determina essere giusto ciò che è conforme al riconoscimento esteriore

della personalità giuridica dell'uomo, o piuttosto tutto ciò con cui viene ad attuarsi questo riconoscimento.

Alcune riflessioni sulle applicazioni del principio sovraenunciato gioveranno a metterne in luce la verità e l'importanza.

Riconoscere la personalità giuridica dell'uomo significa non solo riconoscere in ogni individuo la dignità di persona, di un essere che ha un fine a sè, ossia, secondo lo stupendo concetto di Vico, un conoscere, un volere, un potere finito che tende all'infinito, ma significa altresì riconoscere l'esplicamento successivo d'ogni sua legittima attività. Ma l'attività dell'uomo in quanto si estrinseca o può estrinsecarsi in relazione a' suoi simili pel conseguimento, possesso o godimento di un bene in sè lecito, ci presenta, come fu già notato, il complesso degli umani diritti connaturali ed acquisiti. L'inviolabilità dei quali si risolve nell'inviolabilità della stessa umana personalità, di cui sono una splendida manifestazione.

I diritti connaturali, ingeniti, primitivi, come li chiamano, rampollano direttamente dall'umana personalità, hanno la loro ragione d'essere almeno in potenza, nel fatto dell'esistenza dell'uomo.

I diritti acquisiti hanno origine da un fatto volontario lecito dell'uomo, ma il loro fondamento sta negli stessi diritti connaturali, dei quali non sono infine che un maggiore esplicamento.

Il diritto di proprietà, che occupa tanta parte in tutto il giure, che si può dire il soggetto intorno a cui versa quasi tutto il diritto privato, ripete la sua inviolabilità dal principio sovraenunciato. Di vero, o si parla della proprietà connaturale, cioè delle doti d'animo e di corpo che con noi portiamo nascendo, e questa proprietà è inerente o connessa colla stessa nostra personalità: o si parla della proprietà acquisita, cioè dei beni che l'uomo viene acquistando col legittimo esercizio delle facoltà che ha dalla natura o per libera trasmissione o cessione d'altri, e la ragione dell'inviolabilità di questa proprietà deriva parimenti dal mentovato principio.

Infatti la proprietà involge il concetto della congiunzione fisico-morale di una cosa con una persona, e di una congiunzione permanente ed esclusiva. Quindi non si riconoscerebbe l'umana personalità se non si rispettassero le cose che l'attività della persona ha in qualche legittimo modo congiunte a sè e formano quasi parte di essa.

Le convenzioni sono il risultamento della signoria che ha l'uomo sulle azioni e sulle cose proprie, e per conseguenza una delle forme con cui la personalità umana estrinseca la sua attività sia pel bene proprio che

pel bene altrui. Laonde il dovere giuridico di osservarle, la loro inviolabilità è pure uno dei modi con cui si manifesta il riconoscimento pratico esteriore dell'umana personalità.

La lesione dei diritti che cosa è infine se non il disconoscimento manifestato col fatto della personalità giuridica dell'uomo nella legittima estrinsecazione di qualche sua attività?

Il diritto di difesa, il diritto di prevenzione e di guarentigia sono il mezzo per impedire che venga a consumarsi il fatto di un disconoscimento della nostra personalità giuridica, o per antivenirlo: il diritto di soddisfacimento il mezzo per riparare un tale disconoscimento, e per cancellarne per quanto sia possibile le conseguenze.

L'eguaglianza e la libertà, intorno alle quali corrono malauguratamente tante idee o erronee o incomplete o inesatte, vengono a connettersi col mentovato principio, il quale giova pure a determinarne la giusta nozione, ciò che è di capitale importanza nelle scienze giuridiche e politiche.

E per verità riconoscere la personalità giuridica dell'uomo non equivale egli a riconoscere in ogni uomo la stessa origine, la stessa natura, lo stesso fine, gli stessi diritti connaturali e una pari inviolabilità dei diritti connaturali ed acquisiti di ciascheduno? Non istà forse in ciò l'eguaglianza giuridica rettamente intesa?

Se non che il riconoscimento della personalità giuridica dell'uomo inchiude anche il riconoscimento delle naturali differenze degli individui, della diversità delle loro attitudini, del diverso grado delle rispettive loro facoltà, e della differenza dello sviluppo che ne conseguita, la quale diversità e differenza di grado e di sviluppo delle attitudini e facoltà, essendo una qualità della persona o il risultamento della legittima attività di ciascheduno, vuol essere rispettata non meno della stessa personalità.

Ed ecco come colla scorta dello stesso principio l'originaria eguaglianza di diritto tra uomo e uomo si viene a conciliare colle giuste disuguaglianze di fatto. Chè gli uomini sono fra di loro eguali come uomini, sono disuguali come individui.

La libertà giuridica per molti non è che l'esenzione da ogni ostacolo nell'esercizio dei nostri diritti, ossia della nostra legittima attività. Ma questo non è che l'aspetto negativo della libertà umana. Più propriamente e in senso razionale la libertà è la stessa legittima attività dell'uomo in quanto si estrinseca senza ostacoli per parte dei nostri simili. Chè, se male non m'appongo, tre elementi si richieggono al concetto razionale

della libertà: una potenza intelligente e volente che si esplica per propria virtù: una legge che da questa potenza è conosciuta, e la dirige, e l'esenzione da ostacoli nell'esplicamento di essa. Alcuni non tengono conto che dell'elemento negativo, cioè dell'esenzione da ogni ostacolo, e questa nozione inesatta conduce facilmente ad alterare il concetto della libertà, risguardando siccome contrario alla libertà qualunque freno che moderi, qualunque regola che diriga l'umana attività. Ma la libertà giuridica, che è una forma della libertà umana, non esisterebbe effettivamente se l'attività legittima dell'uomo non fosse dagli altri uomini rispettata. Ora il riconoscimento dell'umana personalità, come venne sopra espresso, racchiude un tale rispetto. Talchè l'attuazione di questo principio comprende in sostanza l'attuazione della libertà giuridica.

È qui cade in acconcio di notare, come il principio Kantiano della coesistenza od accordo della libertà di ciascuno colla libertà di tutti venga a chiarirsi e determinarsi colla scorta del principio fondamentale che ho sopra stabilito. Giacchè l'accordo della libertà di ciascheduno colla libertà di tutti verrebbe appunto a verificarsi mediante il pratico riconoscimento esteriore della personalità giuridica dell'uomo, del quale non sarebbe che una conseguenza.

Il riconoscimento della personalità giuridica dell'uomo ne conduce necessariamente a riconoscere una delle qualità essenziali dell'umana personalità, *la sociabilità*, da cui scaturisce il diritto connaturale di associazione e che si manifesta nelle diverse forme dell'umano consorzio.

La società è un fatto solenne come la stessa personalità individuale, che la scienza non può che spiegare ed analizzare. Egli è anzi nella società e mediante la società che la personalità umana si esplica, e le facoltà ond'essa è dotata prendono lo sviluppamento di cui sono suscettive. Gli stessi diritti che direttamente o indirettamente derivano dall'umana personalità non esisterebbero che in potenza e in germe, o rimarrebbero in uno stato affatto imperfetto senza il sussidio della società.

L'associazione dà origine a nuove personalità, le personalità collettive, le quali non sono infine che un'immagine e un riflesso della personalità individuale.

Difatti che cos'è che costituisce l'umana personalità? L'intelligenza e la volontà, ossia, secondo il concetto di Vico sovra ricordato, il conoscere, il volere, il potere. Ogni società inchiude il concetto di unità dell'intelligenza, della volontà, dell'attività di più individui coordinate e cooperanti al conseguimento di un bene o di un fine comune: ne sorge quindi un

nuovo soggetto che partecipando degli elementi ond'è costituito assume il carattere di una persona. Giacchè in virtù dell'unità anzidetta d'intelligenza, di volontà e di azione degli individui, di cui si compone la società, essa costituisce un ente che ha un conoscere, un volere, un potere, e tende o per lo meno coadiuva all'ottenimento di qualche fine proprio dell'umana personalità. Questa personalità collettiva ha perciò essa pure la sua sfera di azione e quindi dei diritti analoghi a quelli che ha l'individuo. Ora il riconoscimento della personalità giuridica dell'uomo conduce per necessaria conseguenza al riconoscimento delle personalità collettive: poichè in esse si riverbera la dignità delle personalità individuali, ed è per mezzo principalmente delle diverse forme di associazione che l'uomo e l'umanità vanno raggiungendo i loro fini.

Quanti sono i beni che l'uomo non può o difficilmente può conseguire senza la cooperazione de' suoi simili, altrettante sono le maniere o forme di società, nelle quali si viene concretando la società originaria e universale fra tutti gli uomini.

La famiglia, che è la forma primordiale e più semplice dell'umano consorzio, racchiude virtualmente e compendia in sè tutti i fini ai quali possono o debbono cooperare gli uomini. Ma col moltiplicarsi dei medesimi, collo svilupparsi della ragione e dell'umanità, questi fini, che da principio trovansi insieme aggruppati e confusi, si vanno mano mano rendendo più spiccati e distinti, e per agevolare il conseguimento dei destini dell'umano genere si vengono formando diverse società quanti sono i beni e fini principali dell'umanità.

Uno dei bisogni che nei primordii stessi dell'umano genere dovette manifestarsi, sebbene da principio imperfettamente e rozzamente, fu il riconoscimento esteriore della personalità umana, ossia l'attuazione del diritto.

Pel naturale e necessario esplicamento dei germi contenuti nella famiglia e pel sorgere da una sola più famiglie, che per l'istinto di socievolezza, pei rapporti derivanti dai vincoli di sangue e dai reciproci bisogni e per abitudine rimangono unite, si viene formando per un lento e naturale esplicamento la società politica, la quale per quanto imperfetta e informe sia ne' suoi primordii, ha appunto per iscopo l'attuazione del diritto, ossia il riconoscimento esteriore dell'umana personalità, che è la precipua condizione pel conseguimento degli altri fini dell'umanità.

Ma la società politica non sarebbe atta a raggiungere o solo assai incompletamente il proprio scopo, se la sua azione si spiegasse sopra parti non

omogenee, o si sperperasse sopra uno spazio eccessivamente esteso con tutte le varietà geografiche ed etnografiche che vi si incontrerebbero. Quindi egli si conviene alla natura e al fine della politica società che concorrano a comporla popolazioni, che per unità di lingua, di stirpe, di territorio e per uniformità di carattere abbiano comunanza d'idee, di sentimenti, d'interessi, cioè popolazioni della medesima nazione. Il perchè la società politica, ossia lo Stato considerato nella forma concreta, che razionalmente dee prendere nel progressivo suo sviluppamento e in quelle condizioni, che formar debbono il suo modo di essere normale, dee corrispondere alla nazione, cioè abbracciare una nazione coll'unità del vincolo politico, o almeno col vincolo federativo.

Due considerazioni si presentano qui spontanee: la prima si è la provvidenziale divisione del genere umano in nazioni, gli elementi delle quali sono dati dalla natura stessa. La seconda si è che il supremo principio del diritto, il riconoscimento della personalità giuridica dell'uomo nei rapporti tra nazione e nazione, o tra frazioni di una nazione formanti società politiche indipendenti, si risolve nel principio di nazionalità, cioè nel riconoscimento della nazionalità ossia dell'indipendenza nazionale. Giacchè la personalità giuridica umana dovendo essere praticamente riconosciuta in tutti gli aspetti e le forme che acquista nello sviluppo dell'umanità, ragion vuole che venga pure riconosciuta nella personalità nazionale, che è una delle più solenni e splendide forme sotto cui si manifesti. Onde che il principio di nazionalità come fondamento del diritto internazionale trovasi implicitamente nel principio supremo del diritto, come venne poc'anzi annunziato.

V'ha di più: non si può riconoscere pienamente l'umana personalità in ogni sua legittima esplicazione, se non si riconosce a un tempo la perfettibilità dell'uomo, nella quale sta la ragione intrinseca, anzi la causa efficiente del progresso sociale. L'uomo infatti è perfettibile nel conoscere per l'indefinita sua capacità ad estendere il proprio sapere col successivo acquisto ed esplicamento delle verità: è perfettibile nel volere per la capacità ond'è fornito di uniformarsi sempre più ne' suoi atti al giusto e all'onesto, e di anteporre il bene oggettivo al bene soggettivo: è perfettibile nel potere per l'indefinita capacità nell'acquistare ed estendere i mezzi conducenti al conseguimento dei suoi legittimi fini. L'umana perfettibilità considerata sotto questi tre aspetti e nelle loro mutue attinenze può fornire la base di una teorica del progresso sociale, ossia dell'incivilimento, la quale verrebbe a collegarsi col principio supremo del diritto.

Ponendo mente ai pensieri, ch'io venni rapidamente esponendo, si può, se non vado errato, agevolmente comprendere come, movendo da un vero semplice e incontrastabile, qual è il riconoscimento esteriore della personalità dell'uomo, si possano dedurre le regole giuridiche che diriger debbono l'attività dell' uomo nelle sue estrinseche manifestazioni in relazione agli altri uomini, si possano investigare i diritti che in modo immediato o mediato rampollano dall'umana personalità, e quelli che l' uomo viene acquistando o sviluppando nella famiglia e nelle diverse associazioni che si formano, ed in ispecialità nello Stato e nella Nazione.

Il principio sovr'additato è abbastanza evidente, universale ed assoluto per poter essere posto a fondamento di tutta la scienza giuridica. Esso è universale ed assoluto, non essendovi persona individuale o collettiva che possa sottrarsi al suo impero, nè circostanza che valga ad esimere dalla sua osservanza.

Questo principio domina nel diritto privato: giacchè avendo questo per iscopo di determinare e regolare i diritti civili, i quali altro non sono infine che i diritti connaturali dell'uomo e i diritti naturali acquisiti, ampliati o modificati secondo le esigenze del civile consorzio, non mira che a far rispettare la personalità giuridica nei rapporti individuali, e a provvedere all'inviolabilità e al libero esercizio di questi diritti: talchè tutte le regole e le prescrizioni del giure privato, incominciando da quelle che regolano lo stato delle persone, scendendo a quelle che versano intorno ai diritti sulle cose, intorno alle maniere di acquistare o di trasmettere la proprietà, e alle obbligazioni, e determinano i mezzi di assicurarne l'adempimento, si possono risolvere in un modo o forma od aspetto del riconoscimento dell'umana personalità, ossia di qualche legittima estrinsecazione della sua attività.

Il principio sovr'additato domina il diritto pubblico. Infatti primamente esso serve a determinare il fine proprio della società politica, non avendo questa per iscopo che di attuare ed esplicare cotale principio, il riconoscimento esteriore dell'umana personalità, sotto l'aspetto passivo col regolare e tutelare tutti gli umani diritti, sotto l'aspetto attivo col coordinare l'esercizio degli umani diritti al miglior vantaggio comune, col promuovere coi mezzi suoi proprii e, salva l'incolumità dei diritti di tutti, il triplice umano perfezionamento, cioè il perfezionamento intellettuale, morale e sensibile. Onde che ne deriva l'importante corollario che lo Stato è per gl'in-

dividui, non gl'individui per lo Stato, che questo ha ragion di mezzo per quelli, non viceversa.

Secondamente, determinato il fine della società politica rimane pure designata la natura non meno che lo scopo della Sovranità, non essendo essa che la suprema podestà di dirigere la società politica al suo fine. Laonde è il principio supremo del diritto, che mentre addita il fine della società politica, serve pure a designare l'ufficio e i limiti razionali della sovranità politica, e a far conoscere come questa si concilii colla libertà.

Giacchè, ove ben si consideri, la sovranità politica è infine la tutrice e la regolatrice della libertà giuridica sotto le due forme di libertà civile e di libertà politica.

E siccome la sovranità politica dee di necessità concretarsi in qualche individuo o corpo morale, che effettivamente la eserciti, e costituisce il soggetto attivo della sovranità, il quale potrebbe per mal talento abusare, o per negligenza o imperizia men rettamente o meno utilmente usare l'autorità ond'è investito, si rendono necessarie norme che ne regolino l'esercizio, e guarentigie che ne assicurino il retto uso. Si appalesa quindi la ragion fondamentale delle politiche costituzioni, che sono la legge della sovranità concretata sotto determinata forma, e mirano appunto a questo intento. Viene pure a manifestarsi la ragione fondamentale dei diritti politici, pei quali la nazione concorre direttamente o indirettamente all'esercizio della sovranità, e sono il mezzo più efficace per l'incolumità dei diritti civili anche a fronte del potere politico, e per promuovere la comune prosperità.

Il riconoscimento della personalità giuridica dei cittadini vuol essere per quanto è possibile guarentito anche in relazione al potere politico. Ora a questo intento mirano appunto le leggi fondamentali degli Stati e la partecipazione della nazione all'esercizio della sovranità: chè i diritti dei cittadini corrono facilmente pericolo di essere manomessi, e la stessa dignità dell'umana personalità è disconosciuta là dove mancano affatto le guarentigie politiche, e la nazione è assolutamente esclusa dal partecipare all'esercizio della sovranità.

Il principio da me sopra formato domina nel diritto penale, il quale non ha altro oggetto infine che di far rispettare l'umana personalità reprimendo colle pene quei modi di disconoscimento dell'umana personalità, che non si possono nè riparare nè impedire col privato accorgimento e coi mezzi di ragion civile; ond'è evidente che il diritto penale mira all'attuazione dello stesso principio. Questo ne segna pure i limiti. Poichè

la pena dovendo necessariamente consistere nella privazione di un bene, e dovendo essere ordinata dalla società politica ad assicurare il conseguimento del suo fine, non può questa privazione essere tale che involga la negazione del principio stesso, alla cui attuazione questa società è destinata. Quindi è che in uno stato normale della società civile la pena non potrebbe estendersi a colpire l'integrità del corpo e il bene dell'esistenza. Poichè nella privazione di questi beni vi sarebbe un disconoscimento, una negazione dell'umana personalità. Inoltre siccome ciò che vi ha di più essenziale nel delitto è il male morale, ossia il pervertimento della volontà, egli è pienamente conforme al principio supremo del diritto che la pena, per rispondere più acconciamente al suo scopo, miri a raddrizzare la volontà del delinquente, perciò anche nel sistema penitenziario si manifesta una delle applicazioni del riconoscimento dell'umana personalità.

È lo stesso principio che domina nel diritto internazionale e ne somministra la base. Poichè in quanto al diritto internazionale pubblico, come ho già fatto notare, il principio di nazionalità è virtualmente inchiuso in quello del riconoscimento della personalità giuridica dell'uomo, e la personalità degli stati e delle nazioni non è infine che un modo di manifestazione ed esplicazione dell'umana personalità, e tutte le regole di diritto internazionale si risolvono nel riconoscimento di queste grandi personalità collettive e della loro attività. Dal medesimo principio derivano le massime fondamentali del diritto internazionale privato, perchè ogni Stato, il quale è ordinato all'attuazione del diritto, dee parimenti riconoscere la personalità giuridica, che splende in ogni umano individuo, faccia o non parte di esso. Chè lo straniero non lascia di avere la dignità di uomo, per conseguenza ogni Stato dee rispettare e far rispettare i diritti connaturali ed acquisiti anche negli stranieri. Al quale scopo tende appunto il diritto internazionale privato.

Dalle premesse considerazioni discendono a mio avviso importanti corollarii.

È primamente, la formola sovranunciata stabilisce e mette in luce l'unità del diritto, e viene a confermare il pronunziato di Cicerone *Porro unum est jus quo devincta est hominum societas* (De invent. II).

Infatti il riconoscimento esteriore della personalità giuridica dell'uomo è l'idea cardinale di tutto quanto il diritto. Sotto l'aspetto teorico la scienza del diritto non è che l'ordinata e logica deduzione ed esplicazione delle verità e regole giuridiche in quella suprema verità e regola implicitamente

contenute. Sotto l'aspetto pratico il mentovato principio compendia tutto il diritto positivo, il quale dee mirare ad attuare e concretare nelle norme ed instituzioni civili e politiche la suaccennata regola suprema nelle diverse e molteplici applicazioni che può ricevere.

In secondo luogo, l'additato principio contiene il germe di ogni perfezionamento nel diritto. Giacchè la legislazione sì spontanea che scientifica, per usare la frase di uno fra più insigni e benemeriti giuristi del nostro secolo, ossia il diritto consuetudinario e il diritto scritto è tanto più perfetto, quanto più completamente e più efficacemente va attuando il riconoscimento pratico d'ogni legittima esplicazione della personalità giuridica dell'uomo individualmente o collettivamente considerato.

In terzo luogo, lo stesso principio serve di fondamento alla critica filosofica del diritto positivo per giudicare il procedimento del medesimo nel passato, dà lume e guida per recar giudicio sullo stato del diritto positivo di una data epoca, di un dato popolo, e per lo studio comparativo delle legislazioni.

Per ultimo, a confermare la verità e l'importanza non meno teorica che pratica della enunciata formola si presenta una riflessione che non credo di dover pretermettere, ed è che il riconoscimento della personalità giuridica dell'uomo come supremo principio del diritto giova a chiarire la ragione per cui il Cristianesimo abbia così potentemente influito a migliorare le dottrine giuridiche, a riformare poco per volta il diritto positivo in tutti i suoi rami, e imprimergli un impulso di progressivo perfezionamento. La ragione si è che nessuna dottrina filosofica, morale e religiosa ha fatto meglio conoscere la natura dell'umana personalità, nessuna ha elevato a tanta altezza l'importanza e la dignità della personalità individuale dell'uomo come il Cristianesimo. I suoi dogmi più sublimi, i suoi stessi misteri più augusti e venerandi mirano maravigliosamente ad innalzare e far comprendere il pregio dell'umana personalità. Questo valore immenso dato dal Cristianesimo all'umana individualità doveva tosto o tardi influire, come infatti influì e influisce direttamente o indirettamente sulle scienze che hanno per oggetto l'uomo e la società, e sulle leggi e instituzioni che regolano i rapporti sociali.

CONSIDERAZIONI

INTORNO ALLA COMMEDIA GRECA

DI MEZZO

DI

DOMENICO CAPELLINA

Memoria approvata nell'adunanza del 25 febbraio 1858.

DISSERTAZIONE PRIMA.

Da quelli fra i grammatici antichi, i quali presero a ragionare della commedia greca, si suol dare il titolo di commedia di mezzo a tutte le comiche rappresentazioni, che ebbero luogo sul teatro d'Atene, dal tempo, in cui fu costretta a ritirarsi dalla scena la libera Musa della commedia antica, fino al tempo, in cui per opera di Menandro e di Filemone vi fece la sua comparsa quella della commedia nuova, modello e regola dell'arte comica presso tutte le altre nazioni e in tutte le età posteriori. Della commedia antica ci rimane ancora viva e spirante l'immagine in Aristofane, della nuova possiamo ravvisare almeno in parte i lineamenti e nella esposizione che da qualche antico si fece di taluna delle commedie di Menandro e in quelle di Plauto e di Terenzio, che dei poeti della commedia nuova furono imitatori e più spesso copiatori servili. Quella di mezzo è la men nota di tutte, sì perchè scarsi e di poca importanza sono i frammenti, che ne possediamo, oltre il Pluto di Aristofane, e sì ancora perchè, avuto riguardo alla molta varietà di argomenti e alle molteplici forme abbracciate dai cultori di essa, il solo Pluto non può bastare a chi tutti si voglia rappresentare i caratteri e le sembianze di quella.

Quindi è naturale che si affaccino alla mente del critico molte quistioni, lo scioglier le quali può tornare dilettevole insieme ed utile non solo alla storia dell'arte comica nella Grecia antica, ma ancora in generale ai progressi della medesima arte presso le nazioni moderne, le quali, per la non mai mutata natura dell'ingegno umano, e dei principii, su cui le arti imitative pongono le loro fondamenta, possono trarre grandissimi ammaestramenti dalla cognizione delle vicende di alcuna di tali arti presso i popoli antichi e specialmente presso di quelli, che con più potente ingegno e con maggior lode le hanno coltivate. La commedia di mezzo fu una forma particolare e determinata dell'arte comica, al pari dell'antica e della nuova? Fu essa una forma nuova, o il risorgere di forme note già prima, o un loro successivo e continuato svolgimento? Fu essa un progresso, o un decadimento dell'arte?

Per rispondere in modo conveniente a siffatte domande è prima di tutto necessario il conoscere che cosa abbia fatto questa commedia di mezzo, quale fosse lo scopo, che si proponeva, quali i mezzi adoperati per ottenerlo: e una tale ricerca, la quale abbraccia l'intera storia di detta commedia, sarà da me fatta in questa prima dissertazione, serbando ad una seconda il ragionare criticamente intorno alla medesima e il dar compimento al lavoro, che mi sono proposto. Viveva ancora Aristofane e già le pubbliche sventure e i gravi pericoli, in cui si trovava lo Stato, avevano porto occasione o pretesto ai nemici della libertà del teatro comico Ateniese, di alzar la voce contro di quella e di chiedere che fosse frenata con decreti e con leggi. Si fecero i decreti; ma da principio duravano poco e la libertà schiacciata un istante, risorgeva di lì a poco più audace e più violenta per l'onta che aveva patita, e primi ad essere bersaglio alla satira de' comici erano coloro stessi, che tali decreti avevano proposto o sostenuto coll'autorità loro e colla loro parola. Tuttavia non si stancavano gli avversarii di quella libertà, e, le cose della repubblica andando sempre più in declinazione, ricorrevano a nuove deliberazioni, le quali duravano, aiutate da quello scoraggiamento, in cui sogliono cadere i popoli quando le cose loro volgono a mal termine, e dal ritrarsi dei ricchi, per le scemate ricchezze a cagione della guerra, dal far le spese delle rappresentazioni, le quali erano gravissime; ma in tempi migliori si sostenevano di buon grado, come quelle che erano un mezzo potente di acquistarsi l'amore della moltitudine e di sostenere e spingere innanzi se stessi e la propria parte a danno degli avversarii, contro i quali si combatteva col-

l'arma del ridicolo, che spesso è la più efficace di tutte. Gli effetti di questa lunga lotta, che la commedia antica dovette sostenere fino a quel giorno, in cui essa venne interamente a mancare, si scorgono manifesti nelle opere di Aristofane, il quale ne' primi suoi drammi si mostra più terribile ed austero, nei seguenti già mescola alla satira personale le ardimentose creazioni della sua fantasia e fa prova di maggior grazia e gentilezza d'immagini e di stile, quasi cercando di ottenere con queste una parte di quel favor popolare, che più non voleva o non poteva ugualmente procacciarsi colla sola audacia degli assalti contro i principali fra i cittadini, contro i capitani e i demagoghi; negli ultimi poi si mostra sollecito di coprire in certo modo i suoi intendimenti, e avvilupparli in ambagi, e la sua critica, di personale che prima era, si fa più generale e indeterminata, o riserbando le personalità ad uomini di nessun conto e spregiati da tutti pei vizii e la vanità loro, piglia più specialmente di mira le istituzioni e i costumi e le utopie de' cittadini (1). Quindi quell'uomo che giovanetto ancora non si era peritato di porre sulla scena il demagogo Cleone (2), appunto allora ch'egli godeva maggiormente del favor popolare e pareva sfidare ogni opera de' suoi avversarii colla gloria di fresco acquistatasi nella liberazione di Sfacteria dalle mani dei Peloponnesiaci, nè si trovava artefice, che osasse fare la maschera, che sul teatro ne rappresentasse le sembianze; quell'uomo, che aveva fatto segno delle sue terribili facezie e Lamaco e Demostene e Nicia (3), quando essi tenevano in loro mano il potere e capitanavano le forze dello Stato, e il popolo stesso dipingendolo vecchio barbogio e superstizioso e facile a lasciarsi in balia d'ogni ciurmadore, che il guadagnasse colle lusinghe e colle adulazioni; quel medesimo uomo, per poter poi mordere in modo men chiaro i vizii e le ubbie degli Ateniesi, ricorreva all'invenzione fantastica d'una città aerea fabbricata dagli uccelli, e a persuadere la pace, a pro della quale aveva così apertamente parlato nella commedia degli Acarnesi, metteva sotto gli occhi del popolo le turpitudini della sua Lisistrata, e lasciava di mordere i maggiorenti della repubblica, volgendosi invece a biasimare le pericolose novità introdotte da Euripide nell'arte della tragedia, e a combattere le utopie de' filosofi intorno alla comunione degli averi e delle

(1) Meineke, Storia della commedia greca, pag. 896-97.

(2) V. la sua commedia intitolata *I Cavalieri*.

(3) V la medesima commedia e *Gli Acarnesi* e *La Pace*.

donne, e alla migliore distribuzione delle ricchezze. Questo egli fa appunto nelle *Concionatrici* e nel *Pluto*, l'ultima delle quali da lui rifatta quando già era spenta la libertà della commedia antica, è come dicemmo il solo esempio, che intero sia da noi posseduto della commedia di mezzo, quantunque e nelle Concionatrici e in altre, che la precedettero, già si mostri uno dei principali caratteri di essa, l'appigliarsi cioè ai generali piuttosto che ai particolari, e porre le creazioni del poeta in luogo della pittura della vita vera e reale. Ma nelle Concionatrici rappresentate solo tre anni prima del rifacimento del Pluto, ancora s'incontrano alcuni segni dell'antica libertà, come per esempio la parodia, che le donne, diventate padrone della repubblica, fanno dell'adunanza popolare e dei discorsi che si solevano tenere in quella: e la forma della commedia antica è ancora conservata insieme co' suoi cori melici, quantunque siano questi più innocenti che quelli delle commedie anteriori, e manchi la parabasi, parte caratteristica della commedia antica e di mezzo, di cui seppe giovarsi assai bene Aristofane per parlare di sè al popolo, difendere le sue ragioni e vendicarsi di coloro, che gli davano travaglio. Nel Pluto invece la realtà scompare intieramente per dar luogo alla invenzione fantastica del poeta ed alle sue allegorie; Atene co' suoi cittadini più non si mostrano agli occhi degli spettatori, e la scena del dramma potrebbe essere facilmente trasportata in qualunque altro paese, manca la parabasi, ed insieme con essa i cori melici, e la forma dell'antica Commedia, venuti meno i suoi caratteri principali, è interamente perduta. Infatti quale è lo scopo di questa commedia? Non già il porre un rimedio ai mali della repubblica, il far cessare la rovinosa guerra del Peloponneso, il dimostrare come la devastazione del territorio, la miseria dei contadini, il disagio in cui viveva la popolazione della città accresciuta di tante migliaia di persone accorse per tema dei nemici dai campi nelle mura d'Atene, erano conseguenza dell'ambizione degli oratori e dei demagoghi, i quali amavano di pescar nel torbido, e dei capitani, che dalla guerra traevano ricchezze ed onori; ma bensì il combattere un' utopia e un pregiudizio, che poteva avere la sua parte ridicola, ma nel fatto non era tale da creare un pericolo alla società, e perciò non richiedeva punto che i buoni cittadini, ed il poeta comico, il quale si proponeva di rappresentare ne' suoi drammi l'opinion loro, si adoperassero a stornarlo. Quali sono i mezzi dal poeta usati per ottenere il suo scopo? La invenzione d'una favola tutta lontana dalla realtà, improbabile e fantastica, e vera ed utile soltanto

allora che si considera non in se stessa, ma in quello che sotto lei si nasconde, e le azioni e i discorsi di due astrazioni personificate, quali sono la Ricchezza e la Povertà, intorno alle quali si raggruppano, egli è vero, alcuni personaggi reali, ma posti lì solo per compiere il quadro e dar facoltà alla tesi del poeta di svolgersi compiutamente. I sofisti e i filosofi avevano preso a discorrere della distribuzione della ricchezza fra gli uomini e avevano immaginato quella loro repubblica, in cui teoricamente si dimostrava come per la comunione dei beni sbandir si potesse la povertà dal seno della sociale convivenza. Quindi non mancavano coloro, che pigliando questi sogni per cosa praticabile, e l'ombre come salda cosa trattando, si lagnavano della provvidenza, che volesse in modo irregolare ed apparentemente ingiusto spargere fra gli uomini le dovizie, e avrebbero desiderato che ella facesse differenza fra i buoni e i malvagi, e a quelli concedesse in premio i suoi doni, questi punisse col privarli d'ogni cosa e ridurli alla miseria. Che fa Aristofane per mettere in chiaro la stoltezza di queste lagnanze e di questi desiderii? Finge che Cremilo, contadino dabbene, ma poverissimo vada a consultare l'oracolo di Delfo per sapere in qual modo potrà egli uscire una volta dalla miseria, che lo travaglia, e sia da quello consigliato a non più staccarsi dall'uomo, in cui prima s'imbatta all'uscire dal tempio. Segue egli il consiglio, e avvenutosi in un uom vecchio e cieco s'accompagna con lui, e condottolo alla soglia della sua casa, viene a sapere ch'egli è Pluto, cioè la Ricchezza, e fattosi promettere, che, quando egli venga a ricuperare la vista, si volgerà del tutto co' suoi doni agli uomini dabbene, abbandonando i malvagi, lo mena con sè entro di quella. Quindi rivolge ogni suo pensiero a procurare la guarigione di lui, e disponendosi di condurlo a tal fine nel tempio di Esculapio, ecco a lui venire la Povertà cercando di toglierlo da questo proposito col mostrargli le male conseguenze, che da quello sarebbero derivate. Quando le ricchezze si concedano ai buoni soltanto e si nieghino ai tristi, tutti cercheranno di essere buoni per ottenerle, e la povertà non potrà più aver luogo nel mondo; ma con lei sarà tolto ogni stimolo all'operosità umana, e la ricchezza di tutti andrà a terminare nella miseria di tutti. Imperocchè chi vorrà attendere alle arti ed ai mestieri, onde si producono quelle cose, di cui abbisogna l'umana vita? Chi, essendo ricco, vorrà ancora darsi ai faticosi ed umili lavori del falegname, del sarto, del fornacciaio, del mastro da muro, dell'agricoltore? Nè vale il dire, che queste cose le compieranno i servi; poichè nessuno quando abbia da vivere

agiatamente si esporrà ai gravi pericoli che portano con sè la pirateria e le altre male arti, con cui si riducono gli uomini liberi in ischiavitù, nè sfiderà i travagli della navigazione per andare a venderli ove ne fosse bisogno. Quindi ciascuno per se medesimo dovrebbe provvedere alle necessità sue, e tutti sarebbero non già ricchi, ma poveri egualmente. Nè la Povertà è tale, che non possa anch'ella concedere i suoi beni agli uomini e questi forse maggiori di quelli, che la ricchezza loro conceda; essa infatti obbligandoli ad essere attivi ed operosi mantiene la sanità del loro corpo, che la ricchezza e snerva e corrompe e assoggetta a molti malori, mantiene eziandio la sanità dell'animo facendolo temperante e modesto, al contrario della ricchezza, che lo rende inchinevole alle ingiurie e ai soprusi. Ma queste sono parole e ragioni gettate al vento; chè Cremilo non si rimuove dalla presa deliberazione, e condotto il vecchio cieco nel tempio del Dio, e tenutolo ivi una notte, il rimena a casa per benefizio di quello sano e con ottima vista, onde ne viene, che ricchi e mendici mutano condizione secondo la vita loro buona e malvagia, e gli uni s'allegrano e si lagnano gli altri, e ringraziano Pluto o lo caricano di vituperi. Ma le previsioni della Povertà già cominciano ad avverarsi. Gli uomini buoni divenuti ricchi e i malvagi mutandosi in buoni per divenir ricchi essi pure, si scordano degli dei, dai quali più non han nulla da chiedere, cessano i sacrificii e le offerte, Giove è sdegnato e gli dei privi d'ogni cosa patiscono di fame nel cielo. Mercurio non può reggere a tanto disagio; viene in terra a Cremilo e ottiene a fatica di essere impiegato ne' più bassi ufficii della famiglia di lui; un sacerdote di Giove abbandona il dio che aveva servito per l'innanzi e si presenta a Pluto offerendogli l'opera sua, e la statua di Giove, che come tutti gli altri dei è diventato oramai un essere disutile per gli uomini, è tolta dal luogo che prima occupava per cederlo a Pluto, unico iddio, al quale gli uomini si mostrino riverenti e divoti.

Questa esposizione del Pluto di Aristofane, che io ho creduto necessario di fare, sì perchè i grammatici antichi s'accordano nel riconoscere in esso il primo esempio della commedia di mezzo, e sì ancora perchè tra le produzioni di quella è la sola, che a noi sia venuta intiera, giova a mettere in chiaro, come la prima forma assunta dalla commedia di mezzo fosse l'allegoria e il primo argomento da lei trattato avesse carattere non già politico, ma sociale, e dal campo dell'azione si trasportasse in quello dei principii e delle teorie. Nè mancarono in appresso coloro, che si

mettessero per questa via dietro le orme di Aristofane; chè a me pare che al Pluto, se non per la forma, certamente per la natura del soggetto molto si dovesse accostare quella commedia, che Antifane, uno dei più illustri poeti della commedia di mezzo scrisse col titolo di Abolizione del danaro (1), nella quale egli doveva certamente pigliar di mira le dottrine di Platone e di altri utopisti, i quali, facendo comuni le sostanze fra gli uomini, volevano togliere di mezzo il danaro come origine e fomite d'ogni male, e dimostrare le ridicole conseguenze di quella predicata comunione, e lo scompiglio, che nella umana società avrebbe necessariamente prodotto. E come Antifane aveva preso per modello il Pluto, così Amfide ed Alessi dalla commedia delle Concionatrici, che, come già dicemmo, per la natura dell'argomento si accosta a quella di mezzo, derivarono la veramente comica pittura di una repubblica retta dalle femmine in quelle due loro commedie, che egualmente s'intitolano Ginecocratia o Governo delle donne (2), forse indotti a ciò dall'ambizione delle Ateniesi, che, cresciuta nella città la smania di lodare ed imitare i costumi degli Spartani, cui specialmente si mostravano affezionati i primarii cittadini per amore di dominio e d'oligarchia, mal si contentavano della condizione, in cui erano tenute, e desideravano quella maggior libertà e quelle più larghe prerogative, di cui godevano le donne spartane, libertà e prerogative biasimate da Aristotele nel secondo della sua Politica con queste parole, che mi piace di riferire, perchè si veda come una tale condizione di cose potesse dare buon argomento di belle ed urbane facezie ad un comico poeta. — Arrogi che la condiscendenza verso le donne nuoce e alla proposta forma di governo e alla prosperità dei cittadini; imperocchè siccome parti della casa sono l'uomo e la donna, così è da credere, che la città pur si divida in due parti, in quella degli uomini e in quella delle donne, dimodochè in quei governi, in cui si fa poca stima di quel che riguarda le donne, è necessario pensare che ad una metà della cittadinanza ivi non provvedano le leggi, come appunto in Isparta è accaduto. Ed invero volendo quel legislatore, che tutta la città fosse tollerantissima delle fatiche, questo suo proposito fece molto palese per quel che spetta agli uomini; ma quanto alle donne punto non se ne diede pensiero:

---

(1) Ἀργυρίου ἀφανισμός. V. nei frammenti raccolti dal Bothe dietro la scorta del Meineke. Antifane, Commedia XIV.

(2) Γυναικοκρατία Amfide, Framm. Comm. VI, e Alessi, Framm. Comm. XXV.

poichè esse vivono proclivi ad ogni genere d'intemperanza e di mollezza. Onde ne viene di necessità che in tal repubblica si faccia grande stima delle ricchezze, essendo specialmente gli uomini soggetti alle donne, come avviene per lo più nei popoli dediti alle armi ed alla guerra, se ne togli i Celti; . . . . conciossiachè non operò senza giusta ragione quel primo, il quale favoleggiando mostrò Venere a Marte congiunta; lasciandosi cotal genere d'uomini facilmente trascorrere all'amor delle donne . . . E questo ebbe luogo presso i Lacedemoni, e molte cose nello stato loro si governano per opera delle donne. Infatti che differenza vi è mai tra il governare le donne, e l'essere dalle donne signoreggiati coloro, che governano? Le conseguenze ne sono le stesse. E quantunque l'audacia non punto utile nelle quotidiane faccende torni giovevole nelle cose di guerra, tuttavia anche in questo le donne degli Spartani furono dannosissime alla città, e bene il dimostrarono al tempo della invasione de' Tebani, imperocchè non solamente non riuscirono d'utilità alcuna, come suole avvenire nelle altre città; ma ancora furono esse cagione di maggior tumulto che i nemici. Questa condiscendenza degli Spartani verso le loro donne ebbe da principio un ragionevole motivo, ch'essi a cagione della guerra vivevano lungo tempo lontani dalle case loro, combattendo prima contro gli Argivi, e poi contro gli Arcadi e i Messenii, e nella pace già li trovava il legislatore apparecchiati a buona disciplina per cagione della vita loro militare, chè molte parti virtuose in quella si contengono. Ma narrano che Licurgo tentasse dapprima di condurre le donne sotto il dominio delle leggi, e si fosse quindi ritratto da tal proposito, vedendole poco disposte ad ubbidire (1). —

Non meno dell'allegoria fu agli scrittori della commedia di mezzo una ricca miniera, da cui trarre argomenti, la parodia, quella specialmente, che pigliava di mira le opere de' tragici e ne travestiva le invenzioni e le forme. Il ridicolo sta sempre vicino al grandioso e al sublime, e ciò più che altrove suole accadere nelle opere de' poeti, che dovute in gran parte all'immaginazione e al sentimento richiedono in chi le contempla, e ne vuol tutta scoprire la bellezza, una mente nobile ed alta, ed una conveniente potenza di tener dietro immaginando anch'esso e sentendo ai voli del poeta; ma quando cadono in balia della fredda ragione e del

(1) Aristotele, Polit. II, 7.

giudicio de' volgari facilmente si spogliano d'ogni loro grandezza; allora i leggiadri portati dall'immaginazione, per chi non conosce la forza di questa maravigliosa facoltà dell'animo umano, diventano cose improbabili e puerili, gl'impeti del sentimento paiono a chi non è capace di comprenderli esagerazioni e delirii, ed esce il ridicolo da quelle medesime fonti da cui sgorgava per altri in copia il grandioso e il sublime, e dà luogo alla parodia, se un uomo d'ingegno sceglie quello che vi ha di artistico in questo giudicio de' volgari, e travestendo l'opera del poeta o guastando la proporzione che è tra gli elementi di quella, ne crea un'altra atta a produrre l'effetto contrario. E che questo realmente soglia avvenire ben lo credettero i Greci, quando ad Omero stesso attribuirono e l'Iliade e la Batracomiomachia, ponendo così l'una vicina all'altra per tempo, e l'opera sublime e la sua parodia fondata appunto sulla rotta armonia degli elementi, che componevan l'Iliade, e sulla sproporzione che appare palese tra l'elemento naturale e il soprannaturale, la piccolezza della materia e la grandiosità della forma.

La lotta che si scorge vivissima in tutta la storia dell'arte antica fra gli scrittori comici ed i tragici doveva per tempo indur quelli a far soggetto delle loro parodie le opere di questi. E una tal lotta era naturale tra uomini che si proponevano per fine dell'arte loro la pittura della realtà e del presente, ed uomini che oltre alla realtà e fuor del presente sollevandosi andavano in traccia della idealità e la facevano argomento delle loro composizioni. Il comico tutto s'affaticava a dipingere l'uomo qual era, il tragico a salire al concetto di quello, ch'egli essere dovrebbe; l'uno poneva sulla scena con tutti i suoi difetti, con tutte le sue contraddizioni l'uomo quale egli lo trovava a' suoi dì nelle piazze, nelle adunanze, tra le cure della civile e della domestica vita, l'altro esponeva all'ammirazione degli spettatori l'uomo antico, quale gli permettevano d'immaginarselo quelle specie d'oscurità, che avvolgeva l'età eroica e l'opera de'poeti epici, che erano stati gli storici di quella, l'uomo antico grande nelle sue virtù, grande nelle sue colpe, grande nelle sue sventure. Quindi il contrasto era inevitabile, e si fece maggiore quando corrotta da Euripide e da'suoi seguaci l'arte tragica, si cominciò ragionevolmente a temere che diventasse un mezzo di corruzione pel popolo, ne guastasse il giudicio morale, e lo rendesse effeminato e violatore d'ogni umana e divina legge, dietro l'esempio degli uomini dell'età eroica, i quali il poeta tragico gli poneva innanzi allo sguardo. La tragedia uscita dal tempio

aveva conservato per lungo tempo l'antica sua indole religiosa, ed ogni rappresentazione tragica era un argomento della divina potenza, cui non si poteva sottrarre alcun uomo, di quella potenza la quale reggeva le cose dell'universo a sua posta, e richiedeva dagli uomini l'espiazione anche di quelle colpe, che, involontariamente commesse, pure turbavano l'ordine della natura, e imprimevano negli animi una macchia, che doveva essere cancellata per ridonar loro la quiete e renderli puri nuovamente al cospetto dei numi. Edipo involontariamente parricida e incestuoso volgeva contro di se medesimo le mani violente e si strappava gli occhi, che avevano contemplata la sua turpitudine, e quindi andava cieco e ramingo lontano dalla sua patria mendicando la vita nell'esilio e moriva in terra straniera nel bosco delle Eumenidi, terribili ministre della vendetta degli dei. Oreste anch'esso involontariamente, o per ragionevole cagione macchiato del sangue materno, fuggiva inseguito in ogni parte da quelle medesime punitrici divinità, e non riacquistava la pace e la quiete dell'animo suo prima che una divinità maggiore e il più grande fra i tribunali della terra lo giudicasse e lo rimandasse assoluto. Sofocle cominciò ad introdurre nella tragedia, allato alle dottrine religiose, la filosofia; ma quella filosofia nobile e pura, che, pigliando per suo fondamento i dettati della ragione e dell'universale consenso, serve a rischiarare e a confermare gl'insegnamenti della religione; Euripide v'introdusse la sofistica, le argute argomentazioni della scuola, gli artifizi della tribuna: e gli eroi, ch'egli poneva sulla scena invece di fare essi medesimi la vendetta delle loro colpe, o riconoscere in quelle il potere del destino e della divinità, cui non era loro concesso di sottrarsi, cercavano sottilmente di scusarle argomentando e perorando Gli antichi poeti tragici avevano scelto fra gli uomini dell'età eroica i più nobili esemplari di virtù e di grandezza, Prometeo, Ercole, Agamennone, Oreste, e la tragedia era diventata per opera loro una scuola, da cui il popolo era educato ai sentimenti più nobili e generosi; Euripide dando al patetico molto maggiore importanza che essi non davano, e, col riporre nella violenza delle passioni la causa degli errori e delle colpe umane, lasciando quasi intieramente in disparte l'elemento religioso, e non curando il salutare terrore, che da quello derivava, trasse dalle favole eroiche i personaggi, che più furono dominati dalla violenza delle passioni e specialmente le donne, ed empiè la scena di turpi ed incestuosi amori, colle sue Fedre e Stenobee, indotte da libidinosa brama a tentare la pudicizia di giovani virtuosi, e a cercare la morte di quelli per vendicarsi

del patito rifiuto, e fratelli e sorelle, che, come gli Eolidi Canace e Macareo, erano spinti ad incestuosi abbracciamenti non dalla volontà del destino, nè ignorando, come Edipo, la colpa loro; ma consapevoli e volontarii e per solo impeto dello sfrenato animo loro: e guastando le grandiose e terribili forme del dramma tragico antico aveva dato molto maggior luogo di quello che prima solevano avere in esso, alle monodie, ed alle cantilene, tutto intento non a rinvigorire gli animi de' cittadini, ma a cercare le più interne fibre del loro cuore cogli acuti pungoli della pietà, e renderli teneri e inchinevoli a quel sentimento di compassione, che fa gittare facilmente un velo sopra le umane colpe, e ravvisare in chi le commise non un reo, ma un infelice, guastando così ogni senso morale, e spogliando i delitti commessi per violenza di passione di tutta quella bruttezza, che li potrebbe far abborrire, sicchè all'animo egualmente passionato diventano e stimolo ed esempio. Aristofane con quell'acutezza di mente e con quella rettitudine di giudizio, che gli facevano scorgere i pericoli, ond'era minacciato il popolo Ateniese, e correre prontamente al riparo, vide la terribile potenza di corruzione, che era nei nuovi intendimenti e nelle nuove forme della tragedia euripidea aiutate dalla grandezza d'ingegno e dallo stile chiaro, semplice e popolare di quel pericoloso poeta, e continuamente lo prese di mira nelle sue commedie ora con brevi, ma pungenti e argute allusioni, ora parodiando, come nella commedia delle *Tesmoforeggianti*, le sue patetiche cantilene, ora facendo quasi una compiuta censura del suo sistema tragico, posto nella commedia delle Rane a contrasto con quello d'Eschilo, e notandone la mala scelta degli argomenti, la sovrabbondanza delle monodie e de' cantici patetici, e la cura delle minuzie, che i grandi poeti fuggivano, e la moralità del popolo corrotta colla pittura di turpi amori e di vergognosi delitti, e colle sottigliezze de' dialettici e de' sofisti. L'opera di lui fu seguitata dai poeti della commedia di mezzo, i quali non rimasero contenti a biasimare in generale i mutamenti introdotti da Euripide nell'arte tragica, nè questa o quella parte de' suoi drammi; ma ne travestirono le intiere tragedie per mezzo della parodia, la quale dava loro opportunità nel medesimo tempo e di mettere in mostra i difetti di quello e di trarre vantaggio della popolarità, ond'egli godeva, la quale comunicavasi necessariamente a coloro, che lo assalivano, ed erano volentieri uditi dalla moltitudine, che naturalmente si compiace di vedere fatti argomento di riso quegli uomini, che più la signoreggiano coll'ingegno, quasi vendicandosi in tal

modo della morale violenza, che da loro le è fatta. Tra i titoli delle commedie di Antifane, che insieme con alcuni frammenti sono a noi pervenuti, io ne trovo molti che sono pur titoli di tragedie o conservate o perdute di quel tragico poeta Ateniese, quali sono l'Atamante, che poteva essere parodia dell'Ino di Euripide (1), o dell'Atamante di Senocle, uno dei poeti della scuola Carcinea (2), l'Eolo che certamente era un'imitazione burlesca dell'Eolo euripideo (3) già pigliato a gabbo da Aristofane nella perduta sua favola dell'Eolosicone (4), e secondo l'opinione del Valckenaer (5), serba nel prologo due versi, che sono appunto i primi, tolti di peso dal prologo di quella tragedia, l'Alcesti, in cui avranno dato argomento ad assai comiche scene e la viltà di Admeto, che lascia morire la moglie per salvar se medesimo, e s'adira col vecchio padre che non è disposto a fargli dono della poca vita che gli rimane, e la ghiottornia e l'intemperanza d'Ercole, e il bel contrasto tra una moglie, che generosa si sacrifica alla morte per togliere dalla mano di quella il marito, colle donne che vivevano ai tempi di Antifane e coi loro costumi porgevano sì copiosi argomenti alla satirica musa dei comici poeti, l'Antea, in cui forse ad imitazione della Stenobea d'Euripide (6), si esponevano ridevolmente le avventure di Bellerofonte con quella impudica moglie di Preto, il Ciclope, il Meleagro (7) e la Medea (8). Nè minor copia di titoli corrispondenti a quelli di tragedie euripidee io scorgo nei frammenti di Eubulo, il quale dall'Antiopa d'Euripide (9) traendo l'argomento della sua (10), dipingeva comicamente le avventure di quella infelice figliuola di Nitteo, re di Tebe, i travagli, che dovette sopportare data in balia d'un'altra donna, che fu Dirce, la moglie di Lico fratello di Nitteo, e l'educazione e la vita de' due figliuoli di lei Zeto ed Anfione, finchè, capitata essa fra quelli, la riconoscono per la madre loro e puniscono colla morte la crudele sua persecutrice. Furono conservate da Ateneo alcune parole, in cui un personaggio di quella

(1) V. i Frammenti d'Euripide raccolti dal Wagner, pag. 714.
(2) V. Frammenti de' tragici raccolti dallo stesso, pag. 83.
(3) Framm. d'Eurip. pag. 624.
(4) Framm. d'Aristofane in fine all'Aristofane del Didot, Parigi 1838, a pag. 463.
(5) Valckenaer, ad Euripidis Hippolitum, v. 1303.
(6) Framm. d'Euripide, pag. 778.
(7) Ivi, pag. 744.
(8) Antifane, Framm. comm. IV, VI, XI, XV, LXXV, LXXXVII, XC.
(9) Framm. d'Euripide, pag. 661.
(10) Eubulo, Framm. comm. V.

commedia, probabilmente uno Spartano, indicava scherzevolmente i caratteri per cui si distinguevano tra loro i suoi concittadini, gli Ateniesi e i Tebani. Noi, diceva egli, siam valenti nel mangiare e nel sopportar la fatica, gli Ateniesi nel ciarlare e nel mangiar poco, i Tebani nel mangiar molto (1), e quelle d'un altro personaggio, e forse di Dirce o di Lico, o, come piace di credere ad altri, della madre stessa a Zeto ed Anfione, invitandoli ad andare l'uno in Tebe e l'altro in Atene, e cogliendo nello stesso tempo il destro di mordere la voracità dei primi e l'amor dei secondi per la musica e per la vita disoccupata ed oziosa. « Comando a te o Zeto di andare di qua ad abitare nella sacra terra di Tebe, poichè ivi si vende il pane a buon mercato, e tu hai sempre molto aguzzata la fame, e ad Anfione peritissimo dell'arte musicale di andarsene all' inclita Atene, dove i figlinoli dei Cecropidi in ogni tempo facilmente patiscono di fame, pascendosi d'aria e di speranze (2), » s'aggiungano all'Antiopa il Bellerofonte, che se era una parodia, come ben pare, della tragedia d'Euripide egualmente intitolata (3), doveva rappresentare non più le insidie di Antea o di Stenobea, di cui sopra abbiamo fatto un cenno; ma il salire di Bellerofonte sul Pegaso al cielo per pigliar luogo tra gli dei, e come per l'ira che provò Giove di tanto ardimento, punto il suo cavallo alato da un tafano, egli di là precipitasse a terra e ne rimanesse zoppo e lacere le vesti, e solitario errasse nei campi Alei, rodendo, secondo la bella espressione d'Omero, il proprio cuore, finchè tornato in se stesso e riconciliatosi cogli dei, giunse tranquillo al termine della sua vita (4), e il Dolone che trattava forse il medesimo argomento che il Reso euripideo, cioè l'esplorazione fatta nel campo degli ausiliari di Troia e specialmente dei Traci da Ulisse e Diomede, e lo imbattersi di loro in quell'esploratore troiano (5), e l'Ione e la Medea, e fors'anche la Semele, o, come altri l'intitolano, il Bacco (6), che poteva pur avere una qualche relazione colle Baccanti. Nè io mi arresterò qui punto a ragionare dell'Elena (7) e del Tereo di Anassandride,

(1) Eubulo, Framm. comm. I.
(2) Ivi, Framm. 2.
(3) Frammenti d'Euripide, pag. 682.
(4) Eubulo, Framm. comm. VIII.
(5) Ivi, comm. XV.
(6) Ivi, comm. XX, XXVIII, XLVII.
(7) Anassandride, Framm. comm. VIII e XXXIII.

del Ceneo (1) di Ararote, del Meleagro e del Tereo (2) di Filetero, dell'Io (3) di Anassila, e dei sette a Tebe d'Anfide e di Alessi (4), e di alcune altre commedie appartenenti al periodo dell'arte, di cui io ragiono, e probabilmente parodie tutte quante di tragedie d'Euripide o d'altri poeti, ma d'Euripide le più, e per le ragioni da me sopra esposte, e perchè erano cresciuti a dismisura gli ammiratori di lui, che, come suole avvenire, non rifinivano mai di lodarlo e di deliziarsi unicamente de' suoi versi, facendo nessun conto di quelli degli altri; onde Assionico metteva in ridicolo questa fanatica adorazione in una sua commedia intitolata il Filenripide (5), come in tempi a noi vicini furono pur fatti argomento di commedia i fanatici ammiratori del Metastasio. Nè aggiungerò parole per chiarire maggiormente questa continua battaglia mossa dai poeti comici contro de' tragici, la quale nata, come io già diceva, in tempi più antichi, era stata forse rinvigorita dal bisogno di trovare argomenti di commedia in un tempo, in cui era vietato il trarli dagli uomini e dalla società, fra cui viveva il poeta, e l'attualità, come ora si direbbe, era dal teatro sbandita, e da una specie di rivalità, per cui il poeta comico vedeva di mal occhio la grande riputazione, che il tragico si acquistava con mezzi, che gli parevano più facili di quelli da lui adoperati. Il che mi pare che sia chiaramente espresso in questo luogo della commedia d'Antifane, che aveva per titolo *La Poesia*. « La tragedia è poema fortunato sopra tutti gli altri; chè prima di tutto gli argomenti son noti agli spettatori innanzi che alcuno si esponga, sicchè il poeta non deve far altro che richiamarli alla memoria. Infatti se io dico Edipo, ci già sanno tutto il resto, il padre Laio, la madre Giocasta, quali le figlie, quali i figliuoli di lui, che patì, che fece egli. Se altri poi dice Alemeone, non v'ha fanciullo che tosto non sappia, come, perduto il senno, uccidesse la madre, e che presto si vedrà uscir fuori sdegnato Adrasto e poi di nuovo se ne andrà . . . . E quando i tragici non han più nulla da dire, e si trovano nei loro drammi a mal partito, alzano una macchina, con quella facilità con cui alzerebbesi un dito, e ciò basta a contentare

(1) Ararote, Framm. comm. II.
(2) Filetero, Framm. comm. VIII e XI.
(3) Anassila, Framm. comm. VII.
(4) Amfide, Framm. comm. XI; e Alessi, Comoi. XLIV.
(5) Assionico, Framm. comm. II.

gli spettatori. Nulla di tutto questo abbiam noi, ma ci bisogna trovare ogni cosa, nuovi nomi, i precedenti, l'azione, la catastrofe, il cominciamento; e se Cremete o Fidone tralasciano alcuna di queste cose, ne sono puniti coi fischi. Si mena buono invece a Peleo ed a Tenero (1). » Tuttavia non voglio tacere d'una bella lode della tragedia, la quale noi troviamo nei frammenti della commedia di Timocle, che s'intitolava *Le donne, che celebrano i baccanali.* « O mio caro, ascolta quello ch'io ti vo' dire. L'uomo è un animale per natura esposto a molti travagli e la vita mena con sè non pochi dolori. Quindi egli ha trovato questi sollievi (2) a' suoi affanni; poichè la mente scordatasi de' proprii mali e tratta piacevolmente a contemplare le altrui sventure, di là si parte con diletto insieme ed ammaestramento. Osserva, se ti piace, prima di tutto i tragici come ad ognuno rechino giovamento. Chi è povero, imparando che Telefo era più povero di lui, sopporta più facilmente la sua miseria; chi da qualche furore è assalito, ha innanzi l'esempio di Alcmeone. Questi ha male agli occhi? i figliuoli di Fineo erano ciechi. È morto ad alcuno un figliuolo? Niobe gli fa parer men grave il suo male. È zoppo quell'altro? egli vede innanzi a sè Filottete. E se v'ha alcuno che sia vecchio e infelice, impara che tale era pure la sorte di Eneo. Così ciascuno venendo a conoscere come altri abbia patito sventure molto più gravi di quelle, cui egli è soggetto, meno si lagna de' mali suoi (3). »

Oltre alle opere de' tragici, copiosi e belli argomenti di parodia porgevano agli scrittori della commedia di mezzo i poemi di Omero e specialmente l'Odissea, che per quella sua indole famigliare più s'accostava al carattere comico, onde vediamo le avventure di Ulisse e nell'antro di Polifemo (4) e in casa di Circe (5) e sulla spiaggia de' Feaci da Nausicaa discoperto (6) e in Itaca allorchè vi dimorava ignoto ancora a tutti e quando era dalla fedele Euriclea riconosciuto (7), essere state scelte a soggetto di commedia da molti poeti. Di altre favole epiche pur

(1) Antifane, Framm. comm. CXIV, Framm unico
(2) Le arti belle.
(3) Διονυσιαζουσαι. Timocle, Framm. comm. VI, Framm. unico.
(4) Antifane, Κύκλωψ, Framm. comm. LXXV.
(5) Anassila, Κίρκη Framm. comm. IX.
(6) Eubulo, Ναυσίκαα, Framm. comm. XXXII.
(7) Alessi, Ὀδυσσεὺς ἀπονιπτόμενος, Framm. comm. LXXXIII.

si valevano, come per esempio di quelle che riguardavano Elena, e i proci, che ambivano la mano di lei e la sua fuga con Paride (1), e di quelle, che narrando come Lino educasse Ercole nell'arte musicale (2), porgevano il destro di mordere coloro che ai tempi, in cui essi vivevano, si erano fatti corrompitori di quella medesima arte: chè i fatti mitologici e lontani e le antiche storie d'uomini rinomati per la loro sapienza o per la loro argutezza, come Esiodo, Archiloco, Solone ed Esopo (3) appunto sceglievano essi per valersene quasi di velo a coprire il biasimo delle cose e degli uomini dell'età loro, non sì che ne rimanesse celato; ma pur tanto che loro bastasse a schivare i pericoli, e a violare impunemente la legge. E parodie dovevano pur essere quelle loro commedie, le quali traevano argomento dalle teogonie e dalle storie dei numi (4), fatte prima, come vedremo, con intendimento filosofico, e in seguito per solo fine di porgere diletto agli spettatori rappresentando le contese degli dei, e il loro banchettare in quei conviti ricchi di quante delizie della gola producono la terra, l'aria ed il mare, nei quali era sempre ad Ercole serbata la parte di ubbriacone e di ghiotto, parte che noi lo vediamo rappresentare anche in poemi più serii, quali sono l'Alcesti d'Euripide, come già fu sopra notato, e l'inno di Callimaco a Diana (5). Così quel popolo, il quale per vendicare le offese fatte alla religione degli avi cacciava in esilio Anassagora, faceva scomunicare Alcibiade dai sacerdoti e condannava Socrate a bere la cicuta, punto non si adontava nel veder sulla scena Giove, che imitando le donne, che sono in sul partorire, metteva in luce il piccolo Bacco da lui portato innanzi nella divina sua coscia, o imitando gli uomini in non molto lodevoli amori, rapiva il giovinetto Ganimede, e le feste e le baldorie de' numi al nascere di Venere e di Pane (6), rappresentazioni condite con ischerzi che non l'avrebbero punto ceduta a quelli dell'irreligioso Luciano.

---

(1) Ἑλένη, Anassandride, Framm. comm. VIII; e Alessi, Framm. comm. XXXVI. — Ἑλένης μνηστῆρες, Alessi, ib. comm. XXXVIII. — Ἑλένης ἁρπαγή, ib. XXXVII.

(2) Λίνος, ib. LXXIV.

(3) Ἡσίοδος, Nicostrato, Framm. comm. VIII. — Ἀρχίλοχος, Alessi, Framm. comm. XIV. — Αἴσωπος, ib. V.

(4) Antifane, Ἀφροδίτης γοναί, Framm. comm. XXIX. — Eubulo, Σεμέλη ἢ Διόνυσος, Framm. comm XLVII. — Ararote, Πανὸς γοναί, Framm. comm. IV.

(5) V. 144-153.

(6) V. le commedie citate alla nota (4). — Γανυμήδης, Antifane, Framm. comm. XXXVIII.

Gli uomini avvezzi a darsi pensiero della cosa pubblica difficilmente peccano di puerilità e di frivolezza, poichè la pratica degli affari dà ai caratteri umani una certa gravità e sodezza. Avviene il contrario, quando vietato agli uomini di occuparsi delle cose dello Stato, si chiudono per dir così dentro il cerchio ristretto, monotono, minuzioso della vita casalinga. Allora è naturale, che scaduti da quella robusta virilità, cui prima erano giunti, rimbambiscano quasi e pongano ogni loro studio in cose piccole e vane, e più si compiacciano delle prove di bello spirito, che dei lampi nobilissimi dell'ingegno. Ciò avvenne in Atene. E come in tempi da noi meno lontani si vide un popolo dare a una sciarada a un logogrifo, e ad altri simili giuochi di parole quell'importanza, che sole meritano di avere le più gravi e nobili cose, così gli Ateniesi d'allora spasimavano per gl'indovinelli, od enigmi, ed assistevano pazientemente non solo, ma ancora con grande soddisfazione, a commedie, che ne erano un continuo tessuto. Antifane derideva questa smania degli enigmi in un bellissimo luogo del suo Afrodisio, il quale contiene un dialogo fra due personaggi di quella commedia (1). « Forse quand'io debbo parlare a te della pentola dico la pentola o non piuttosto un recipiente dal concavo corpo formato dal girar della ruota, composto di terra e cotto in casa diversa da quella della madre sua, gravido delle forme di novellino gregge nutrite col latte e tenerelle, in esso affogate? — Per Ercole tu mi vorrai morto, se non dirai tosto apertamente una pentola piena di carni. — Tu di' bene. Dovrò io dire l'effluvio del raggrumato latte di belanti capre mescolato coi biondi liquori dell'ape, collocato sopra d'un ampio recipiente, la vergine figlia di Cerere morbidamente avvolta in mille velami, l'uno coll'altro sottilmente congiunti, oppure ti dirò apertamente la focaccia? — Io voglio che tu mi dica la focaccia. — Il sudore della fontana di Bromio? — Dimmi in modo spiccio il vino. — Il rugiadoso umore delle Ninfe? — Lascia il resto e di' l'acqua. — L'aura che per l'etera spira odorosa di casia? — Dimmi in breve la mirra, e non aggiunger null'altro, null'altro ti ripeto, chè ad alcuni pare che questa la sia cosa maggiore di quel che si crede, nulla per se medesima, capace tuttavia di trarsi dietro molte altre cose. » Eppure anch'egli per soddisfare al gusto popolare, che questi giuochi usati per l'innanzi solamente per rallegrare la brigata in fine dei conviti,

(1) Framm. Comm. XXVIII, Framm. 1.

amavano di vedere trasportati sulla scena, li versò a piene mani nella sua commedia intitolata Saffo. In un frammento che ne rimane la poetessa di Mitilene è introdotta a proporre essa medesima enigmi ed a scioglierli dopo aver messo alla prova l'ingegno di uno dei personaggi a noi ignoti di quella commedia. « *Saffo*: Avvi una femminea natura, la quale custodisce i figli entro del suo seno, e questi benchè muti mandano una voce che è intesa e pei flutti marini e per tutto quanto il continente da quei mortali, ch'ella brama che l'intendano, e possono intenderla non solo quelli che non son presenti, ma anche quelli che non hanno il senso dell'udito. *Inter.*: la natura, che tu dici, è la nostra città; i figli che nel suo seno alimenta sono gli oratori. Essi gridando attirano qui tutta la feccia che è di là dal mare, la feccia dell'Asia e della Tracia, e quando quella è qui giunta ed essi non cessano mai dal dire contumelie, siede il popolo senza che nulla veda ed intenda. *Saffo*: Ma come potrebbe esser mai, come potrebbe essere, o padre, che un oratore stesse muto, quando prima non fosse stato colto tre volte a violare la legge? *Inter.*: A me sembra di avere chiaramente interpretato quello che tu hai detto. Tuttavia di' tu. *Saffo*: Quella femminea natura è una lettera. I figli, ch'essa porta attorno nel suo seno sono i caratteri, e questi essendo muti parlano a chiunque dei lontani essi vogliano, e un altro gli può ben esser vicino, eppure mentre ei legge non udir nulla (1). » Più oscuri sono quelli, che a noi giunsero tratti dallo Sfingocarione di Eubulo sì perchè allusivi a persone di quel tempo, a noi ignote, sì perchè più stranamente avviluppati, per trarne maggior argomento di riso; e il titolo stesso della commedia ci mostra come tutta dovesse essere piena di enigmi, essendo così denominata da Carione, che indotto a perpetuamente parlare per indovinelli riceveva perciò il soprannome di sfinge (2). Ma ai riportati aggiungerò ancora un enigma di Alessi tratto dalla sua commedia *Il Sonno* per mostrare che questo poeta, il quale insieme con Antifane tiene il primo luogo tra i poeti della commedia di mezzo, ed essendo nato in Turio, l'antica Sibari, in certo modo si può dire gloria italiana, concedesse anch'egli qualche cosa al gusto dei tempi, benchè il facesse raramente, come lo proverebbe il trovarsi questo solo enigma tra i frammenti

(1) Framm. Comm. CXX, Framm. unico.
(2) Framm. Comm. XLIX, Framm. 1

delle sue commedie. Egli è un dialogo tra una fanciulla ed una vecchia molto proclive a parlar per enigmi. « *Vecchia*: V'ha chi non è nè mortale, nè immortale, ma ha in sè una certa mistura dell'uno e dell'altro, sicchè non vive partecipe della condizione de' mortali, nè di quella degli dei, ma sempre nasce nuovamente, e poi torna a morire, invisibile, ma pur da tutti conosciuto. *Fanciulla*: sempre tu, o donna, ti diletti degli indovinelli. *Vecchia*: E mi vanto di proporli e semplici e chiari. *Fanciulla*: E chi sarà mai quel bambino che una tale natura possiede? *Vecchia*: Il sonno, o giovinetta, che dà riposo alle cure dei mortali (1). »

La satira politica anche dopo le leggi repressive e l'abbandonata forma giambica voleva aver pur sempre una qualche parte nella commedia, ma costretta a mutare alquanto l'antica sua natura, di particolare, anzi individuale che prima era, si fece più generale, e s'appigliò ai principii piuttosto che agli uomini ed alla Grecia intera piuttosto che, come per l'innanzi, alla sola repubblica ateniese. Di questo fatto noi abbiamo una prova nelle due commedie di Anassandride e di Enioco intitolata l'una *La Città*, e l'altra di titolo a noi ignoto. Nella prima di esse le città greche sono rappresentate sulla scena sotto figura di donne in atto di udire le proposte di alleanza, che fanno agli Ateniesi gli ambasciadori degli Egiziani, ai quali un personaggio del dramma e forse la città d'Atene risponde: « Io non posso fare alleanza con voi, chè nè i costumi, nè le leggi nostre hanno somiglianza fra loro, anzi differiscon di molto. Tu adori il bue ed io lo sacrifico agli dei; tu tieni l'anguilla in conto d'una grandissima divinità, e noi l'abbiamo per la più eccellente fra le vivande; tu non mangi il porco ed io lo trovo saporitissimo; tu veneri il cane ed io lo batto, se mai lo colgo a divorarmi qualche cibo; qui vuol la legge che ai sacerdoti nulla manchi del corpo loro, ed appo voi, come pare, ei sono circoncisi; se vedi un gatto infermo tu piangi, ed io volentieri l'uccido per iscorticarlo; presso voi un topo (2) è avuto in onore e non punto presso di noi (3). » Nella seconda le medesime città sono rappresentate in Olimpia raccolte intorno all'altare di Giove; ed un personaggio del dramma così favella: « Io dirò tosto il nome di ciascuna di loro. Sono tutte quante città venute da ogni parte, le quali egli è lungo tempo

(1) Framm. Comm. CXXII, Framm. 1.

(2) Μυγαλῆ, lat. mus araneus.

(3) Anassandride, Framm. Comm. XXVIII, Framm. unico.

che hanno perduto il loro senno. Ma alcuno mi potrebbe rompere a mezzo le parole e domandarmi, perchè sian esse ora qui radunate. Ed io voglio che il sappia. Questo luogo qui tutto all'intorno è Olimpia, questo apparato figuratevi che siano le tende della sacra legazione. Va bene. Ma che vogliono esse qui fare le città? Sono qui venute un tempo a far sacrifizi per la libertà loro, essendo state di fresco liberate dai tributi, che prima eran costrette a pagare, ma dopo quel sacrifizio le rovinò di giorno in giorno la sconsigliatezza divenuta ospite loro, tenendole in sua balia per assai lungo tempo. E due donne le scompigliano sempre usando con loro, l'una delle quali dicesi Democrazia e l'altra Aristocrazia, per cui già più volte da una perniciosa ebbrezza furono travagliate (1). » E ai nemici degli Ateniesi ne toccavan pure delle buone, specialmente a Filippo e ad Alessandro. Il poeta Eraclide celebrava la vittoria di Carete sopra uno de' capitani di Filippo per nome Alettrione o Gallo, facetamente scherzando sopra un tal nome: « Avendo egli assalito il gallo di Filippo, che fuor di tempo cantava, e andava errando qua e là, lo tolse di vita; chè egli non aveva ancor messo la cresta. E ucciso un sol gallo, tuttavia Carete invitò a banchetto una grande moltitudine di Ateniesi, tanto generoso uomo egli era (2). » Mnesimaco il pigliava ad argomento d'una sua commedia intitolata *Filippo*, e forse poneva in bocca di lui queste parole piene di soldatesca millanteria: « Non sai tu che devi venire a battaglia con noi, uomini che a cena mangiamo spade aguzze, e per companatico sorbiamo fiaccole accese. E quindi il valletto ci reca alla seconde mense, in luogo di ceci, saette, cretesi, e pezzi d'infranti giavelotti, ed abbiamo per guanciali scudi e corazze, e innanzi ai piedi frombole ed archi, e catapulte invece di ghirlande (3). » Ne mordeva pure l'ambizione e gli sforzi per ridurre a servitù le città greche inducendo due personaggi della commedia a parlare così: « 1.° E non verrà alcuno di quei di Farsaglia a divorarci persino le mense? 2.° Non ne vedo alcuno presente. 1.° Va bene. Ei forse altrove se ne stanno mangiando a lesso una qualche città greca (4). » E a biasimo di quell'insaziabile brama di conquiste e di potere, per cui si rese famoso il figliuolo di lui, Ales-

(1) Enioco, Framm. da commedia incerta.
(2) Commedia di titolo incerto, Framm. d'Eraclide, a pag. 602.
(3) Framm. Comm. VII, Framm. 1.
(4) Ib. Framm. 2, Framm. 1.

sandro, vogliono alcuni (1), che si debba interpretare questo brano tratto dal Gerione di Efippo. Il primo personaggio, che certamente è un Macedone così parla: « Se gli abitatori di questo paese piglino un pesce, non già di quelli che si pigliano ogni giorno, ma per grandezza maggiore della celebrata isola di Creta, egli ha una padella che di siffatti ne conterrebbe anche cento. E intorno al paese abitando Indiani e Licii e Migdoniati e Cranai e Pafii, questi mentre il re cuoce il gran pesce tagliano legna tutti quanti e a lui la conducono da ogni porta della città, ed altri mantengono vivo il fuoco. E fatto un canale per cui una palude piena d'acqua si congiunga col mare, altri continuamente per otto mesi gli menano cento carra di sale tirato ogni carro da una coppia di cavalli, e cinque brigantini navigando intorno alle cime dei monti ordinano ai magistrati de' Licii di correre prontamente a far fuoco sotto. E il secondo gli risponde così: - Cessa da queste tue fredde e gonfie millanterie, o capitano de' Macedoni, e spegni il fuoco sicchè non s' appigli al paese de' Celti (2). »

Frequentissime erano le allusioni agli altri popoli della Grecia, come per esempio agli Spartani, che si dilettavano del loro brodo nero, e portavano lunga e inculta la barba, non osando dipartirsi dagli antichi loro costumi (3); ai Tebani, che a mangiare consumavano l'intero giorno e mai non erano sazii, e notte e dì banchettando avevano per maggior comodità il letamaio alla porta (4), e il poeta li faceva parlare gli uni e gli altri nel loro particolare dialetto per trarne maggior materia di riso. Nè si risparmiava punto la crudeltà dei tiranni della Tessaglia, e la mollezza dei re di Cipro e di Persia, la quale veniva ancora esagerata con finte ed iperboliche narrazioni, come già si era fatto da Aristofane nella commedia degli Acarnesi. Uno di quei soldati, che nella commedia di mezzo e nella nuova sono rappresentati proclivi ad ogni sorta di esagerazioni e di spacconate è introdotto da Antifane a narrare i suoi viaggi e le sue imprese discorrendo con un altro personaggio. « Di' tu in Cipro? E quanto tempo vi siete rimasti? Tutto quel tempo che la guerra durò. - In qual parte dell'isola? Dimmelo di grazia. - In Pafo, dove abbiam

(1) Geryonis nomine ipsum Alexandrum significari coniicit Droysenius. — Meineke.
(2) Framm. Comm. III.
(3) Antifane, Ἄρχων, Framm. Comm. XXII, Framm. unico.
(4) Eubulo, Framm. Comm. XX, Framm. 3, XXIV, Framm. 2, XXX.

potuto vedere un'usanza immensamente molle e incredibile a chi non la vide. - Quale? - Al re quando pranzava facevano vento le colombe, e nessun altro modo a ciò si teneva. - Come mai? Lascia le altre cose e dimmi questo. Come mai ciò avveniva? - Si ungeva il re di unguento fatto venir dall'Assiria e tratto dall'albero, del cui frutto più amano di pascersi le colombe, e quelle all'odore se ne venivano volando e volevano posarsi sul capo di lui; ma sergenti a lui dappresso collocati le cacciavano, ed esse volando lungi da lui un pocolino e non molto, nè troppo da una parte o dall'altra, gli facevano vento in quella guisa che più gli tornava conveniente nè gli riusciva molesto (1). » Dalla quale descrizione molto non si allontana quella che abbiamo in Alessi del lusso e dell'effeminatezza dei re di Persia, in cui le colombe hanno pure la parte loro. « Nè per ungersi adoperava punto il vaso dell'alabastro, come si è fatto sempre fin dai tempi di Saturno; ma lasciava libero il volo a quattro colombe bagnate ciascuna, non già del medesimo unguento per Giove, ma d'unguento particolare; e quelle volando in giro inaffiavano le nostre vesti insieme coi tappeti, sui quali eravamo coricati. Non abbiatevelo a male, o voi primi fra gli uomini di Grecia, io era unto d'unguento d'iride, che su me cadeva come pioggia (2). »

Egli è pure probabile, che vi fosse un tempo, in cui ritornato il governo della repubblica in mano della democrazia, si ridestasse alquanto l'antica libertà di mordere i cittadini. In fatti noi vediamo come Antifane pigliasse a soggetto di una sua commedia quegli Ateniesi, che si mostravano favorevoli ai Tebani (3). Timocle accusasse i principali oratori d'Atene d'essersi lasciati corrompere dall'oro di Filippo (4), ed assalisse

---

(1) Στρατιώτης ἢ Τύχων, CXXIII, 2.

(2) Οἰστιαζόμενος, XXXIV, 1.

(3) CXXXIII.

(4) « Demostene ha cinquanta talenti. - Felice se egli non ne deo far parte ad alcuno. - Anche Merocle ha ricevuto molto oro. - Sciocco chi lo diede e fortunato chi l'ha preso. - Ne ebbero anche Demone e Callistrato. - Erano poveri ed io li perdono. - Ne ha pure Iperide il valente oratore. - Costui farà ricchi i pescivendoli... (Δῆλος, Framm. IV, 1). M'imponi tu dunque di parlar ora di qualunque altra cosa, che dello stato presente della repubblica? Il farò per l'appunto. - E prima di tutto Demostene cesserà dallo adirarsi contro di te. - Chi mai? Quel briareo, che mangia catapulte e lancie, ... e sempre ha l'occhio rivolto alla guerra (Ἥρωες, XI, 1). - Altrove egli deride nuovamente Iperide, ghiotto de' pesci, mutandolo in fiume pieno di pesci, che ondeggiando con soavi flutti di eloquenza e pronto a scaricarsi da ogni parte, inaffia i campi di coloro, che gli dan la mercede (Ἰκαρίοι Σάτυροι, Framm. XII, 3). »

i demagoghi facendosi gioco specialmente della mollezza di Ctesippo, figliuolo di Cabria, più degno di stare fra le donne che fra gli uomini, ed Anassandride riprovando le nozze d'Ifierate con una donna di Tracia descrivesse a lungo i sontuosi apparecchi del convito nuziale (1) e biasimasse altra volta la facilità con cui gli Ateniesi concedevano altrui la loro cittadinanza, con queste parole: « Non v'ha in alcun luogo una città di servi; e la fortuna porta qua e là i corpi loro. Ma egli vi ha molti, che oggi non son liberi e saran domani Suniesi e posdomani piglieranno parte all'assemblea del popolo; chè un dio regge il timone della nave di ciascun di loro, » e deridesse l'oratore Poliutto (2), nello stesso modo che Eubulo derideva Callistrato e il notava di turpe incontinenza (3). Ma quando la libertà fu caduta intieramente e venne la città in potere de' Macedoni, l'antica arditezza dei comici si mutava in una schifosa adulazione, della quale ci serbò Ateneo una descrizione fatta da Democare, ch'io credo pregio dell'opera il qui riferire. « Si rese famoso per la sua adulazione anche il popolo degli Ateniesi. In fatti Democare il nipote dell'oratore Demostene narrando nel ventesimo libro delle sue storie a qual segno di adulazione giungessero gli Ateniesi verso Demetrio il Poliorcete, e come ciò fosse fatto contro la volontà di lui, così scrive: — Alcune di queste cose gli spiacquero, non meno di altre intieramente vergognose ed abbiette, i templi innalzati a Leena e Lamia Afrodite, e gli altari e i monumenti, come ad eroi, e le libazioni fatte a Burico e ad Adimanto e ad Ossitemide, suoi cortigiani. In onore d'ognun di questi cantavano anche peani; sicchè lo stesso Demetrio si maravigliava di quello che accadeva, e diceva che al cospetto di lui nessuno degli Ateniesi era stato grande nè d'anima adulto. Ed anche i Tebani adulando Demetrio, come narra Polemone nel libro intorno al portico dipinto che era in Sicione, innalzarono un tempio a Venere Lamia. Era essa l'amica di Demetrio, come pure Leena. Che dunque di straordinario fecero gli Ateniesi, adulatori degli adulatori, cantando in onore dello stesso Demetrio peani e prosodii (4)? Ed invero dice Democare nel ventesimo primo delle sue storie: - Ritornando Demetrio da Leucade e Corcira in Atene,

(1) Πρωτεσιλάος, Framm. comm. XXIX, Framm. 1.
(2) Τηρεύς, ib. comm. XXXIII, Framm. 1.
(3) Ἀντιόπη, Framm. comm. V, Framm. 3
(4) Inni che si cantavano dalle processioni.

gli Ateniesi lo accolsero non solo con incensi e corone e libazioni di vino, ma processioni e cori e itifalli (1) gli andarono incontro con danze e canti e fermandosi in mezzo alla turba cantavano danzando e dicevan nei canti loro ch'egli era il solo vero dio e gli altri o dormivano, o se ne erano iti ad abitare lontano, e non esistevano, e com'egli fosse nato da Nettuno e da Venere, di eccellente bellezza e tutto a tutti pel suo amore verso gli uomini. E dice che riverenti il supplicavano e gli volgevano preghiere. » E a conferma di questa ragione di Democare riferisce lo stesso Ateneo l'itifallo cantato in quella occasione, e conservato nelle storie di Duri da Samo, del quale io qui porrò quella parte, che intieramente s'accorda colle parole di lui. « Come sono ora presenti nella città quelli che fra gli dei ci sono più amici! Chè il medesimo tempo qui condusse Demetra (2) e Demetrio. Quella sen viene per celebrare i venerandi misteri di sua figlia Proserpina, e questi eccolo fra noi lieto, come si conviene ad un dio, e bello e sorridente. Veneranda cosa quand'egli apparisce, i suoi amici tutti in cerchio ed egli nel mezzo, simili gli amici alle stelle ed egli al sole. Salve, o figliuolo del potentissimo iddio Nettuno e di Venere. Gli altri dei o son molto lontani, o non hanno orecchie, o non esistono, o punto non si danno pensiero di noi, e te vediamo presente, non di legno, nè di pietra, ma vero, e a te innalziamo le nostre preghiere (3). » Da questa corrente di adulazione si lasciavano trascinare anche i poeti comici, ed Alessi scriveva una commedia intitolata Demetrio, o l'amator degli amici, e in un'altra(4) introduceva Ateniesi che facevano libazioni al re Antigono per la vittoria da lui riportata sopra Tolomeo presso l'isola di Cipri, a Demetrio e a Fila, moglie di Antigono e madre di Demetrio, onorata dagli Ateniesi, che le alzarono statue col nome di Fila Afrodite, e Fileo chiamarono un luogo a lei consacrato (5). « Portami, o valletto, dice uno de'personaggi del dramma, un gran bicchiere, chè libar dobbiamo i quattro calici dell'amicizia in onore dei presenti, ci darai quindi tre calici dell'amore,

(1) Cori d'uomini con maschere, che li rappresentavano come ubbriachi, e corone in capo e vesti loro particolari, i quali giunti sull'orchestra del teatro si volgevano verso gli spettatori e intuonavano i loro canti, che pure si chiamavano itifalli. Vedi Ateneo lib. XIV, n. 622.

(2) Nome, col quale i Greci chiamavano Cerere.

(3) Ateneo lib. VI, n. 253.

(4) Κρατεύας ἢ Φαρμακοπώλης, Framm. LXIV, 3.

(5) V. Ateneo lib. VI, p. 255.

l'uno sacro al re Antigono per la sua bella vittoria e l'altro al giovane Demetrio. Portami il terzo. Egli è dovuto a Fila Afrodite. Rallegratevi o miei compagni nel bere. Di quanti beni è pieno il calice che io vuoto (1)! »

Ma se i potenti erano difesi dalle leggi contro l'audacia de' comici e da costoro vilmente adulati, la satirica musa della commedia trovava tuttavia un libero sfogo nella facoltà che aveva di mordere i costumi de' privati. Antifane derideva i due oratori Callimedonte e Callistene spasimanti per due famose cortigiane, e Misgola amatore de' bei citaredi (2), Anassandride a mostrare la viltà di Melanopo, il quale era stato mandato dagli Ateniesi ambasciatore a Sparta insieme coll'oratore Callistrato (3), e quantunque di continuo si mostrasse rivale e nemico di lui, pure talvolta bassamente il piaggiava, lo mostra in atto di ungergli i piedi con unguento egiziano squisito comperato alla bottega di Perone, il più rinomato profumiere d'allora (4). Nicostrato ricorda Cefisodoro noto per le sue giullerie, ed Efippo il medico siracusano Menecrate, che per aver guarito l'argivo Nicostrato dall'epilessia si teneva per da più degli dei (5) e voleva essere chiamato col nome di Giove (6). Vi erano poi alcune classi di cittadini, le quali e individualmente e collettivamente erano fatte argomento di riso nelle commedie. Tali erano i filosofi, i venditori di pesce e le cortigiane. Notavasi negli accademici l'eleganza della persona e delle vesti, nei peripatetici la sottigliezza delle argomentazioni, nei pitagorici il sudiciume, di cui facevano pompa. E cominciando dagli accademici e da Platone, dal quale Aristofonte, gran derisore di filosofi, intitolò un suo dramma facendolo in quello perpetuo soggetto di beffa, come di Socrate avea fatto Aristofane nelle *Nuvole*, noi troviamo nell' Anteo di Antifane (7) descritto un vecchio appartenente a quella scuola: « Conosci tu, o amico, chi mai sia questo vecchio? — A vederlo ci mi par greco. Ha la tunica bianca, il pallio bigio e bello, morbido il berretto e la mazza lavorata

---

(1) Vedi altre libazioni in onore di re Tolomeo. Ὑποβολιμαῖος, Framm. CXXIII, 1.

(2) Ἀλευομένη, Framm. X, 1. V. anche Alessi, Ἀγωνὶς ἢ Ἱππίσκος, Framm. II, 1.

(3) V. Senofonte, Ellen. 6, 3.

(4) Πρωτεσίλαος, Framm. XXIX, 2.

(5) Πελτάστης, Framm. X, 2.

(6) V. Ateneo VII, p. 289. Plutarco, V Agesil. c. 21. Clemente Aless. nel Protrept. p. 16, ed Eliano, Varia Historia, 12, 51.

(7) Framm. XIV, 1.

con molta arte, sottile la suola de' calzari. Che più? Io credo proprio di vedere in lui la stessa accademia. » E nel Naufrago di Efippo un giovane che uscito dalla medesima scuola si era volto, per desiderio di arricchire, all'arte oratoria. « Levandosi poscia in piede un giovane ingegnoso, uno di quelli dell' accademia, un discepolo di Platone, datosi tutto, come Brisone e Trasimaco, a far danari coll'arte di vender ciance, uomo incapace di parlare se prima non ha molto meditato, colla chioma rasa, bella e lunga l'intosa barba, ben calzato il piede, disposte acconciamente e tutte eguali le pieghe della veste, e il pallio raccolto innanzi al petto sicchè gli tenea luogo di corazza, appoggiandosi sul bastone per darsi un'aria maestosa pigliata certamente ad imprestito e non punto a lui naturale, come io credo, così prese a parlare: o uomini della terra ateniese (1).» Epicrate introduceva gli spettatori in seno della stessa accademia e li faceva assistere alle dispute di Platone e de' suoi discepoli da lui comicamente parodiate. « Che è di Platone, di Speusippo e di Menedemo? Presso chi dimorano essi al presente? Che vanno essi meditando? Di che tengono ragionamento? Dimmi queste cose in modo chiaro, per la dea Terra! se tu le sai. — Io posso dirtele appunto per filo e per segno, poichè avendo io veduto al tempo delle Panatenee una mandra di fanciulloni nelle palestre dell'accademia, udii da loro certi discorsi strani oltre ogni credere. Imperocchè avendo essi preso a definire le cose della natura distinguevano i generi degli animali da quelli degli alberi e dei legumi, e quindi cercavano a quale di questi appartenesse la zucca. — E come la definivano essi? A quale specie dissero appartenere quel vegetale? Dimmelo, se il sai. — Dapprima tutti si ritrassero indietro in silenzio e, chinata la testa, stettero meditando per non poco tempo. Quindi all'improvviso, mentre i giovanetti erano ancora assorti nelle loro meditazioni, col capo verso terra chinato, disse uno di loro che la zucca era un legume rotondo, e un altro che la era un'erba, un terzo che era una pianta. Udendo questo un medico siciliano derise la loro sciocchezza col mandar fuori uno sconcio rumore. — Ei non avranno potuto certamente frenare il loro sdegno e avranno gridato ad alta voce ch'ei si faceva beffe di loro essendo sconveniente il fare di siffatte cose in tali adunanze. — Oibò! I giovani non se ne diedero pensiero, e Platone,

(1) Framm VIII, 1.

senza punto commoversi, tutto tranquillo impose loro di definire nuovamente a qual genere appartenesse la zucca, e quelli andavano dividendo (1). » Altrove troviamo ridevolmente ricordata la dottrina di Platone intorno al bene ed all'anima (2), e parlandosi di Senocrate e dell'Accademia lodati Demetrio e i Nomoteti per aver cacciato da Atene i filosofi e chiuse le loro scuole (3). Di Aristotele e di quei del Liceo fa solo menzione Antifane in quella sua commedia che s'intitola Cleofane, parodiando le loro argomentazioni sottili. « Che è questo? Non è egli forse una pazzia? O che altro è egli mai? Pretendi tu forse che un uom di senno debba tener dietro nel Liceo a quei sofisti, che per Giove! son magri e sfiniti dal digiuno e asciutti come legno di fico e dire con loro: Questa cosa punto non è se ora nasce, imperocchè mai non poteva essere già nato quello che ora nasce, nè se era già nato prima è quello che ora nasce, imperocchè nulla vi è che non sia, e quello che in nessun tempo è nato non è fintantochè non è nato; ma questo non è nato ancora. Ed invero poteva nascere dall'essere; ma se nulla ancora vi era, come poteva egli nascere da quello che ancora non era? Ciò è impossibile. E se dicesi che egli si è fatto da se medesimo, più non sarà quello. E come mai alcuno potrebbe dire se da qualche cosa può nascere quello che non è? Chè certamente non potrebbe nascere da quel che non è. Che mai significhi tutto questo neppure Apolline il saprebbe dire (4). » Ed Aristippo fondatore della scuola Cirenaica è ricordato da Alessi con queste parole poste in bocca d'un servo: « Il mio padrone aveva un tempo rivolto l'animo all'arte del ben ragionare, quando era ancor giovinetto, e voleva diventare filosofo. Eravi allora qui, come narrano, un cotal Cireneo per nome Aristippo, filosofo ingegnoso, anzi il primo dell'età sua quanto ad intemperanza. Dando a costui un talento, il mio padrone si fece suo di-

---

(1) Frammenti di commedie incerte, I.

(2) Qual bene tu possa avere, o padrone, da costei, io non so punto, s'ei non fosse per avventura il bene di Platone. (Amfide, Ἀμφιφάτης, Framm. IV, 1). « Sei tu uomo? - Sì. - Ed hai l'anima? - S'io l'abbia, come la vuol Platone, non so; ma ben sospetto di averla. » Cratino il giovane, Ψευδυποβολιμαῖος, Framm. VIII, I. « Non importa che tu m'imbandisca le vivande calde, chè Platone dice che il buono è buono dappertutto e il dolce è dolce e qui ed altrove. » Alessi, Μίκων, LXXVII, I. « Il mio corpo che era mortale si dissecò e la parte immortale si levò alto nell'aria. Non è questa la dottrina di Platone? » Alessi, Ὀλυμπιοδώρος, LXXXV, I

(3) Alessi, Ἵππις, LIV, I.

(4) Framm. LXVIII, I.

scepolo, e quantunque non tutta imparasse l'arte, pur tuttavia apprese il modo di apparecchiar le vivande (1). »

Più frequenti sono le allusioni ai pitagorici, i quali delle dottrine dell'antica loro scuola avevano solo ritenuto le pratiche superstiziose, e non la cedevano ai cinici nel sudiciume e nel dispregio d'ogni sociale convenienza. Antifane ci mostra uno di loro, il quale astenendosi nel cibarsi da ogni cosa animata, si contentava di rosicchiare la nera crosta di quelle stiacciate, che si vendevano a miglior mercato (2). Ed Aristofonte narrando la misera vita d'un altro di loro: « Quanto all'aver fame e al non mangiar nulla, dice nella commedia intitolata il Pitagorista, pensa pure di vedere in lui un Titinallo e un Filippide (3). Nel ber acqua egli è una rana, nel dilettarsi di mangiar timo e legumi un bruco, nel non lavarsi, la sozzura personificata, nel passare l'inverno a cielo scoperto un merlo, nel sopportare il calore e ciarlare sul mezzodì una cicala, nel non far uso di olio anzi averlo in uggia, proprio un sudiciume, nel camminare scalzo di buon mattino una gru, nel non dormire neppur un poco la notte un pipistrello (4). » E alla miseria loro non alle prescrizioni della setta attribuiva le cenciose vesti e l'astenersi dalle carni: « Per gli dei! Noi credevamo che i Pitagorici d'una volta così fossero sucidi per loro elezione e portassero con piacere il pallio logoro. Ma ei non è nulla di questo, come a me pare; chè per necessità, come quelli che nulla possedevano, trovarono un bel pretesto di far masserizia, e fissarono limiti, che tornano utili ai poveri. Ed invero, poni loro innanzi e pesci e carni; e se non si mangiano persino le dita io voglio essere impeso ben dieci volte (5). » Quindi un personaggio della commedia narrando, che essendo un cotale disceso all'inferno avea veduto come le anime dei Pitagorici fossero più onorate che le altre tutte, e Plutone sempre le volesse avere per commensali, un altro gli risponde: « Egli è un dio ben alla mano cotesto che si diletta di conversare con quei sudicioni (6). » E per non andare soverchiamente per le lunghe,

---

(1) Γαλατεία, Framm. XXIII, 1.
(2) Κάρικος, Framm. LXXVI, 3.
(3) Paltonieri e parasiti spesso derisi dai poeti della commedia di mezzo.
(4) Framm. VIII, 1.
(5) Ib. Framm. 3.
(6) Ib. Framm. 4.

starò contento ad accennare che di loro anche si beffa Alessi nella Pitagorica (1) e nei Tarentini (2), e farò invece passaggio ai pescivendoli, i quali ci sono rappresentati come una genia d'uomini ricchi e intollerabili per la loro superbia e il mal garbo con cui trattavano i compratori. « Non v' ha animale, dice Antifane, più sfortunato de' pesci. Imperocchè oltre al dover morire quando son presi e poi esser mangiati e così tosto sepolti (3), consegnati i miseri ai pescivendoli, che li lasciano malamente sciupare, imputridiscono giacendo così abbandonati per due o tre giorni. E a mala pena, quando finalmente ci trovano un cieco, che li comperi, concedono a lui di dare a quei morti sepoltura. Ma quegli, portatili a casa, li getta via dopo aver fatto col naso esperimento della puzza, che spira da loro (4). » Ed altrove: « Io ho creduto finora che le Gorgoni fossero una favola; ma ogni volta che vado in piazza, mi persuado dell' esistenza loro; imperocchè vedendo quivi i pescivendoli, io divento issofatto di sasso; sicchè son costretto a parlar con essi volgendo loro le spalle. E quando odo qual prezzo ci chiedono d'un pesciolino, mi sento proprio venir freddo (5). Infinitamente più facile, dice Efippo, è che i sommi capitani dell'esercito si degnino di parlarvi e di rispondere alle vostre interrogazioni, che non quei maledetti pescivendoli che stanno sulla piazza, i quali se alcuno li interroga, o si china per pigliare in mano qualche cosa, dapprima stanno, come Telefo, in silenzio (e questo ben loro si conviene poichè tutti in una parola sono superbissimi) e quasi non vi ponessero mente nè vi udissero, battendo colla mano un polipo, che battuto si mette a soffiare, vi dicono con parlatura mozza e troncando le sillabe il prezzo di questo e di quel pesce (6). Tali cose i compratori son costretti ad udire. » E con queste s'accordano le seguenti parole di Alessi: « Quando io vedo i sommi capitani levar alto le ciglia,

---

(1) Framm. CIV, 1, 2, 3.

(2) Framm. CXVI, 1, 2.

(3) Metto la virgola dopo ταφῆναι e così lo lego colle parole precedenti, diversamente da quel che fanno il Meineke e il Bothe.

(4) Μοιχοί, Framm. XCVII, 1.

(5) Ναυλικοι, Framm. C, 1.

(6) Πλάνος, Framm. XX, 1. Ho stimato intraducibili le parole mozze, che Amfide pone in bocca ai pescivendoli: « Τάρων (per τεττάρων) βολῶν (per ὀβολῶν) γένοιτ' ἄν, ἡ ὀκτὼ κέστρα 'κτὼ (ὀκτὼ) βολῶν (ὀβολῶν), che il Meineke traduce: « Tuor (quatuor) bolis (obolis) hic constat; at sudis ista cto (octo) bolis (obolis). »

penso ch' ei fanno cosa che spiace; ma punto non mi maraviglio, chè essendo sopra ogni altro onorati dalla repubblica, montino in qualche superbia. Ma quando scorgo i pescivendoli (che possa lor venire un fistolo!) tener l'occhio rivolto a terra, ma alzate quanto più possono le ciglia, mi sento soffocare. E se domandi a un di loro: qual è l'ultimo prezzo che tu chiedi per due muggini? Ti risponde: Dieci oboli. E tu: È troppo. Non ne piglieresti otto? - Sì, se tu prendi l'uno dei due. - Suvvia piglia otto oboli e lascia da parte gli scherzi. - Dammene dieci, e vattene via. - Non sono queste cose più amare del fiele (1)? » Ma io m'accorgo, che andrei soverchiamente per le lunghe se tutti volessi riferire quei frammenti dei comici, di cui ho preso a ragionare, nei quali tal razza d'uomini è tolta di mira, nè farei forse cosa piacevole nè utile allo scopo, che mi sono proposto, potendo a quello bastare quanto son venuto finora esponendo. E per la medesima ragione io non recherò in mezzo i molti brani, in cui sono o lodate o biasimate le cortigiane, sì perchè io non li potrei sempre spogliare di quella soverchia licenza di pensieri e di parole, ond'era macchiato il teatro Ateniese, e sì ancora perchè a tutti è noto quanto fossero numerose e corteggiate e arricchite in una città, in cui le altre donne per la mala educazione loro data nella domestica società e per quella specie di servitù, nella quale si tenevano, punto non poteano contendere con esse d'amabilità e di coltura. Nè trarrò dai medesimi frammenti quelli che più mi potrebbero tornare opportuni a dimostrare come i poeti della commedia di mezzo introducessero nei loro drammi il personaggio del parasito non meno frequentemente de'poeti della commedia nuova; anzi come foss'egli una specie di maschera, o carattere fisso e comune con abiti, e colori tutti suoi proprii, il grazioso, come dicono gli Spagnuoli, o il caratterista della commedia, il personaggio insomma, che faceva più ridere le brigate e porgeva all'autore il destro di metter fuori le sue più belle ed argute facezie. Solo a mostrare come il parasita della commedia greca vestisse di nero, riferirò il seguente luogo di Alessi: « Due sono, o Nausinico, i generi di parasiti, l'uno il più comune messo in ridicolo nelle commedie, noi vestiti di nero. - Fa ch'io conosca anche l'altro. - I parasiti satrapi e capitani illustri, augusto genere

(1) Ἀπεγλαυκώμενος, Framm. XII, 2. Vedi i già citati e molti altri luoghi de' poeti della commedia di mezzo intorno ai pescivendoli in Ateneo lib. VI, n. 224 e seg.

di parasiti, che vanno per la maggiore, e nel teatro della vita recitano bene la parte loro, hanno una sfrontatezza che vale mille talenti e danno fondo alle loro sostanze. Or conosci il genere e la cosa. - Per l'appunto. - Nell' operare dell' uno e dell' altro di questi generi v' ha un carattere comune, la smania dell' adulare. E siccome la sorte fu agli uni liberale dei beni della vita, agli altri avara, così gli uni siam ricchi e gli altri disperati. Non è vero ch' io t' ho parlato da maestro e a proposito? — Ti loderei, ma temo, se il faccio, che tu mi chieda qualche cosa di più (1). » E a mettere in chiaro l'origine del suo nome, intorno alla quale ragiona a lungo Ateneo nel sesto libro del Convito de' sapienti, ne aggiungerò un altro, che è tratto da una commedia di Diodoro da Sinope, fiorito appunto in quel periodo, del quale ragiono: « Io voglio dimostrar chiaramente come questa sia cosa veneranda e istituita dalla legge, anzi un trovato degli dei, mentre delle altre arti non furono già maestri gli dei, ma gli uomini sapienti. Infatti quella del parasito fu trovata da Giove Amicale, da colui, che tutti confessano essere il maggiore degli dei. Entra questi nelle case senza punto distinguere la povera dalla ricca, e dove egli vede un letto ben preparato e innanzi a quello una mensa ben imbastita di tutto quello che si richiede, ivi si sdraia e pranza con bel garbo, e dopo aver mangiato e bevuto se ne ritorna a casa, senza punto pagare lo scotto. Ed ora io faccio lo stesso. Dove io vedo letti bene apparecchiati e mensa ben imbandita e schiusa la porta, entro quivi in silenzio, mi dispongo in modo da non dar noia al mio commensale, e mangiato di tutto quello che m'è posto innanzi, e bevuto, me ne torno a casa, appunto come Giove Amicale. E che questa fosse in ogni tempo arte nobile e bella, chiunque il potrà chiaramente conoscere da quello, che ora dirò: La città nostra onorando splendidamente Ercole e facendogli sacrifizii in tutti i borghi, non trasse già a sorte coloro che dovevano essere parasiti del dio, cioè sedere alla mensa di lui, nè a tal fine prese que' primi, in cui s'era avvenuta; ma scelse con molta cura dodici uomini fra i cittadini, dando la preferenza ai nati da potenti genitori, a quelli che possedevano molto e vivevano orrevolmente. Poscia coll'andar del tempo alcuno dei ricchi avendo preso ad imitar Ercole e tenendo intorno

(1) Alessi, Καβερνήτης, Framm. LXV, 1. Mi sono allontanato dal Meineke e dal Bothe per seguitare nell'ordine dei versi e del dialogo le edizioni più recenti di Ateneo, in cui (lib. VI, c. 237) questo brano mi par meglio disposto.

a sè parasiti cui fare le spese, non iscelse già i più aggraziati, ma i più capaci di adularlo e lodarlo in ogni caso, i quali quando il fiato gli puzza di rafano, o di pesce fradicio da lui mangiato, gli dicono ch'egli si è pasciuto di viole e di rose .... (1). » Un'altra maschera della commedia greca, non meno faceta del parasito e forse più, era quella del cuoco, il quale, se rappresentava un cuoco del paese, dicevasi il Mesone, se un cuoco forestiero *Tettix* o il Cicela; ma il Mesone era più frequente e molte erano le commedie, in cui aveva la parte sua, e delle facezie a lui poste in bocca, dette Mesonate (2), come noi dicevamo un tempo Zannate o Arlecchinate, avevano gli antichi fatto raccolta in libri, che formavano la delizia delle brigate di buon umore. Frequente nelle commedie l'udirli vantare la scienza loro e paragonarla con quella de' filosofi e porre la loro arte sopra tutte le altre per quanto abbian nome di utili e di belle. Del che valga ad esempio un luogo d'una commedia di Dionisio da Sinope, il quale per la menzione che appunto fa in questo luogo del poema di Archestrato sulla Gastronomia, vuol essere annoverato fra gli scrittori della commedia di mezzo e non fra quelli dell'antica, com'era piaciuto al Casaubono nelle sue note ad Ateneo. « Tu hai detto cosa, o Simia, che per gli dei! molto mi piace. - Sì; egli è ben conveniente che un cuoco prima che si accinga a preparare un pranzo, sappia per chi lo prepari. Imperocchè se alcuno baderà a questo soltanto, cioè al modo in cui meglio possa apparecchiare il pranzo; ma del come apparecchiarlo e del quando, e dell'ordine da tenere in quello non si darà pensiero, nè cura, costui non è un cuoco; ma un facitore di pranzi, il che non è punto lo stesso, ma cosa ben differente. Capitano d'esercito si dice chiunque ha un esercito sotto di sè. Ma se egli è capace di ben governarsi nelle cose di guerra e d'aver l'occhio a tutto è un capitano, altrimenti non è se non un condottiero. Così è di noi cuochi. Apparecchiar le vivande, e tagliare e cuocere e soffiare nel fuoco le son cose da tutti; ma chi non va oltre a questo è un facitore di pranzi; chè il cuoco è ben altro. Considerare egli deve il luogo e l'ora e chi invita e chi è invitato e qual pesce di preferenza egli abbia da comperare (il che non è punto da tutti). Tu avrai quasi sempre innanzi a te le medesime vi-

(1) Ἐπίληρος, Framm. II, t. Ateneo, VI, n. 239.

(2) Ateneo, Dipnos. lib. XIV, n 659. Σκώμματα μαισωνικά.

vande ; ma troverai che sempre non si meritano la medesima approvazione, nè arrecano egualmente piacere. Archestrato scrisse intorno a questo e da molti è tenuto per uomo che dica utili cose ; ma ne ignorò molte, e ciò ch'egli dice non ha alcun valore. Non dar retta a costoro, nè credere che ti possano insegnar tutto ; imperocchè alcune delle cose, che ora si scrivono, sono prive di fondamento e più vane che quelle che si scrivevano un tempo, nè dell'arte del cuoco si può parlare convenientemente, nè si è parlato finora, chè essa non ha limiti e il tempo la governa a suo talento, nè punto è padrona di se medesima, e se tu, anche ben usando dell'arte tua, pur non saprai cogliere quell'occasione, che la fortuna ti mette innanzi, l'arte se ne va perduta intieramente. - Tu sei un grand'uomo. Ora costui che tu dici dover qui venire avvezzo a molti pranzi de' più sontuosi, io farò in modo, o Simia, che tutti li ponga in dimenticanza, sol ch'io gli mostri un mio pasticcio avvolto nelle foglie di fico e gl'imbandisca un pranzo olezzante di attica squisitezza . . . (1).» E perchè si sappia come la cucina greca aveva i suoi classici scrittori non meno che li abbia oggidì la francese, aggiungerò al nome di Archestrato quello di Simo ricordato da Alessi in quel luogo del suo Lino, dove fingendo che il giovinetto Ercole vada cercando nella biblioteca del suo maestro un libro da leggere, li induce a parlare in questa guisa : « *Lino.* Colà ti accosta e pigliati quel libro che tu vuoi : quindi leggi quietamente e adagio ben esaminando ogni cosa dal titolo in giù. Vi troverai Orfeo, Esiodo, alcune tragedie, Cherilo, Omero, dilettevoli scritture d'ogni genere. Così mostrerai a quale studio l'indole tua naturalmente ti porti. *Ercole.* Io piglio questo. *Lino.* Mostrami innanzi che libro egli sia. *Ercole.* L'arte del cucinare, come dice il titolo. *Lino.* Gran filosofo sei tu, com'egli appare, che in mezzo a tanti libri hai preso l'arte di Simo. *Ercole.* E questo Simo chi è? *Lino.* Un uomo di molto pregio. Ei si è rivolto testè a recitar le tragedie, ed è fra gli attori di gran lunga il miglior cuoco, come sembra a coloro, che ne hanno fatto esperimento, e fra i cuochi è il miglior degli attori. Tu hai voglia di mangiare. Dimmi ora che mai tu desideri. *Ercole.* Ho fame e tu il sai bene (2). »

Intorno a questi, che io direi caratteri sociali, molto si adoperavano i

---

(1) Θεσμοφόρος, Framm. II

(2) Λίνος, Framm. LXXIV, 1.

poeti della commedia di mezzo, cominciando in tal modo per la via segnata loro da quelli della commedia antica, e continuando a dipingere la vita pubblica intralasciata soltanto quella parte di essa, che riguardava la politica, e le persone di coloro che tenevano in mano il governo dello Stato. Per la medesima ragione traevano essi molti argomenti dalle diverse condizioni degli uomini e dalle arti da loro esercitate, scoprendo acutamente quanto nei costumi, nelle abitudini, nel linguaggio di ciascuna di quelle vi fosse che potesse offerire materia di comiche facezie. Così Antifane, Anassandride e Senarco dipingevano il contadino pieno di rozzezza negli atti e nelle parole: e il bel contrasto di quella vita agreste e di quella natura tutta semplice e grossolana con la morbidezza e il lusso della vita d'Atene e con la squisita eleganza e lo spirito pronto ed arguto de' cittadini di lei, doveva fare delle loro commedie una fonte perenne di piacevolezza e di scherzi conditi con veramente attico sale (1). Altri presero a farsi beffe della impostura e ciarlataneria de' medici (2), la quale era sì grande, che quel Menecrate, la cui superbia già abbiamo veduto derisa da Efippo, obbligava coloro che egli curava del morbo erculeo, come dicevano i Greci, o sacro, od epilettico a promettergli per iscritto di non più staccarsi da lui e di obbedirlo in ogni cosa; e si traeva dietro vestito con tutte le insegne d'Ercole quel Nicostrato, che egli aveva guarito, e un altro colle ali alla testa ed ai piedi, che rappresentava Mercurio, e ad un terzo aveva posto nome Apolline per far meglio la sua figura di Giove, così circondato di numi. E scriveva lettere orgogliosissime ai tiranni ed ai re esaltando la sua potenza sopra quella di loro, ad uno de' quali indirizzandosi, cioè a Filippo di Macedonia, si esprimeva così: « Menecrate — Giove saluta Filippo. Tu sei re della Macedonia, io dell'arte medica. Tu, quando ne hai voglia, puoi uccidere i sani, io salvare gli ammalati e i robusti conservar sani, se credono a me, fino alla vecchiezza. Quindi a te prestano obbedienza i Macedoni, a me pur quelli, che nati ancora non sono. » E Filippo rispondeva a lui come a pazzo. « Filippo augura sanità a Menecrate » e invitatolo a pranzo insieme cogli dei minori, che lo seguitavano, fece loro apparec-

---

(1) Antifane, Ἄγροικος, Framm. I. Βουταλίων, seconda edizione della precedente commedia. Ib. XXXV. — Anassandride, Ἄγροικοι, Framm. I. — Senarco, Βουταλίων, Framm. I.

(2) Aristofonte, Ἰατρός, Framm. III.

chiare letti alti e ornati mirabilmente, e in mezzo a quelli una mensa d'altezza comune, su cui era un altare con tutte le primizie della terra, e ogni volta che si recavano intorno agli altri commensali le vivande, i valletti offrivano a Menecrate e a' suoi seguaci incenso e libazioni, sicchè furono costretti a fuggirsene via digiuni (1). E da altre condizioni e professioni degli uomini trovo derivati i titoli di molte commedie de' poeti, di cui ragiono; come dai cavalieri (2), dai soldati (3), dai forestieri, che abitavano in Atene e nel suo territorio (4), dai musici (5) e da altre ragioni di artefici, che qui sarebbe lungo l'enumerare; il che mi dà buon argomento di supporre, che in tali commedie fossero rappresentati i costumi e i modi loro (6).

Ma quanto più gli scrittori greci si venivano per ragion di tempo allontanando da quelli della commedia antica, tanto più frequenti noi vediamo in loro gli sforzi di rappresentare i caratteri morali e i tipi generali dei vizii e delle virtù, che hanno loro stanza nell'umano cuore. In tal modo essi pigliavano a segnare le prime linee di quella mirabile immagine dell'uom morale e della vita privata, che fu poi condotta a compimento dai poeti della commedia di mezzo, i quali ad una squisita festività e ad una incomparabile eleganza seppero unire una grande finezza di osservazione e una filosofia pratica, la quale ancora traspira soavissima e piena di persuasione dai pochi frammenti che di loro ci sono rimasti. Antifane pigliando a soggetto di commedia il famoso Timone, se ne valeva per mostrare la parte ridicola, che è nel carattere del misantropo, o sistematico odiatore degli uomini, il quale dai particolari male argomentando de' generali, la malizia d'alcuni uomini da lui provata attribuisce a tutti; e s'apparta da loro e vive solitario e infelice, senza punto gustare i beni, che l'amicizia, l'amore e gli altri vincoli della famiglia e della società possono all'uomo arrecare ben capaci di lenire le ferite aperte nell'animo di lui dalla tristizia di pochi (7). E queste soavi consolazioni, che vengono

---

(1) Ateneo, lib. VII, n. 289.

(2) Antifane, Ἱππεῖς, Framm. LXI.

(3) Alessi, Στρατιώτης, Framm. CX.

(4) Alessi, Μέτοικος, Framm. LXXXIX

(5) Antifane, Αὐλητάς, Framm XXV. — Κιθαρῳδός, Framm. LXVI. — Κιθαριστής, Framm. LXVII.

(6) Antifane, VI, IX, X, LXIX, LXXII. Eubulo, XLVIII, L. Anassila, X, XV, XVI, XVII, XIX. Alessi, XXXV, XLIII, XLVIII, LXIII, XCIV, XCVII, XCVIII.

(7) Τίμων, Framm. CXXIV.

dall'amore, fors'egli faceva palesi in altre commedie, che appunto dall'affezione verso gli amici (1), verso la madre (2) e verso il padre (3) furono intitolate. Altri poeti notando la differenza che induce nei caratteri degli uomini la diversa età loro, si proponevano di offerire agli spettatori un'immagine dell'indole de' giovani e di quella de' vecchi, mettendole il più delle volte in opposizione fra loro, uno de' quali, Anassandride, rappresentò in una sua commedia due di quei vecchi, in cui il gelo degli anni non ha potuto estinguere l'ardore libidinoso della gioventù, e facea rammentar loro, discorrendo, le belle cortigiane, che vivevano un tempo in Atene, e le loro passate avventure. « Hai tu conosciuto Laide da Corinto? — E come no? Quell'amabile donnina! — Aveva essa un'amica per nome Antea. — Ed anche quella fu il nostro balocco, per Giove! — Lagisca era in quei tempi nel suo fiore, e Teolite molto leggiadra e graziosa, e Ocimo, che doveva poi essere una straordinaria bellezza. » E mostrava in un'altra commedia le ridicolezze, di cui può essere all'uomo sorgente la superbia, o il troppo alto sentire di sè (4). Le tristi conseguenze del giuoco erano poste in chiaro nelle due commedie di Eubulo e di Alessi, che dal giuocatore di dadi avevano appunto derivato il nome loro (5), e le astuzie degli aggiratori o frappatori, di cui la Grecia non pativa penuria, avevano dato certamente assai ricca materia ad una di quelle d'Efippo. D'argomento simile al *Fileuripide* di Assionico, del quale già abbiamo fatto cenno superiormente, doveva essere il *Filotragedo* di Alessi (6), e lo spasimante pel suono delle tibie ci si mostra nei frammenti di Filetero in atto di pronunziare queste parole, che mostrano l'immenso amor suo, e i beni, che da questo amore egli spera gli siano per derivare anche nella vita futura: « O Giove! che bella cosa è il morire al suon delle tibie; chè a questi soli, che così muoiono, nell'inferno è lecito il far all'amore; mentre a quelli che per ignoranza della musica vivono sordidamente ciò non è punto concesso (7)! La smania d'alimentare cavalli, già derisa da Aristofane nella sua commedia delle Nuvole, dava e nome e materia ad una di quelle

(1) Φιλέταιρος, Framm. CXXXI.
(2) Φιλομήτωρ, Framm. CXXXV.
(3) Φιλοπάτωρ, Framm. CXXXVI.
(4) Γεροντομανία, Framm VI. — Ὕβρις, Framm. XXXIV.
(5) Κυβευταί, Eubulo, Framm. XXVI. Alessi, Framm. LXVI.
(6) Framm. CXXIX.
(7) Framm. XII.

di Mnesimaco, in cui erano dipinti i giovani Ateniesi, che sulla piazza pubblica vicino al luogo dov'erano le erme venivano ammaestrati nell'arte equestre dal rinomato cavallerizzo Fidone: « Vien giù, dice un personaggio della commedia, forse un cuoco, ad una schiava, vien giù dal talamo coperto di cipresso, o Mane, e vattene in piazza vicino all'Erme, dove bazzicano i capi delle tribù, vattene ai leggiadri discepoli, cui Fidone insegna a montare a cavallo e a discenderne! Annunzia loro, che i cibi son freddi e il vino è oramai caldo; » e segue una filastrocca di nomi di vivande, frequentissima nelle commedie greche, ma che a noi punto non tornerebbe nè utile nè dilettevole il tradurre (1). Troviamo nei frammenti di Nicostrato il carattere della delicata o schifiltosa, la quale pare che avesse fastidio non già dei cibi, ma dei nomi che a quelli si davano, e pur chiedendone in buon dato usava nomi diminutivi, quasi per farli parere più piccola cosa. « Io voglio questo: un uccelletto, una colombina, un ventricoletto (2). » Finalmente il calunniatore, l'usuraio, il bugiardo, il faccendiere, il burbero, l'avaro (3) furono dipinti da altri poeti, i quali perciò, come già fu notato, si possono considerare come veri precursori della commedia nuova, che questa pittura dei vizi e delle virtù, dell'uomo interiore e della vita privata, condusse a quella maggiore perfezione, che le era concesso di toccare.

Io ho raccolte in uno le sparse membra della commedia di mezzo per ricomporne in quel modo, che meglio io potessi, il corpo già guasto da tanti secoli, o dare almeno agevolezza d'immaginare quale ei si fosse, in quella guisa, che gli architetti dai ruderi d'un antico edifizio sono talora condotti colla scorta delle leggi dell'arte loro a rifarlo intieramente e rappresentarlo quale egli era, quando sorgeva ancora in tutta la sua integrità e bellezza. Io so bene, che questo è molto più facile in quelle arti, che seguono le leggi della simmetria e della proporzione, che non in quelle, che avendo per istrumento la parola umana, sono più libere nelle loro forme, e più capricciose; ma so tuttavia, che anche queste nel loro svolgimento segnono una legge costante, la quale a chi attenta-

(1) Ἱπποτρόφος, Framm IV.

(2) Ἄβρα, Framm. I.

(3) Διάβολος, Nicostrato, Framm. VI. — Τοκιστής, ib. XVII. — Ψευδόμενος, Alessi, Framm. CXXXIV. — Πολυπράγμων, Enioco, Framm. III. Timocle, Framm. XX. — Δύσκολος, Mnesimaco, Framm. III. — Φιλάργυροι, Filisco, Framm.

mente ne piglia a considerare la storia, non può rimanere nascosta. Ora che io ho condotto a fine questa parte del mio lavoro, mi riescirà più facile per mezzo della cognizione de' fatti investigare la natura degli elementi dell'arte comica de' Greci, in quel secondo periodo della sua vita, e giudicare dell'origine loro e del pregio, rispondendo a quelle altre due interrogazioni, che io mi rivolgeva in sul principio con queste parole: La commedia greca di mezzo fu essa una forma nuova, o il risorgere di forme note già prima, o un loro successivo e continuato svolgimento? Fu essa un progresso, o un decadimento dell'arte? Alle quali due interrogazioni io risponderò, come già dissi, altra volta in una mia seconda dissertazione sopra questo medesimo argomento.

DISQUISIZIONI BIBLIOGRAFICHE

INTORNO AD UN' EDIZIONE FIORENTINA DEL SECOLO XV

E DI ALCUNE ALTRE STAMPE DI QUEL SECOLO

DI

COSTANZO GAZZERA

Memoria approvata nell'adunanza del 15 aprile 1858.

Nello scorrere, molti anni addietro, il Catalogo delle edizioni del secolo della stampa, conservate nella Biblioteca Magliabecchiana di Firenze, compilato, con molta diligente esattezza ed erudizione, dal preposto Ferdinando Fossi (1), mi venne principalmente osservato alla colonna 479 del secondo volume, l'articolo concernente all'edizione della *Dialectica nova* del *Padre Giorgio Benigno Salviati.* Descrivendo quivi il Fossi l'esemplare che aveva sott'occhio, scrive che l'opera incominciava senz'altro, *absolute*, dalla definizione della logica così: *Logica est scientia qua sciendi uerumque a falso secernendi docetur modus*, e che in fine, *ad calcem*, del medesimo si leggeva: *Explicit foeliciter Dialectica noua . . . acutissimi in artibus, ac theologia doctoris magistri Georgii Benigni de Saluiatis ad preclarissimos adolescentes, nidelicet Reuerendissimum Dominum Joannem sedis apostolice Cardinalem, et magnificum Petrum filios optimos magnanimi Laurentii Medicis.* Segue indi la data della stampa. Scorgendo da questa soscrizione, posta in fine del volume, come l'opera fosse indirizzata ai due giovani figlinoli di Lorenzo il magnifico, Gioanni e Pietro de' Medici, al primo dei quali è dato il titolo di *Cardinale*, e ch'essa inoltre, non

(1) Catal. Codicum seculi XV in Bibl. Magliab. vol. 3. folio.

preceduta nè da dedica nè da proemio od avviso di sorta, incominciava *ex abrupto* dalla definizione della Logica, non mi potendo persuadere che a un'opera scritta appositamente per l'istruzione di quei due illustri giovanetti, e ad essi dedicata, dovesse l'indirizzo essere relegato in fine del libro, e non si fosse inoltre fatta precedere da un proemio dichiarativo del metodo seguito dall'Autore nella compilazione di essa, mi nacque quindi il sospetto che l'esemplare Magliabecchiano descritto dal Fossi potesse essere mancante. Tale mio sospetto non tardava di fatto a diventare realtà, allorchè cercato del volume stesso, che per gran ventura mi trovava di possedere, e fattone il confronto colla descrizione di quello del Fossi, potei accorgermi di leggieri che l'esemplare Fossiano mancava dei due primi foglietti che precedono l'opera. In essi è appunto compreso quanto mi parve mancare all'esemplare Magliabecchiano, il proemio cioè dell'opera, e la dedica di essa ai predetti due figliuoli di Lorenzo de' Medici. Da tale dedica emerge, per soprapiù, la curiosa notizia che ove, in quella posta in fine del volume, al Gioanni è dato il titolo di *Cardinale*, in questa all'incontro non ha esso che quello di *protonotario*, *Joannem sedis apostolice prothonotarium*. Se lo scorgere nello stesso volume qualificato di due titoli diversi il distinto personaggio può parere, ed è di certo, una singolarità, non sarà tuttavolta difficile la spiegazione a chi badi al sito stesso, ove, nel libro, sono collocati i due differenti titoli, il qual sito indica abbastanza che lo scambio di essi accadde in quell'intervallo di tempo che si frappose tra il principio, ed il termine della stampa del volume; talchè chi non era che *protonotario* quando si incominciava l'impressione del volume, era diventato *Cardinale* allorchè questa si terminava. Tale ovvia e naturale spiegazione non fu avvertita dal Denis, il quale nel suo *supplemento al Maittaire*, citato dal Fossi, in luogo della edizione unica descritta da esso, ne registrava due, entrambe Fiorentine, l'una e l'altra del giorno XVIII di marzo, ma colla diversità dell'anno, la prima del MCCCCLXXXVIII, del MCCCCLXXXXVIII l'altra.

Sorpreso da questo curioso annunzio del Fossi mi feci ad esaminare io stesso il citato supplemento, ed al n.° 198 della prima parte, pag. 240, leggo di fatto *Georgii Benigni de Salviatis ord. min. Dialectica nova: Inscribitur Johanni sedis apostolice prothonotario ac mā Petro magnanimi viri Laurentii Medicis filios.* Florentiae die vero XVIII Martii MCCCCLXXXVIII. Quindi al n.° 386 della stessa prima parte pag. 452: *Georgii Benigni de Salviatis Dialectica nova; ad calcem impressum Florentiae ad*

laudem domini nostri Jesu Christi ac eius semper virginis Matris Mariae. Die vero XVIII mensis martii MCCCCLXXXXVIII.

Delle due pretese edizioni fiorentine qui sopra registrate dal Denis, in quella del n.° 198 18 marzo 1488 il Gioanni vi è tuttora qualificato *protonotario;* nell'altra poi del n.° 386, senza che più si parli nè di *protonotario*, nè di *Cardinale*, è registrato il solo titolo dell'opera colla data sì pure del 18 marzo, ma coll'anno 1498. Ora come va che avendo il Denis registrata la data, quale si legge *ad calcem* del volume, non si sia accorto che quel Gioanni stesso ch'egli nell'edizione del n.° 198 vide chiamato *Protonotario*, nel nuovo indirizzo che la precede, questo Gioanni si dice invece *Cardinale; sedis Apostolice Cardinalem?*

Reca maraviglia come il dotto ed accurato Bibliografo abbia potuto dar luogo nel suo supplemento a tali due edizioni, le quali, a chi ben le consideri, fanno tra esse le pugna, senza che li nascesse dubbio intorno alla loro legittimità, e lo inducessero a nuovo esame, onde rischiararlo e togliere l'ambignità di due edizioni amendue di Firenze, tutte due dello stesso giorno e mese, ma colla diversità di dieci anni. Sì fatta coincidenza di data, se non è impossibile, è pure della massima improbabilità.

In tale incertezza, e onde veder modo di distrigare il nodoso inviluppo prodotto dal Denis, ebbi ricorso alla *lettera quinta bibliografica Fossiana* contenuta nel volume dell'anno 1790, 22 ottobre, delle *Novelle letterarie Fiorentine*, cui ne invia lo stesso Autore, e che per fortuna è da me posseduto. Ivi leggo che desiderando il Fossi di essere chiarito intorno a cotesta per lui pure inesplicabile singolarità, s'indirizzava con lettera all'Autore stesso del supplemento, perchè volesse fornirlo, a tal uopo, dei lumi necessarii. Questi non si fecero lungamente aspettare, chè il Denis, rispondendo alla indirizzatale interrogazione, fece la leale e genuina confessione ch'esso non aveva nè avuti sott'occhio nè esaminati i due esemplari registrati nel supplemento, ma che ne aveva copiata la notizia, che doveva credere esatta, dal Catalogo manoscritto che delle edizioni antiche della Biblioteca Viennese ne avevano compilato i Bibliotecari suoi predecessori, che credo fossero il Gentilotti ed il Garelli; quanto poi spetta alla data dell'anno 1498 posta all'esemplare del n.° 386, aver fondamento di credere ch'essa vi fosse posta ad arbitrio dal compilatore del Catalogo nell'intento di conciliare col titolo di Cardinale, ivi dato a Gioanni, la data del 18 marzo dell'anno 1488, nel qual tempo, credevan essi, non poteva averlo ancora ricevuto. Non avvisarono, prosegue il Fossi, i detti Bibliotecari, che

computando secondo lo stile Fiorentino di quell'età, al 18 marzo del 1488 erano di già scorsi quattro giorni da che il Gioanni de' Medici era stato in Roma proclamato Cardinale, e che la notizia erane pervenuta abbastanza per tempo a Firenze, onde potesse essere registrata *ad calcem della Dialectica nova*, della quale se ne stava appunto allora ultimando la stampa.

Ad ogni modo l'errore passò poscia, come evangelo, ne' principali e più riputati scrittori di Bibliografia nostrali e stranieri. L'Audifredi (1) accortosi, cred'io, del pasticcio creato dal Denis, ha pensato che col combinare tra esse le due edizioni Dionisiane, gli venisse fatto di togliere ogni ambiguità. Quindi dall'una, quella del n.° 194, prese il titolo nel quale il Gioanni è tuttora *protonotario*, e ad esso pose la data del n.° 386, quella del 18 marzo 1498, nella quale il Gioanni si dice Cardinale, ed in tal modo, dissimulando quest'ultimo titolo, non che appianasse la difficoltà, ne creava un nuovo mostro. Il Panzer le registra amendue senza osservazione, citando il Denis. L'Hain senza citarlo le inscrive l'una e l'altra nel suo Catalogo, senza nota veruna esplicativa, e come le avesse vedute ed esaminate esso stesso; ed ecco come si propagano gli errori, i quali se non sono avvertiti finiscono per occupare il luogo della verità.

La Bibliografia non ha importanza se non quando gli Autori usano la più scrupolosa diligenza nell'esame dei volumi che intraprendono a descrivere, non fidandosi per lo più che de' proprii occhi, o quanto meno non tralasciando di discutere i punti dubbii che si presentano da sciogliere in quelli che non si sono potuti vedere. Titoli, soscrizioni, date, registri, segnature, numerazioni, imprese, insegne di stampatori, dediche, prefazioni, note, segni intrinseci della carta, sesto del libro, natura, qualità e taglio del carattere, singolarità di alcune lettere, iniziali zilografiche, miniature, ecc., nulla va dimenticato: tutti i predetti ed altri pure sono gli amminicoli che ne costituiscono l'essenza. La Bibliografia non potrà essere ammessa nel novero delle scienze fuorchè quando ne adotti il metodo e segua rigorosa le norme ch'esse prescrivono.

Quanto al Fossi l'esemplare da esso descritto mancando, come dissi, delle due prime carte nelle quali sono l'indirizzo ai due fratelli, ed il proemio dell'Opera, senza che siasi accorto di tale difetto, venne esso nella strana sentenza di credere, che sebbene il libro fosse composto per uso dei

(1) Edit. Italic. pag. 368.

medesimi e ad essi indirizzato, tuttavolta, qualunque ne sia stata la cagione, nè il proemio nè la dedica vi furono preposti, ed il libro, dice, incomincia senz'altro, *absolute*, dalla definizione della Logica. Perseverava poscia maggiormente il Fossi nell'erronea opinione che al volume non fosse posto verun proemio, allorchè scoperse che questo stesso proemio che doveva essere collocato in testa della *Dialectica nova*, ma ch'era al suo dire rimasto inedito, venne dal Salviati aggiunto al trattato suo *de Gratia* dedicato al Papa Leone X l'anno 1513, il quale si conserva manoscritto nella Biblioteca Laurenziana; al proemio poi faceva precedere il seguente Monito: *ne parcamus huic quae superfuit periturae chartae, ut quo sanctitas tua videat vaticinium istius felicissimi pontificatus exordium dialectices olim impressae atque tuae sanctitati, et magnifico Petro Germano apposuimus etc.;* ma dal Monito stesso doveva anzi il Fossi accertarsi che alla stampa della *Dialettica*, l'anno 1488, vi era pure unito *l'exordium*, e che solo intento del Salviati nel riporlo in capo del suo trattato *de Gratia*, che non venne poi stampato, fu quello di trovar modo, onde col cader di nuovo sotto gli occhi del Pontefice già suo allievo, il quale poteva averlo dimenticato, scorgesse per esso stesso, come egli il Salviati in quel proemio, e 25 anni innanzi, avesse preveduto e vaticinato il presentaneo felicissimo Pontificato. Il proemio poi e la dedica è tanto più facile che manchino ad alcuni esemplari, che per essere compresi nei due soli primi foglietti, privi di segnature, numerazione o registro, e potevano essere tolti e mancare, senza che sia facile di accorgersi del difetto, rimanendo intatto il libro, sulla cui prima pagina incominciano le segnature, le quali si seguono dal *A* al *M*, come meglio si scorgerà dalla descrizione dell'esemplare che intiero ed in buon stato è da me posseduto.

I caratteri adoperati dallo stampatore sono di due sorta, grandi e piccoli, ma tondi amendue, e romani: il più grande pel testo, l'altro per le note esplicative, le linee di ogni pagina sono varie di numero secondo che più abbonda il testo o sovrabbondano le note. Ai detti caratteri s'aggiunge, all'opportunità, il maiuscolo come alla dedica che precede il proemio, ed al titolo di alcuni capitoli. Le pagine non numerate hanno le segnature di quaderno dal *A* al *M* esclusivamente; questo è di duerno. Mancano le lettere maiuscole iniziali dei capi, lasciato lo spazio sostituitavi la lettera minuscola, non vi sono virgole, ad esse si sostituiscono i due punti.

La *dedica* ed il *proemio* sono compresi, come dissi, nelle quattro prime pagine che sono anche cucite separatamente.

Il proemio termina con otto linee della terza, ed il resto, come anche la seguente, sono bianche.

La dedica ai due fratelli Gioanni e Pietro de' Medici, in carattere maiuscolo, è compresa in tredici linee disposte nel modo seguente:

GEORGII BENIGNI DE SALVI
ATIS ORDINIS MINORVM
SACRE THEOLOGIE DOCTO
RIS AD OPTIME INDOLIS
ADOLESCENTES REVEREN
DVM DOMINVM IOHAN
NEM SEDIS APOSTOLICE
PROTHONOTARIVM AC
MA PETRVM MAGNANIMI
VIRI LAVRENTII MEDICIS
FILIOS IN DIALECTICAM NO
VAM PROEMIVM INCIPIT
FEOLICITER

Segue indi il proemio del quale, benchè brevissimo, non riferirò che quella sola parte, la quale concerne ai due suoi allievi: *Verum cum utriusque uestrum expolitum ac elegans spectarem ingenium. Alterumque in sacrosancta xristiana R. P. Alterum in Florentina summum gradum altissimo deo duce adepturum viderem . . . . . Legite igitur atque pellegite Egregii adolescentes. et in hec studia . . . toto pectore incumbite ut Cosmi patriae parentis abaui uestri: ut Petri uiri prestantissimi aui, Vtque Laurentii genitoris, qui suos maiores . . . . . superavit: exemplis edocti uobis splendorem familiae decus R. P. ornamentum afferatis.*

L'opera termina con 21 linea, al foglio retto dell'ultima carta, al verso si legge: *Explicit foeliciter Dialectica noua, Secundum mentem Doctoris subtilis, et beati Thome Aquinatis, aliorumque realistarum. Acutissimi in artibus, Ac Theologia doctoris Magistri Georgii Benigni de Saluiatis: ad preclarissimos adolescentes, Videlicet Reuerendissimum Dominum Joannem sedis apostolice Cardinalem. Et magnificum Petrum filios optimos magnanimi Laurentii Medicis.*

Impressum Florentiae: Ad laudem Domini nostri Jesu Christi: Ac eius semper Virginis matris Mariae. Die vero XVIII mensis Martii MCCCCLXXXVIII.

Finis.

Il volume dal Fossi si dice stampato in forma di quarto, e la stessa cosa hanno ripetuto tutti gli altri Bibliografi che lo copiarono. Di vero l'insegna della carta che si è adoperata si scorge nella cucitura, il che secondo la regola generalmente ricevuta lo indicherebbe (1). La carta è soda e compatta, e questa venne piegata quattro volte, il che indica, a mio credere, che sebbene l'insegna si trovi nella cucitura, tuttavolta il sesto anzichè di 4.to si debba dire di 8.o, ognuno di questi fogli o meglio dei mezzi fogli essendo di sedici facciate colle segnature successive dal *A* al *M*; da quest'ultima in fuori che è di otto sole. L'insegna intrinseca della carta è di varia forma e quindi presa da differenti cartiere, tra le quali, la più evidente, indicata pure dal Fossi, è la *croce* ch'ei dice *dei Galdi* inchiusa in un *circolo*. L'edizione ha la data dell'anno, mese e giorno ne' quali venne terminata la stampa, ma tace dello stampatore nella cui officina venne espressa in metalliche forme: il nome del quale nè dal Fossi nè dagli altri Bibliografi venne neanco per modo di congettura indicato: eppure da chi scriveva in Firenze ed aveva a sua disposizione un numero grande di stampe pur Fiorentine contemporanee, dal confronto con esse, sarebbe stato non difficile lo scoprirlo. Così a me fu dato di scoprire, oltre al primo libro uscito dalle stampe di Lione (2), pel quale si anticipò di tre anni l'esercizio dell'arte in quella città, e di assegnare sì pure alla medesima non poche ancipiti edizioni dal solo confronto, sia della forma e qualità del carattere, ma precipuamente dall'insegna intrinseca della carta per esse adoperata, quella di una *ruota dentata*, la quale fu per un tempo segno esclusivo di cartiera Lionese (3).

Il Vernazza in una sua lettera a Gioanni Battista Belloro di Savona, presso di me, parlando appunto delle congetture in fatto di lettere e di bibliografia scrive: *Tutte le questioni letterarie in cui si ragiona col solo aiuto delle congetture hanno per frequente conclusione la incertezza;* e cita sia la questione intorno alla *Patria* del *Colombo*, che quella concernente all'anno della edizione del *Decor puellarum:* ed io potrei aggiungere quella cui diè luogo la data apposta al libro *I miracoli della gloriosa Verzene Maria* della stampa di Milano che porta l'anno MCCCCLXVIII, un esemplare della quale edizione si conserva nella Biblioteca

(1) V. Debure, Bibliot. de la Vallière presso il Vernazza, Osservaz. tipograf. ecc. Bassano, 8.° p. 25.
(2) Reveren.a Lotharii diaconi, Compendium brevo 4.° pic. Lugduni, an. 1473.
(3) V. Osservaz. Bibliograf. intorno ad un'operetta ascritta al Petrarca.

dell'Università, sebbene per i dubbi sollevati da altri, e per le ragioni da me arrecate nella lettera allo Spotorno (1) sia abbondantemente provato lo sbaglio occorso per la mancanza di una decina: ma di queste l'Amati non tenne conto e ribadì il chiodo all'errore ora riconosciuto dai più valenti Bibliografi. Con tale giusta *osservazione intorno alle congetture* mirava cred'io il Vernazza ai due suoi più accurati lavori bibliografici *le osservazioni tipografiche sopra libri impressi in Piemonte nel secolo XV* (2); *e la tipografia in Alba nel secolo XV* (3), *i quali lavori*, diceva nella stessa lettera al Belloro, *sono i due libri di storia tipografica dei quali ho meno da pentirmi*, ma erano essi pure ed unicamente fondati sulle congetture. Di fatto per l'esame da esso istituito sui segni intrinseci della carta adoperata per la stampa delle tre edizioni eseguite dalli stampatori Glim e Beggiamo, il *Boezio*, il *manipulus curatorum* e lo *speculum vitae humanae*, deduceva che quelle ancipiti edizioni si dovevano credere eseguite in tale paese ove quei segni erano proprii e specifici delle cartiere in tal tempo colà stabilite, cioè il Piemonte (4). Sin qui la congettura poteva credersi avere i caratteri della verità; ma non così allorchè volle che la città di Savigliano fosse il luogo della stampa perchè patria del Beggiamo; è l'anno di esse il 1470; chè nessun solido argomento venne arrecato onde farne accettare la troppo debole assertiva. S'aggiunga che mentre una nuova stampa del Glim *Le eroidi di Ovidio* trovata posteriormente, ignota al Vernazza, e da me illustrata (5), per i segni intrinseci della carta che sono identici a quelli delle tre prime, si conferma essersi questa pure eseguita in Piemonte, nulla aggiunge quanto al luogo, ed all'anno delle edizioni, rimanendo queste tuttora nell'incertezza se più che a Savigliano non debbano essere anzi assegnate ad Asti, o a qualsiasi altro luogo o città subalpina.

Quanto all'altro suo lavoro *la Tipografia in Alba nel secolo XV*, ch'esso credeva fondato sopra abbastanza solide basi da dover ingenerare certezza, esso non ebbe miglior fortuna dell'altro, anzi posteriori scoperte ignote al Vernazza, quando pubblicava il suo scritto, distrussero i due più solidi

---

(1) Lettere Bibliografiche, pag. 48.
(2) Bassano, 1807, 8.°
(3) Torino, Bianchi, 1815, 8.°
(4) Vernazza, Osservaz. predet., pag. 48.
(5) Notizia di una sconosciuta ediz. piemontese delle Eroidi di Ovidio del secolo XV. 4.°

argomenti, sui quali aveva fondato tutto il bene architettato edifizio del Libro. In primo luogo, e per quanto concerne al Venturino de' Priori correttore del *Dottrinale del Villadei* descritto dall'olandese Meerman, per un lavoro inedito di Gioanni Tommaso Belloro inviato al Vernazza dal figliuol suo, dopo la morte di quel dotto savonese, ebbe questi a scrivere in lettera di risposta al medesimo in data del 16 di marzo 1822, *all'altro (libro)* LA TIPOGRAFIA IN ALBA *debbo mutar pensiero intorno alla persona di Venturino de' Priori, dopo la sua lettera: a tal fine farò senza dubbio ristampare due pagine del mio libro che è sotto il torchio ed è intitolato:* OSSERVAZIONI LETTERARIE PARTICOLARMENTE DI STORIA TIPOGRAFICA *dove non mancherò di far uso delle nozioni adunate dall'ottimo suo padre che ricevo dalla generosa di lei cortesia.*

Ma questa ristampa non venne poscia eseguita per la funesta sua morte poco stante accaduta, il giorno 13 di maggio 1822. Abbandonata la sua prima opinione intorno al luogo ove insegnava il Venturino, rimaneva adesso il secondo suo argomento quello concernente il luogo ove se ne fosse eseguita la stampa. Il Vernazza intanto voleva che il *Dottrinale* si dovesse credere stampato in Alba sua patria, per due ragioni: la prima perchè al tempo al quale pretendeva fatta quell'edizione, l'anno 1493, il Venturino si trovava in Alba, Rettore di quelle scuole, e poteva quindi comodamente curare la stampa del *Villadei*. Quanto all'altra poi dicendo l'ignoto stampatore che il libro venne *impressum sat incomode, cum aliquarum rerum quae ad hanc artem pertinent impressori copia fieri non potuerit in huius* ARTIS INITIO, PESTE GENVAE AST ALIBIQVE *militante;* il Vernazza non ritrovando che per quei tempi la peste si fosse dichiarata a Genova, ad Asti e paesi circostanti fuorchè l'anno 1493, a quest'anno volle assegnata la stampa del *Dottrinale*, e colà dove dimorava il Venturino correttore del medesimo, cioè la città d'Alba.

Ma lasciando per ora da parte il discutere del tempo in cui la peste infierisse nel nostro paese, come mai dal Vernazza sì dotto e particolarmente istrutto intorno all'origine ed al progresso dell'arte tipografica, come si poteva asserire che l'anno 1493, ventotto anni dacchè questa, nel 1465, era stata introdotta in Italia, quell'anno potesse dirsi *in huius artis initio?* Egli è un voler torcere nel senso della preconcetta opinione un fatto che diametralmente vi si oppone, e come dice Mauro Boni *bisogna far troppa forza a queste parole per estendere* I PRINCIPII DELL'ARTE *sino agli ultimi anni del secolo* XV. Sapeva egli, meglio di ogni altro, che in

tal anno non si poteva dire in modo alcuno che l'arte impressoria, anche limitata alle nostre provincie, fosse ne' suoi primordii: e di vero le ragioni da esso arrecate per sostegno del suo assunto (1) sono di tanta meschinità da non far onore alla sua saggezza. Non l'era ignoto che già prima di tale anno, 1493, oltre alle stampe ancipiti del Glim e Beggiamo da esso stesso illustrate e che volle impresse l'anno 1470 a Savigliano eranvi quelle di Mondovì degli anni 1472, 1473, 1476, 1480, quelle altre, e moltiplici del Fabre, di Torino, Caselle, Saluzzo degli anni 1474 al 1482. *La somma pisanella* di Genova dello stesso anno 1474, per Matteo Moravo e Michele di Monaco, e l'altra di Gioanni de' Nanis *de futuris christianorum triumphis* dell'anno 1480, quella del Boezio di Savona 1474, le eseguite a Pinerolo dal de Rossi 1479, 1480, 1481. L'altra del Persio ugualmente di Saluzzo per Martino della Valle, 1481. Le edizioni dello Svigo di Vercelli e Chivasso 1485. Dello Svigo stesso e Benedetti di Torino 1487 e seguenti; quelle di Casale 1481, 1482, e quella di Voghera 1486, di Giacomo de Sancto Nazario. Da questa enumerazione delle edizioni eseguite in Piemonte e dintorni da diversi impressori nell'intervallo di tempo che ha preceduto l'anno 1493, si può ancor meglio scorgere con quanto di giustizia da esso sia detto *in huius artis initio.*

Passando ora all'Achille degli argomenti del Vernazza per attribuire all'anno 1493 l'ancipite *edizione Meermiana*, quello cioè per cui non si trovando in nessun altro anno, dopo la introduzione della stampa fra noi, da quello in fuori del 93, nel quale fosse peste a Genova, ad Asti e paesi contermini, si doveva di necessità assegnarla a quell'anno; tale stringente argomento cadde esso pure inappellabilmente. Percorrendo il mio caro amico il Conte Giacomo Manzoni dottissimo personaggio in molte scienze e profondo in Bibliografia, il quale è ora occupato nel dare una esatta descrizione delle edizioni Torinesi del secolo della stampa, percorrendo esso la Cronica *Summorum pontificum imperatorum* ecc. detta *Cronica Martini* dell'edizione Torinese del Fabri 1477, alla quale si fecero alcune aggiunte concernenti al Duca Amedeo IX, ed alla Duchessa Violante di Francia sua consorte, le quali non si leggono nelle stampe romane degli anni 1474, 1476, ritrovò che quasi presaghe della morte di quel Principe accaduta il 20 di marzo dell'anno 1472, vi sono descritte molte calamità che afflissero in tale anno i nostri paesi. Prima spaventò

(1) Tipograf. in Alba, p. 52.

le popolazioni *stella comata* che *sparsis crinibus plurimis diebus visa est.* Indi *magnus et ingens terrae concussus*, poscia *inundatio aquarum* che *multa edificia solo equavit, ibique homines et jumenta innumera infeliciter periere.* In fine e per corona *hisdem temporibus* PESTILENTIA *et fames non modica.* È da maravigliare come dal Vernazza, che cita e parla lungamente in questo suo libro della edizione del Fabri della cronica de'sommi Pontefici ed Imperatori (1), non sia fatta menzione della pestilenza *non modica* che vi è registrata, la quale travagliò il nostro paese gli anni 1472, 1473 *hisdem temporibus*, notizia questa che quando gli fosse caduta sott'occhio avrebbe bastato a rendere impossibile il suo volume. Ora è questa per appunto quella peste, e non l'altra del 1493 che aveva renduta assai incomoda la stampa del *Dottrinale*, per mancanza di operai ed utensili necessari, che la peste aveva impedito di poter provvedere in que' primordii sopratutto dell'arte *in huius artis inicio.* E primordii dell'arte si potevano giustamente chiamare quelli degli anni 1472, 1473, ne'quali, lasciando da parte le incerte edizioni del Glim e Beggiamo, delle quali nè il tempo, nè il luogo sono determinati; questa del *Villadei* sarebbe il primo libro che siasi stampato fra noi, dall'edizione in fuori del Mondovì, del Mattia di Anversa e del Cordero, in data certa del 24 di ottobre 1472, la quale può credersi, se non anteriore di qualche mese certo contemporaneamente impressa *aeneis formis.* Cessata poscia sul finire del 1473 la pestilenza e ricevuto quanto occorreva onde proseguire l'esercizio dell'arte, stampando libri con altra sorte di caratteri e con maggiore eleganza *imprimentur autem postea libri alterius generis litteris et eleganter arbitror* scrive il Venturino a nome dello stampatore.

Questo stampatore era un Agostiniano del Convento di Savona detto frate Buon Gioanni, Tedesco di nazione, come si raccoglie dalle due soscrizioni poste alle due sue stampe di Savona e di Milano *Theutonicae gentis alumnus* dice di se stesso nel Boezio, e *Theutonicis delatus bonus aere Johannes nelle confessioni di S. Agostino.* Il frate Bon Gioanni s'accinse dunque all'opera e potè condurre a fine l'anno seguente 1474 la elegante, nitida e corretta edizione della *Consolazione della Filosofia* di Boezio, alla correzione della quale attese lo stesso Venturino, come consta dal suo epigramma posto in fine del libro.

---

(1) Tipog. in Alba, p. 96.

Il Laire (1), il quale scrive di aver avuto tra mani ed esaminato l'esemplare del Boezio nella Biblioteca di Pio VI *Romae in museo pontificis Pii VI tractavi . . . cuius sic se habet titulus* Boetii consolatio philosophiae imprin Savona in conventu S. Augustini per fratrem bonum Johannem emendante Venturino, non fa cenno veruno dell'epigramma. Il Brunet (2) nella terza edizione del Manuale dell'anno 1820 nota l'edizione del Boezio di Savona, quale venne registrata dal Santander (3), che l'aveva copiata dal Laire. Nel supplemento poi dell'anno 1834 ripete la notizia dell'edizione Savonese, ma questa con una sottoscrizione, dic'egli, *dont voici un fragment*, e trascrive di fatto i tre primi versi dell'epigramma del Venturino, i quali poscia e con le stesse parole ripete nella sua quarta ed ultima edizione dell'anno 1842. Il solo Chabrol (4) fu primo a publicare intiero l'epigramma del Venturino a pag. 32 del secondo volume della *Statistica di Savona* senza indicare donde lo togliesse. È probabile tuttavolta che gli fosse fornito dall'esemplare pergameno del Boezio, che si conserva, dicono, in un convento di Savona, e che dal libro del Chabrol ne ricavasse la notizia e copiasse i tre versi sopra indicati; il Brunet dallo scorgere che da esso ne' tre versi arrecati copiava gli errori stessi che si leggono nella copia del Chabrol, tanto più ch'essi comparvero per la prima volta nel supplemento stampato l'anno 1834, mentre la *Statistica di Montenotte* lo fu a Parigi dieci anni prima nel 1824. Del resto la copia datane dal Chabrol è piena zeppa di errori. Non a torto quindi il Vernazza, che defunto l'anno 1822 non aveva potuto vedere nè l'epigramma recato dal Chabrol l'anno 1824, nè i tre versi citati da Brunet nel 1834, volendo provare che il nome dello stampatore del Boezio non fosse già Gioanni Bono, come piaceva all'Ab. Mauro Boni, ma sì bene frate Bon-Gioanni unicamente, per non sapersi qual fosse il suo casato (5) recando il suo nome quale viene riferito nella soscrizione della edizione di Milano delle *confessioni di S. Agostino*, soggiunge, *io comprendo che il metro della* soscrizione predetta *potè obligare il verseggiatore a trasporre la parola* JOHANNES *dopo la parola* BONUS, *ma nel Boezio di Savona la notizia*

(1) Index Libr. ab inven. Tipograf. vol. pag. 352.
(2) Manuel du Libraire, vol. 1, prior anno 1474, in 4.°
(3) Diction. Bibliogr. 3 vol. 8.°
(4) Statistique du Départ. de Montenotte. Paris, 1824, 2 vol. 4.°
(5) Tip. in Alb.

tipografica è in PROSA e *però non vi era obligo alcuno di anteporre il cognome al nome.* Essa notizia tipografica è *In conventu sancti Agostini per fratrem Bonum Johannem;* così di fatto si legge nel Laire, il quale mancando all'obligo di accurato bibliografo che è l'esattezza, in luogo di recare la vera soscrizione che è l'epigramma di Venturino, ne formava una a capriccio, inducendo così in errore il Vernazza, che, credendola in prosa quale la recava Laire, se ne serviva a buon diritto in prova del suo assunto.

A me fu dato di avere, saranno ormai quindici anni trascorsi, un'ampia ed accurata descrizione di questa stampa supremamente rara di Savona, che dall'esemplare conservatissimo della domestica biblioteca del M.^se^ Marcello Durazzo, ebbe la compiacente gentilezza di ricavarne per me un colto Patrizio Genovese. A toglier quindi sia i dubbii, che gli equivoci che vennero sollevati e prodotti per la mancanza od imperfetta cognizione del sopradetto epigramma, cred'io non inopportuno di darne una esatta, e corretta ristampa, quale mi venne inviata. Esso si trova in fine del volume al foglio verso dell'ultima carta. Il sesto del volume è di 4.^to^ piccolo, e le pagine sono in tutto 64, di bel carattere tondo ma con molte abbreviature. Il libro comincia senza titolo e senza il nome dell'Autore; non ha numerazione nè registro; alla prima pagina si leggono cinque esametri coi quali si compendia quanto si contiene nei cinque Libri ne' quali è divisa l'operetta *de consolatione.*

Eccovi l'Epigramma.

Venturini Prioris Epigramma

In laudem operis et artificis.

Est Augustini conventus in urbe Saona
Et vitae, et fidei relligione sacer:
Hoc impressit ibi frater Bonus aere Johannes
Teutonice, clarum gentis alumnus opus:
Pontificis summi genuit quem clara Saona
Tunc Sixti quarti tertius annus erat:
Principe Cesareo Galeaz Florente Maria:
Dum Genuae dominus imperitaret ibi:
Hunc Venturino Librum Emendante Priore:
Errati Lector Labe carere scias.

Subito dopo si legge:

Anicii: Manulii: Torquati:
Severini Boethii: ex consulis
Ordinarii: patricii: De philo-
sophica consolatione Liber quin-
tus et ultimus explicit
MCCCCLXXIIII.

Con questa edizione del Boezio e coll'altra del *Dottrinale del Villadei* finiscono le stampe del secolo xv in Savona. Se ne ripristinò l'esercizio da Francesco Silva, il quale, già prima dell'anno 1495, erasi stabilito a Torino colla famiglia ed apertavi Stamperia; in quell'anno stesso vi pubblicava la rarissima operetta *Fior di virtù*. Chiamato a Savona, per cura, cred'io, del giureconsulto Bernardino Chiesa, onde curare la stampa della *Poliantea*, opera di *Domenico Nano Mirabello cittadino di Alba*, vi si recò, e posto mano all'opera, ne terminava l'edizione il 13 febbraio dell'anno 1503. Altro libro dopo della Poliantea stampavasi dal Silva in Savona, cui pose fine il nove di marzo dello stesso anno, un esemplare del quale si trova nella Biblioteca del Re e sono: *Conventiones existentes inter inclitam et excelsam communitatem Janue ex una et magnificam communitatem Saonae ex altera et que sunt inter eas observandae, virtute ultimae sententiae inter ipsas late, ut fatet intuenti.* Infine: Impressum Saone per Magistrum Franciscum de Silva MCCCCCIII die IX marcii 4.to 34 pagine con segnature *a-d* di quaderno, eccetto *d* che è duerno, con lettere tonde e monogramma del tipografo: il marchio della carta, mano distesa con sopra la stella. Una terza edizione eseguita dal Silva in Savona, rimasta ignota sin qui, è in mie mani, esemplare, unico forse, cioè *Psalterium Beate Virginis Marie.* In fine: *Dominico Nano, cive alben recensente. Impressum Saone P. Magistrum Franciscum de Silua VIII calen aprilis MCCCCCIII*, cioè 16 giorni soli dopo la stampa delle sopradette *conventiones.* Il sesto è ottavo piccolo, ha le segnature *a–q* tutte di quaderno. Libretto elegante con carattere tondo, ben conservato e rarissimo. Era del Barone Vernazza che ne parla nell'articolo *Francesco Silva* dell'opera sua inedita: *Osservazioni letterarie particolarmente di Storia Tipografica.* In questa, all'articolo *Silva Gioanni Angelo e Bernardino,* dice pure il Vernazza, *Il Ranza nella prefazione alla* SFREIDE del *Tesauro* (pag. XII) scrisse *Angelo e Bernardino fratelli di Selve stampatori in*

Torino e Savona. Due cose qui si affermano, delle quali non ho veduta alcuna prova. Che Francesco Silva stampasse in Savona mi è noto, che vi stampassero gli altri due fratelli non mi consta. Nel catalogo delle famiglie torinesi fatto dal Pingon (Aug. Taur. p. 122) si trovano *adventitii nobiles et cives*: *tra costoro è la famiglia Sylva; ma non appare ch'ella derivasse il cognome dalla terra di Selve propinqua a S. Germano sul Vercellese come sembra accennarsi dal Ranza.* Io anzi inclinerei a credere che i Silva fossero famiglia Milanese giacchè, e in allora e di poi e sino ai nostri giorni sono famiglie di Silva in Milano.

Due altri tentativi vennero fatti in Savona per stabilirvi la tipografia; nel 1514, ove il girovago Simone Bevilaqua procurò ivi la seconda edizione della *poliantea del Nano*: e quindi nel 1524 da Giuseppe Berruerio che vi si recava da Mondovì, ove la famiglia de' Barrueri esercitò per varii anni con distinzione l'arte tipografica, il quale vi riprodusse il *Libellus de natura animalium perpulcre moralizzatus*, con molte stampe in 4.°, che già sin dall'anno 1508 erasi da Vincenzio Barruerio stampato in Mondovì, pian della valle (1).

Ma per ritornare dal diverticolo in via, ed alla *Dialettica del Salviati* dalla quale ci siamo alquanto e forse di soverchio allontanati, avevamo detto più sopra come l'edizione non porti il nome dello stampatore, e che non sarebbe stato difficile al Fossi, il quale scrivendo in Firenze poteva con facilità esaminare non poche stampe contemporanee a questa nostra, sulle quali non è taciuto il nome dell'impressore, avrebbe potuto, dicemmo, di leggieri per via di confronto scoprire l'ignota officina dalla quale era uscita. Così per via dello stesso confronto e per l'esame delle differenti edizioni uscite da una stessa tipografia a me venne fatto non già solo di scoprire l'ignoto stampatore per opera del quale eransi eseguite, ma di togliere anzi dal ruolo degli impressori il nome di alcuni che da tempo n'erano in possesso. Tanto accade al Bartolomeo Buyer, il quale non era soltanto creduto primo stampatore di Lione in Francia, ma sì pure l'introduttore dell'arte in quella illustre città (2). Ugual sorte mi ingegnai di dimostrare dover toccare al *Lavagna*, che stimato esso pure tipografo, anzi il primo uomo italiano che esercitasse quest'arte benefica in Italia, al quale, se dovette scadere dai due gloriosi seggi apprestatigli senza ragione,

(1) Grassi di S. Cristina, Tipograf. di Mondovì, XXXVII.

(2) Osservaz. Bibliogr. intorno ad un'operetta ascritta al Petrarca.

rimase quello non meno onorifico di aver procurata, col suo danaro, l'edizione di molte opere utilissime, col mezzo del Parmigiano Zarotto e di altri tipografi di Milano (1).

A dir vero però le edizioni Fiorentine contemporanee a questa della *Dialectica*, tutte quasi si somigliano, avendo i varii stampatori di quel tempo adoperato lo stesso carattere tondo e di taglio uniforme, carta uscita dalle stesse cartiere avente i medesimi intrinseci segni, ecc., a talchè rimane colà più difficile che non altrove a poterne per tal via discoprire il nome dello stampatore. Resta quindi che si tenti altra via. Così dallo scorgere come altri scritti del Salviati, p. e. le *propheticae solutiones furono impresse per ser Laurentium de Morgianis*, il quale incominciava appunto l'esercizio dell'arte in questi anni 1487-1488, e la continuava per molti altri successivi in Firenze, qualificandosi ora *chierico* ora *sacerdote* ora *ser:* talora solo, altre volte col *Pacini da Pescia*, poscia, e più lungamente, con *Gioanni di Piero il Thodesco di Maganza*. Dal paragone di tali stampe del Morgianis colla edizione della dialettica, sarà possibile lo stabilire se questa del Salviati, priva dell'indicazione dello stampatore, possa ad esso de' Morgianis essere assegnata.

---

(1) V. Lettera 2.ª Bibliografica al P. Spotorno, pag. 442-529.

DEI

GOVERNI FEDERATIVI DELLA GRECIA

DI AMEDEO PEYRON

Letta nelle adunanze 18 marzo al 10 di giugno 1858

1.° Annunzio e circoscrizione dell'argomento. Modo di trattarlo.

Come Roma fu e sarà sempre maestra di legislazione civile nell'orbe, così la Grecia, che fece esperimento di centocinquanta e più statuti politici (1), ci darà utili insegnamenti sul reggimento degli Stati, se noi ne studieremo le forme e la storia con quella diligenza, colla quale i giurisprudenti anche della nostra età non cessano d'illustrare gli antichi testi delle leggi romane.

Una delle forme di reggimenti politici, stata sperimentata dai Greci, è quella dei governi federativi, la quale somministrò già al Barone di Sainte-Croix l'argomento dell'opera, che egli appunto intitolò: *Des anciens gouvernemens fédératifs. Paris, an. 7 de la républ.*, opera che salì e si mantiene tuttavia in fama. Se non che quantunque volte io presi a leggerla non potei giammai ricavarne tal idea ordinata e precisa da esser tradotta in poche conchiudenti proposizioni. Vorrò io qui instituirne la censura? Anzichè imporni tal ingrato uffizio dirò piuttosto qual metodo io abbia seguito nel trattare nuovamente lo stesso argomento, esponendo i fatti con erudizione, ordine e chiarezza, congiunta a brevità, donde poi spontaneo risulta il giudizio, che dei greci governi federativi portare dobbiamo.

(1) Aristotele aveva composto un libro intitolato: *Statuti politici di centocinquantotto città*, citato da Diogene Laerzio nella vita d'Aristotele, lib. V. I. 12.

Anzi tutto io debbo circoscrivere il mio argomento, separandolo da quelle altre consociazioni di greche città, che possono sembrare, ma non erano federazioni politiche.

Come più celebri di tutte si incontrano nella storia greca le Amfizionie, che sogliono dagli odierni ristauratori delle nazionalità disperse consigliarsi come unioni politiche di cittadini anticamente congeneri; ma questa definizione è al tutto falsa. Imperocchè i diversi rami d'una tribù, quando si dividevano per formare Stati diversi, siccome ricusavano di rinunziare alla religione, che era speciale per quella tribù e locale in un determinato tempio eretto a spese comuni, però nel separarsi dalla tribù madre quanto agli interessi politici e civili volevano ancora mantenersi ad essa uniti, quanto al culto religioso del Dio de' loro padri, patrono particolare della tribù; quindi si riserbavano il diritto di frequentare il tempio, e di mandar deputati che partecipassero all'amministrazione, al decoro, ai diritti ed alle feste del tempio, che riguardavano come proprietà comune. I deputati chiamavansi Amfizioni, ed Amfizionie le loro adunanze; la più celebre era quella di Delfo, moltissime erano quelle minori. Tutte avevano uno scopo unicamente religioso, e valgono a dimostrare siccome la religione è il più tenace vincolo della società; ma nulla avevano che fare colla politica, talchè Tucidide e Senofonte poterono scrivere le loro storie, senza pur nominare gli Amfizioni.

Le Egemonie erano un'altra specie d'unione. Mentre la Grecia era corsa da tribù, le quali cercandosi nuove sedi ne cacciavano i primi abitatori, le città vicine, e massime se sorelle per origine, univano le loro forze sotto la condotta d'un capo, detto Egemone, a fine di respingere gli assalitori; queste erano alleanze militari e temporanee, e, cessato il pericolo, le città tornavano alla prima indipendenza, e talora si rompevano guerra fra loro. Col progresso del tempo l'egemonia si radicò nella città la più potente, che ne'varii Stati l'esercitò in diversi modi. Sparta per gran tempo la esercitò lealmente, convocando le città confederate per deliberare sulle dichiarazioni e sulle occorrenze di guerra; essa procacciava bensì che tutte si reggessero con ordini aristocratici, ma le lasciava libere nella loro amministrazione interna. Laddove Atene, dopo aver usato pari lealtà per pochi anni, voltò la sua egemonia in un vero dominio sopra sudditi privi dei diritti politici e dell'autorità giudiziaria nelle cause di qualche momento, ed inoltre obbligati a pagar un tributo, ed a far guerra e pace quando e come piacesse a lei. Nè l'una nè l'altra egemonia, siccome priva

d'una dieta che provvedesse ai generali interessi politici e civili, non era un governo federativo.

Ultima maniera di unir le greche città fra loro era quella della συνοικία, che noi diremmo *fusione*. Anticamente le città dell'Attica, al dir di Tucidide (1), si amministravano da sè avendo proprii pritanei ed arconti, e solamente si univano ad Atene per respingere qualche comune nemico, ma Teseo ne abolì i consigli ed i magistrati, e concentrandoli tutti nel senato e nel pritaneo d'Atene eseguì la fusione dell'Attica in un solo Stato e governo. In età più tarda Mitilene tentò la fusione delle varie città dell'isola di Lesbo, ma invano (2). Anche questa specie d'unione, nella quale i varii membri rinunziano all'intera loro sovranità, differisce dal governo federativo.

Io chiamo federazione, ossia governo federativo, l'unione di più città indipendenti, le quali a norma di uno statuto liberamente acconsentito deponendo una parte della loro sovranità in un centro comune federale formano così un solo Stato in pace ed in guerra per quanto riguarda i soli interessi generali. Di tali governi nella Grecia io trovai la sola lega Arcadica, e quella Achea, e vidi che a tal forma si accostava il governo che Tebe procacciava d'introdurre nella Beozia; epperò a questi tre soli governi, al Beoto, all'Arcadico ed all'Acheo io ristringo il mio lavoro. Bensì gli Etoli negli ultimi anni della guerra pare che si sieno uniti con una lega federativa, ma essi masnadieri, predatori dei vicini, sprezzatori anzi derisori d'ogni diritto, fedifragi con gli stranieri, infrattori delle stesse loro leggi, se formarono una federazione fra loro, questa fu la federazione di ladroni, che non merita d'esser annoverata fralle unioni dei popoli inciviliti, come gli Etoli stessi non erano considerati quali Greci. Anche dei Focesi e dei Tessali si dubita che si fossero stretti con un'unione federale, ma appunto se ne dubita, perchè la storia non conservò che poche notizie; epperò, quando anche la lega fosse vera, la scarsità delle notizie non ci permetterebbe di farne alcuna stima. Arrogi che i cenni degli antichi possono anche applicarsi ad una lega egemonica.

Che se altri ancora credesse il Pan Ionio essere stato una lega federativa delle dodici città ioniche dell'Asia minore, costui sappia che il Larcher sedotto già dall'autorità del Montesquieu, del Goguet, del Mably e di altri ritrattò poi tal opinione nella seconda edizione del suo volgarizzamento

(1) Tucidide II. 15.
(2) Tucidide III. 2. sg.

d'Erodoto, nella nota 365 del libro I. Infatti Pan Ionio chiamavasi il tempio costrutto dalle dodici città sul monte Micale, dove esse convenivano a celebrare sacre feste (1), e così pure si appellava la Ionica anfizionia. Bensì Talete, al dir d'Erodoto, aveva consigliato quelle Ioniche città *a stabilire un solo Senato in Teo, città centrale della Ionia, mentre le altre città abitate si sarebbero nientemeno amministrate come se fossero Demi* (2), ma questo consiglio non fu accettato. Il governo federativo proposto da Talete fu in ogni tempo accarezzato dai politici teorici, siccome quello che sembra a prima giunta riunire in sè la maggior libertà dei membri federati con tutta la loro forza derivante dall'unione; quindi codesti politici umbratili vollero nell'antichità trovare federazioni, che non furono mai, siccome quella del Pan Ionio, e l'altra delle città Etrusche. Ma a quel modo che le macchine intricate per molti e finissimi ingegni sono posteriori a quelle semplici, così i governi federativi appartengono ad età moderne. La sola vera e schietta federazione, che conosciamo nella Grecia, fu la Achea, preceduta di qualche anno da un saggio imperfetto fattone nell'Arcadia; giacchè la Beota non fu che una simulazione inventata da Tebe a fine di far passo dall'egemonia al comando assoluto della Beozia, epperò viene ora da me illustrata non come una sincera federazione, ma come una scaltra ipocrisia.

Circoscritto così il mio argomento e ridotto ai tre soli Stati della Beozia, dell'Arcadia e dell'Acaia, io considerai ciascuna federazione sotto due rispetti, nel suo statuto, e nella sua storia. Il primo ci rivela l'idea teorica che presiedette all'unione, la seconda ci dà i risultamenti effettivi che ci avviano a far giudizio dell'unione medesima. Nell'esporre lo statuto io procacciai di rifarne, per quanto era possibile, il testo primitivo distinto in articoli; poi a ciascun articolo aggiunsi le citazioni degli antichi donde lo ricavai, non che le osservazioni opportune e le conghietture che dedurre se ne possono. Se non che dello statuto Arcadico trovai così pochi cenni presso gli antichi, che non potrò formarne una parte distinta; ma tal lega durò pochi anni, essendosi unita a quella Achea. Venendo poi alla storia io riferii quei soli fatti che si connettono con ciascuna federazione, mostrandone l'origine e le fasi diverse. Il testo dello statuto e la sua storia mi somministrarono le considerazioni speciali a ciascun governo, ultime riservai le generali.

(1) Erodoto I. 143. 148.
(2) Erodoto I 170

PARTE PRIMA

LA FEDERAZIONE TEBANA

2.° Statuto della federazione.

Cominciando dalla federazione Beota dico, che un' Eolica tribù cacciata dalla Tessalia venne nella terra Cadmea a ricongiungersi con un'altra frazione della medesima tribù, che già vi stanziava, e sorse allora Tebe, la quale essendo col tempo cresciuta a potenza pretendeva che le altre città della Beozia fossero a lei unite con un vincolo federale. Gli articoli dell'unione, per quanto possiamo raccoglierli nella storia de' più floridi tempi di Tebe, erano i seguenti:

1.° La città di Tebe è la sede del governo federale.

2.° Il governo si compone di Beotarchi, e di Senatori [βουλευταὶ].

3.° Ogni città nomina annualmente un deputato, che manda a sedere in Tebe col titolo di Beotarca, ma Tebe ne nomina due. Uno dei due Tebani è il supremo capitano dell'esercito federato; gli altri Beotarchi sono i suoi consiglieri di guerra.

Nell'anno ottavo della guerra del Peloponneso i Beotarchi dell'intera nazione erano undici, epperò nove erano le città federate, investite del diritto di deputazione; di queste ne conosciamo con certezza sei, Aliarto, Coronea, Cope, Tespie, Tanagra ed Orcomeno (1). Ma al tempo della battaglia di Leuctra i Beotarchi erano soli sette (2); anche sette compaiono in un'iscrizione tebana riferita dal Boeckh (3). Ai tempi poi di Perseo furono dodici quei privati, che si costituirono Beotarchi (4). Il Boeckh crede che il loro numero regolare fosse sette (5), ma parmi più probabile che il numero essendo relativo a quello delle città attualmente confederate variasse secondo le defezioni che avvenivano.

---

(1) Tucidide. IV. 91. 93.

(2) Diodoro Siculo XV. 52. 53, Pausania IX. 13. 3.

(3) Boeckh *Corpus Inscript. Graecarum.* Tom. I. p. 738.

(4) Livio. XLII. 43.

(5) Boeckh l. cit.

I Beotarchi di Tebe erano due (1). Bensì nel calore della sommossa, che cacciò i Lacedemoni, Tebe nominò a Beotarchi Pelopida, Melone e Carone; ma tosto, riordinate le cose, i Beotarchi tornarono ad esser due, Pelopida e Gorgida (2).

4.° I Beotarchi, oltre al provvedere alle cose di guerra, trattano le alleanze con gli Stati esteri, ma le sottopongono all'approvazione del Senato prima di essere giurate.

Sebbene il consesso de' Beotarchi sia chiamato da Livio *commune concilium Boeotorum* (3), tuttavia il loro uffizio era solamente militare. Un solo, e sempre Tebano, comparisce nella storia capitano supremo; gli altri lo accompagnavano formando il consiglio di guerra, il quale deliberava sulle fazioni e sulle relazioni con estere truppe (4). Da Tucidide sappiamo che i Beotarchi avevano per mezzo d'ambasciadori trattata la lega con Argo, ma prima di giurarla la comunicarono *ai quattro consigli dei Beoti, i quali avevano l'autorità suprema*, ed i consiglieri, sebbene soliti ad approvare le proposte de' Beotarchi, tuttavia quella volta dissentirono, e la lega non si conchiuse (5).

5.° Il Senato ha la suprema autorità nelle cose politiche e civili della federazione; approva o respinge le alleanze con esteri Stati proposte dai Beotarchi.

Si compone di quattro classi.

Dei quattro Consigli, che troviamo citati dal solo Tucidide l. cit., sappiamo solamente, che avevano *un'autorità suprema*, e questa doveva riferirsi alle sole cose politiche e civili della federazione, siccome l'autorità de' Beotarchi era suprema nelle cose di guerra; questi proponevano la lega esaminata dal lato militare, e quelli la deliberavano dal lato politico. Siccome poi Tucidide proseguendo a parlare nomina il *consiglio* [βουλή] in singolare, possiamo credere che esso fosse un solo distinto in quattro classi. Posto un sì gran numero di classi, epperò di consiglieri, possiamo congetturare 1.° che i consiglieri fossero molti, perchè ogni città nominava i suoi, siccome deputava il suo Beotarca; ma Tebe probabilmente nominava un numero doppio di consiglieri, siccome deputava

(1) Tucidide II. 2. IV. 91.
(2) Plutarco *Pelopidas*. 13. 14. 24.
(3) Livio l. cit.
(4) Tucidide IV. 91. Diodoro e Pausania l. cit. Senofonte *Hellenica* III. 4. 4.
(5) Tucidide V. 38.

due Beotarchi. 2.° Che gli affari fossero molti, e fra essi si comprendessero le cause le più rilevanti e quelle capitali delle città federate; così nella lega Ateniese ed in quella Achea tali cause si giudicavano solamente dal Senato Ateniese e da quello Acheo. I consiglieri sono chiamati βουλευταὶ da Tucidide, e βουλὴ il consiglio, epperò noi usando i nostri vocaboli possiamo denominarli Senatori e Senato.

6.° Ogni città federata è autonoma, e si amministra da sè, avendo il proprio Arconte, il Polemarco, il Senato, e l'adunanza popolare; ma è retta secondo gli ordini politici di Tebe.

Nelle iscrizioni di parecchie città Beote troviamo nominato l'Arconte, il Polemarco, il Senato ed il popolo delle varie città (1). La conformità del governo come era un obbligo, che Sparta ed Atene imponevano ai loro alleati, così Tebe esigeva che le città Beote si conformassero a lei nel reggimento; quindi Tebe, dopo aver assoggettata Oropo, non tardò di comunicarle la forma del suo governo (2). Essa da antico era aristocratica, così che a' tempi di Serse degenerò in un' oligarchia, la quale trasse la Beozia quasi intera nella lega del barbaro (3); ma a' tempi di Epaminonda gli ordini erano democratici (4). Se non che, vedremo fra breve, che l'autonomia promessa era solo nominale.

7.° Ogni città federata contribuirà a Tebe quel contingente di soldati, di danaro e d'altro, che le verrà imposto.

Diodoro Siculo per ben cinque volte chiama συντέλεια la federazione Tebana (5), ed Isocrate scrive che Platea fu costretta συντελεῖν τοῖς Θηβαίοις; tal vocabolo corrisponde etimologicamente al nostro *contribuire*. Badiamo tuttavia a non attribuirgli il solo valore di pagar un tributo, siccome fecero alcuni volgarizzatori d'Isocrate; il contribuire dei federati comprendeva non solamente il danaro, ma i soldati, gli amministratori, i giudici, e tutti i diritti dei quali le città si spogliavano per deporli nel centro federale. Livio dovendo esprimere le parole di Tucidide II. 15. ξυντελοῦντες ἐς Ἀθήνην scrive che gli Attici ai tempi di Teseo *pagatim habitantes* furono *in unam urbem contributi* (6).

---

(1) Boeckh *Corpus Inscript. Grace.* Tom. I p. 729.
(2) Diodoro Sic. XIV. 17.
(3) Tucidide III. 62.
(4) Diodoro Sic. XV. 79.
(5) Diodoro Sic. XV. 38. 50. 70.
(6) Livio XXXI. 30.

8.° Una città federata potrà avere come compartecipi altre città minori o borgate.

Sappiamo che Acrefia, Scolo e Glisa ubbidivano a Tebe, che Cheronea, Aspledone, Ormone ed Ietto dipendevano da Orcomeno, e che Sife, Leuctra, Ceresso e Tisbe erano signoreggiate da Tespie. Ma i Beoti, per evitare il vocabolo illiberale di suddite o di vassalle e dipendenti, le chiamavano *τύμμοροι* (1) *compartecipi* di quanto la città principale contribuir doveva a Tebe.

Raccogliendo i cenni sparsi negli antichi autori io ho compilato questi pochi, ma principali articoli dello statuto Beoto. Sospendo ogni giudizio per esporre la storia della federazione, donde ci verrà gran lume.

3.° Storia della federazione.

Platea era da gran tempo tribolata dai Tebani, perchè ritrosa alla federazione, quando nell'olimpiade 65 ricorse per aiuto a Cleomene re di Sparta, il quale la consigliò di rivolgersi agli Ateniesi; questi l'accolsero come alleata, e l'accomodarono di pronto soccorso. Stavano i due eserciti per azzuffarsi, quando i Corinzii si interposero ingiungendo ai Tebani di lasciare le città Beote libere di aggregarsi o no alla federazione (2). Tal sentenza degli arbitri Corinzii dimostra, che Tebe costringeva le città alla lega, che le città vi ripugnavano, e che gli Stati esteri mal la soffrivano siccome causa della potenza di Tebe. Platea però si mantenne così indipendente sino all'olimpiade 87, allora sorpresa in piena pace dai Tebani li respinse, ma poco stante cinta d'assedio fu dai Tebani espugnata ed agguagliata al suolo (3).

Scendeva Serse a' danni della Grecia, e Tebe allora governata da pochi oligarchi, quasi tiranni, si aderì al barbaro tirandovi anche le altre città, tranne Tespie ed Aliarto che si mantennero fedeli alla causa de' Greci. Per tal infame condotta i Tebani, divenuti esosi alle città Beote da essi sedotte, scaddero dalla pristina potenza, e desiderando, come scrive Diodoro, *di ricuperare l'egemonia su tutta la Beozia* si volsero a Sparta, promettendole che ristabiliti nell'antico grado travaglierebbero l'Attica con

(1) Tucidide. IV. 93. e gli annotatori a IV. 76
(2) Erodoto. VI. 108.
(3) Tucidide II. 2. III. 68.

tal assidua guerra, che Sparta non dovrebbe più trar fuori esercito alcuno dal Peloponneso (1). I Lacedemoni accettarono l'utile profferta, ed avendo un esercito nei dintorni di Tanagra costrinsero le città Beote a sottomettersi ai Tebani. Ma Atene mal sofferendo che Tebe per tal dominio crescesse a potenza invase e conquistò la Beozia (2), ed introducendo nelle città ordini democratici procacciava di rinforzare la sua parte. Se non che quindi a nove anni gli Ateniesi sconfitti in Coronea dovettero sgombrare la Beozia, che tornò sotto Tebe (3).

Conseguitò dappoi la guerra del Peloponneso, nella quale i Lacedemoni per gratificarsi Tebe (4), se giunsero a sancire l'eccidio dei Plateesi, tanto più facilmente le acconsentivano l'imperio sopra le città Beote. Quindi nacquero quei mali umori, per cui vediamo fuorusciti Beoti, che cospirando per mutar lo stato e voltarlo alla democrazia invitavano gli Ateniesi (5); ma Tebe servivasi appunto di tali congiure per aggravar il giogo. Tespie aveva pur mandato fralle schiere Tebane la miglior parte de' suoi giovani a Delio, e questi vi avevano pur combattuto con tal ardore da cadere quasi tutti morti; ciò non di meno i Tebani, sapendo che Tespie propendeva verso Atene, colsero tal opportunità, e mentre la città era priva de' suoi difensori ne demolirono le fortificazioni (6).

Caduta Atene sotto Lisandro, i Tebani si avvidero che i Lacedemoni tendevano ad appropriarsi l'Attica (7), ed allora temendo anche per sè cominciarono a separarsi da Sparta ed a contrariarla in più occasioni (8). sin tanto che fra i due Stati si ruppe una guerra aperta. E Sparta, che prima proteggeva l'imperio di Tebe, cominciò per subornare Orcomeno staccandola dai Tebani (9); poi quindi a pochi anni propose ai Greci la pace d'Antalcida, che ingiungeva a tutti gli Stati di rilasciar autonome tutte le città o grandi o piccole, che prima tenevano come suddite, ma i Tebani in sulle prime ricusarono di aderire a questa condizione. Agesilao

(1) Diodoro Sic. XI. 81.
(2) Diodoro Sic. XI. 83.
(3) Diodoro Sic. XII. 6.
(4) Tucidide III. 68.
(5) Tucidide IV. 76. 89.
(6) Tucidide IV. 133.
(7) Senofonte *Hellen.* II. 4. 30.
(8) Senofonte ivi III. 5. 5.
(9) Senofonte ivi III. 5. 6.

allora, che odiava i Tebani e mirava da gran tempo a sciogliere la loro federazione, già allestiva un'oste poderosa, quando i Tebani, costretti dalla necessità, acconsentirono a dar l'autonomia alle città Beote (1).

Se non che queste erano lustre e finzioni. Sparta esigendo l'indipendenza delle città Beote intendeva di tirarle a sè e sottometterle; epperò col pretesto di tutelarne l'autonomia stabiliva in ogni città un governo oligarchico composto de' suoi aderenti; poi per proteggerli manteneva qua e là gagliardi presidii, con armosti. Nè a ciò contenta essa, che quaranta anni prima aveva sentenziato a morte i Plateesi e distrutta Platea, richiamò gli sparsi esuli, li ristabilì nella città risorta, e loro ridonò il territorio occupato dai Tebani.

Mentre la Beozia era così travagliata dai Lacedemoni, Leonziade, Polemarco di Tebe e capo della parte Laconica, impaziente di più oltre lottare con Ismenia capo della parte avversa, concerta con Febida un tradimento, ed introduce l'oste Spartana nella Cadmea, cittadella di Tebe. All'udire tal annunzio Sparta si sdegna, ma ritiene per sè la Cadmea frutto del tradimento, mette a morte Ismenia, e per mezzo di Leonziade regna tirannica sulla Beozia.

La tirannide Spartana durava da tre anni, quando Pelopida coi colleghi fuorusciti sorprende Tebe, ammazza Leonziade, e ne caccia i Lacedemoni; ma Orcomeno, Tespie, Tanagra e Platea si mantenevano fedeli alla causa Laconica (2). Per tre anni consecutivi Sparta con poderoso esercito scendeva nella Beozia per riconquistarla, ma Tebe essendosi collegata con Atene vigorosamente resisteva, poi nel quarto anno respirando omai dalle invasioni si volse contro alle città Beote; ottenne le une facilmente, ma osteggiò Platea e la distrusse per la seconda volta, espugnò Tespie e ne cacciò gli abitanti (3), e già stava per punire Orcomeno quando Epaminonda vi si oppose (4). Insomma i Tebani riconquistarono l'intera Beozia (5), e ristorarono la federazione così che i Beotarchi nuovamente ricompaiono nella storia.

Atene allora gelosa della crescente potenza di Tebe fa proposte di

---

(1) Senofonte *Hellen.* V. 1. 33. 36, vedi anche 2. 16.
(2) Senofonte ivi. V. 4. 14. 36. 49. 55.
(3) Senofonte ivi. VI. 4. 5, Diodoro Sic. XV. 46
(4) Diodoro Sic. XV. 57.
(5) Senofonte ivi. V. 4. 63. VI. 1 1.

pace, e questa si ferma a condizione che l'indipendenza delle città sia riconosciuta e rispettata. Sparta giura la pace per sè e per li suoi alleati, la giurano Atene ed i suoi confederati, ma, venuta la volta di Tebe, Epaminonda insiste perchè nel trattato in cambio di Tebani si scriva Beoti, ossia pretende di giurare a nome della Beozia unificata in Tebe. Agesilao sdegnato comanda ad Epaminonda di esplicitamente dichiarare se rilascierà autonome le città Beote, ed il Tebano di rimando lo interroga se egli lascierà indipendenti le città Laconiche. A tal risposta Agesilao cancella dal trattato il nome de' Tebani, e loro dichiara la guerra (1). Venti giorni dopo i Tebani riportano l'insigne vittoria di Leuctra, nè più contenti alla sola Beozia aspirano all'imperio della Grecia, lo ottengono per pochi anni, poi cadono vinti da Filippo, e più tardi espugnati da Alessandro sono nelle vie di Tebe uccisi a centinaia non solamente dai Macedoni, ma ancora dai Plateesi, dai Tespiesi e dagli Orcomenii (2), che così disfogavano l'antico loro odio contro alla metropoli.

Come Tebe fu ristabilita da Cassandro, risorse il Consiglio de' Beotarchi detto da Polibio *ἡ τῶν Βοιωτίων πανήγυρις* (3), ma la Beozia già declinava verso quella vita gaia di conviti e di crapule che la rese insigne (4). Ai tempi di Perseo regnava nella Beozia tal guazzabuglio, che Marcio legato compiendo il voto de' Romani *Boeotorum concilium arte distraxit* (5), ossia, come meglio scrisse Polibio, *disciolse la nazione de' Beoti*, così che, *dopo avere per gran tempo conservato una comune amministrazione centrale* [*κοινὴ συμπολιτεία*], *fu disciolta e disgregata per città* [*διεσκορπίσθη κατὰ πόλεις*].

Così ebbe termine il governo federativo di Tebe.

4.° Deduzioni. Lo statuto inventato da Tebe, non acconsentito dalle città Beote. Scopo di Tebe.

Dalla storia sinquì percorsa risultano evidentissime le verità seguenti.

Tebe ambiziosa mirava a dominare a qualunque costo sulla Beozia, dovesse pur mettere a soqquadro la Grecia. Per coonestare la sua ambizione

(1) Plutarco *Agesilaus* 28.
(2) Arriano *Anab.* I. 8.
(3) Polibio IV. 3. 5, IX. 34. 11.
(4) Polibio XX. 4. 7, e 6. 1.
(5) Livio XLII. 44. 47.

qual diritto adduceva ella mai? Citava forse l'adesione giurata dalle minori città ad uno statuto liberamente acconsentito? Ne allegò mai un solo articolo? Giammai. Nell'anno primo della guerra del Peloponneso avendo sorpresa Platea invitava per un araldo i Plateesi ξυμμαχεῖν κατὰ τὰ πάτρια τῶν πάντων Βοιωτῶν *a collegarsi seco lei secondo le patrie usanze di tutti i Beoti* (1). Poi quando davanti i Lacedemoni perorava la sua causa allegava i diritti di Metropoli, dicendo di aver popolato la Beozia, ed ultima Platea; eppure Platea ricusava di riconoscerla come egemone ἡγεμονέυεσθαι ὑφ' ἡμῶν, ricusava di καταστῆσαι *ordinarsi*, di πολιτέυειν *amministrarsi* κατὰ τὰ πάτρια τῶν πάντων Βοιωτῶν *secondo gli usi patrii di tutti i Beoti*, insomma ricusava di aderirsi ai κοινὰ τῶν πάντων Βοιωτῶν πάτρια *alle comuni consuetudini patrie di tutti i Beoti* (2). Adunque Tebe pretendeva di esercitare i diritti di Metropoli sulle città Beote, che chiamava sue colonie: Egemone voleva non solo capitanarle, ma costringerle ad ordinarsi ed amministrarsi conforme alle consuetudini di tutti i Beoti. Se uno statuto fosse stato scritto, acconsentito e giurato, Tebe lo avrebbe citato, accusando come spergiura Platea; ma sempre allegò τὰ πάτρια, vocabolo elastico, che valeva a comprendere ogni suo libito, cioè tutte le usurpazioni che un egemone insensibilmente introduce per convertire, siccome fece Atene, la sua egemonia in un dominio. Epperò i pochi articoli dello statuto da me raccolti si debbono tenere in conto di consuetudini, che Tebe impose ed invocava poi come leggi obbligatorie d'una federazione.

Ma all'ambizione di Tebe contrastavano le città Beote, ora scuotendone tutte il giogo, come dopo la ritirata di Serse, ora facendo quando le une e quando le altre defezione, e sempre nutrendo mali umori. Che anzi Oropo, la quale geograficamente stava inchiusa nella Beozia, sempre appartenne agli Ateniesi, e tardi solamente cadde per tradimento in potere de'Tebani (3). Eleutere, al dir di Pausania, si aderì ad Atene per odio contro a Tebe, e per propensione politica agli Ateniesi (4). Ma le città le più avverse a Tebe, e che scossero talora il giogo, furono Orcomeno, Tespie, Platea, ed anche Tanagra. Perchè mai queste a preferenza delle altre? Perchè poste sugli estremi confini della Beozia potevano

(1) Tucidide II. 2.
(2) Tucidide III. 61. 65. 66.
(3) Erodoto VI. 100, Tucidide II. 23, IV. 96. 99. VIII. 60
(4) Pausania I. 38. 8.

sperare e talora ottenere aiuto dagli Stati limitrofi per sollevarsi; dovechè le città, che giacevano nel cuore della contrada, nulla potendo sperare dagli stranieri mantennero per lo più una fedeltà forzata.

In tal perpetuo or sospetto ed or conflitto colle minori città Tebe non potendo reggersi da se sola sempre invocò l'aiuto dello straniero. I Corinzii, che per essere un piccolo Stato marittimo mal potevano sperare di dominar la Beozia, diedero invocati un'equa risposta, ordinando che Tebe lasciasse libera facoltà alle città Beote di entrare o no nella federazione. Ma Sparta ed Atene sempre consultarono l'utile loro. Ciascuna acconsentiva a Tebe il dominio sulla Beozia, a patto che tribolasse con guerra la rivale; ma ciascuna eziandio, potendolo, occupava militarmente la metropoli e la contrada, la ordinava e la amministrava come paese conquistato, solita sorte di chi si fa difendere dallo straniero. Per questa altalena di commettere la sua difesa quando a Sparta e quando ad Atene secondo le politiche contingenze avveniva, che ciascuna di queste due città scadendo dal protettorato lasciava sempre in Tebe i suoi aderenti, i quali, siccome esclusi dal governo, macchinavano novità per ricondurre il precedente patrono; così che ai mali umori prodotti dalla federazione si aggiungevano quelli cagionati dagli Stati protettori. Fu una volta che, cresciuti questi, Tebe giudicò di formare, come noi diremmo, un ministero di coalizione, cioè nominò a suoi Beotarchi Leonziade capo di parte Spartana, ed Ismenia capo di parte Ateniese. Ma i capi, almeno per pudore, non abdicano le loro opinioni. Ismenia contrastava a Leonziade, e questi impaziente di lottare invitò Febida capitano di Sparta ad occupare per tradimento la Cadmea. E Sparta? Al primo udir tal annunzio si commuoveva a sdegno, e voleva punir Febida, ma si interpose Agesilao, matricolato uomo di Stato, ed una sola cosa, ci disse, si vuol esaminare, se il fatto sia per noi felice o dannoso; Febida fu assolto, e ritenuta la Cadmea (1). Ma come Tebe poco stante per virtù di Pelopida e di Epaminonda si levò a gran potenza, allora ed Atene e Sparta la osteggiarono a gara, e la costrinsero a lasciar autonome le città Beote, cioè a spogliarsi della sua potenza; perchè gli Stati massimi intanto tollerano la grandezza d'un altro Stato, purchè si renda loro satellite, ma l'opprimono di conserva se minacci di divenire astro maggiore. Venne finalmente il secolo di Roma, e la gran conquistatrice d'interi regni,

(1) Senofonte *Hellen.* V. 2. 25 sg. Plutarco *Agesilaus* 23. sg.

tribolata e stancheggiata dalle minute gare municipali, dai pettegolezzi di meschini pritanei, e dalla fetida adulazione di Beoti, che datisi sistematicamente alla vita gaudente di epuloni frammezzo alle gozzoviglie parlavano ancora d'egemonia e d'unione, sciolse per decreto la federazione, e la Beozia *διεσκορπίσθη κατὰ πόλεις fu disgregata per città* (1).

5.° *Giudizio sullo statuto, e considerazioni sulla federazione.*

Venendo ora allo statuto dico, che esso pienamente si riscontra colla storia e la conferma, siccome quello che evidentemente fu da Tebe imposto ai membri della federazione, i quali spontaneamente non lo avrebbero giammai accettato. Infatti Tebe nominava due Beotarchi, e probabilmente anche un numero doppio di Senatori; e Tebano era sempre il capitano supremo. Questi privilegii già accusano una decisa intenzione di dominio e di preponderanza sulle città sorelle. Ma ciò è poco a fronte delle deliberazioni del foro, le quali erano sempre Tebane. Imperocchè le decisioni dei Beotarchi e dei Senatori dovevano per formar legge sottoporsi all'approvazione del popolo; ma di qual popolo? Certamente del Tebano, giacchè le autorità federali risedendo sempre in Tebe mandavano pure in quel foro a partito le loro proposte in assemblee subitamente convocate, alle quali le città Beote, anche volendolo, non avrebbero potuto inviare i loro popoli, così che chi sanciva o rigettava le proposte de' Magistrati federali era sempre il popolo di Tebe. Per evitare questo inconveniente gravissimo, Arato, autore della lega Achea, aveva, siccome vedremo, stabilito due sole assemblee popolari all'anno, denunciate gran tempo prima in determinati giorni, non prorogabili oltre il giorno terzo, e tenute quando in una e quando in altra città della federazione. Ma quanto alla Beozia nulla di tale leggiamo stabilito, epperò le città della federazione Beota, rappresentate bensì negli alti consigli per compilare proposte, dovevano poi quanto alla sanzione popolare star al libito del popolo Tebano, guidato dai Tebani interessi; vale a dire la città di Tebe godeva dell'esorbitante privilegio di dettare le leggi.

Inoltre l'articolo 8.°, il quale permetteva a Tebe ed alle città maggiori di avere sotto sè come suddite alcune città minori o borgate, dette *σύμμοροι compartecipi*, era quello stesso scandaloso sconcio, che deturpava

(1) Polibio XXVII. 2 10.

la confederazione Svizzera, quando Berna, Basilea ed altre città reggevano quali suddite intere provincie Elvetiche. Che una città pretenda per sè indipendenza, e poi la neghi alla vicina sorella, è una contraddizione. Tal governo, che suol essere più duro del monarcale, autorizza il centro ad esercitare imperio sulle città federate.

Prescindendo da altre osservazioni, che mirò a quelle generali sugli statuti Greci, conchiudo che la federazione Beota fu opera di Tebe, la quale mirando a convertire la sua egemonia militare in un vero dominio politico sulle città Beote, ma non potendo ottenere da esse una vera sudditanza le voleva almeno federate secondo quelle consuetudini da lei insensibilmente introdotte, alle quali dava il nome di *τὰ κοινὰ τῶν πάντων Βοιωτῶν πάτρια*. Quest'opera fu sempre contrastata dalle Beote città, e fu dagli Stati esteri or riconosciuta e protetta, ed or combattuta e disciolta, secondo i loro interessi. Una sola volta Tebe si resse senza protettore (1), e la Beozia parve unificata nell'ambizione di gloria, ma, morti Pelopida ed Epaminonda autori di tanta gloria (2), ricadde nella debolezza primiera coll'aggiunta dell'orgoglio ispiratole dal primato che tenne per pochi anni. Orgogliosa, ma imprudente ed ignava, volle lottare con Alessandro, ma il gran re ne punì la prosunzione; Tebe fu espugnata, ed a metterla a ferro e fuoco concorsero a gara Plateesi, Tespiesi ed Orcomenii, vendicandosi così del giogo federale imposto.

Erano pur sorelle le città Beote per origine, per costumi, per lingua, anzi per dialetto, avevano pure interesse a formare un'unità Beota, e tal vantaggio avrebbe dovuto predominare sui lievi incommodi del riconoscere un egemone, centro federale; insomma, secondo le teoriche degli odierni unificatori delle varie frazioni congeneri d'una stirpe, la Beozia avrebbe dovuto spontaneamente fondersi in un'unità, od almeno unione e federazione, eppure così non avvenne, e non solamente gli annali della Beozia, ma quelli della Grecia intera, contraddicono ai sillogismi dei politici unificatori. La concordia dei fratelli proverbialmente è rara, anzi per ottenerla il solo mezzo è quello di separare i loro interessi. La formazione delle grandi nazioni fu sempre opera delle armi, siccome la disunione delle varie parti d'una nazione sempre avvenne quando allentandosi o cessando la forza

(1) Niuno negherà, scrive Cornelio Nipote nella vita d'Epaminonda, *Thebas et ante Epaminondam natum, et post eius interitum, perpetuo alieno paruisse imperio.*

(2) Polibio VI. 43. 5.

unificante sottentrò quell'istinto di natura, per cui uomini e città prediligono la loro libertà individuale. Tale fu in ogni tempo la Grecia, e tale la nostra Italia. Se non che la Grecia seguendo l'indole delle città e le lezioni della storia sempre riconobbe come un diritto, e nelle paci generali sancì come un obbligo, l'autonomia delle città grandi e piccole. Laddove in Italia la politica degli ideologi predica unità, od unione; ma probabilmente le nostre città non cangeranno natura per gli astratti raziocinii degli ideologi, o per le estetiche aspirazioni dei poeti politici.

PARTE SECONDA

LA FEDERAZIONE ARCADICA

6.° *Origine della federazione, e suo statuto, sotto la protezione de' Tebani.*

Il secondo governo federativo, che incontriamo nella storia Greca, è la così detta lega Arcadica.

Fralle cinque parti del Peloponneso l'Arcadia era una delle più ragguardevoli sì per ampiezza di territorio, e sì per popolazione (1). I varii popoli che la abitavano, come i Menalii, gli Erei, i Cinurii, i Clitorii, i Parrasii vivevano per lo più in separati borghi indipendenti fra loro; e poveri ma robusti andavano, come gli Svizzeri, al soldo degli altri Greci. Il nome dell'Arcadia non sarebbe probabilmente comparso per gran tempo nella storia, se non era della rivalità di Tegea e di Mantinea, che sempre si astiarono per più motivi, e talora si ruppero guerra (2). Queste essendo le due sole città primarie dell'Arcadia, ciascuna pretendeva di aver il primato su tutta la contrada, poi mirava ad assoggettarsi i circostanti borghi (3). All'orgoglio della preeminenza si aggiungeva un motivo locale. La pianura interposta tra le due città era traversata da un'acqua, la quale potendosi voltare pel tenere di Mantinea, o di Tegea, con grave danno

(1) Polibio II. 38.
(2) Tucidide IV. 134.
(3) Tucidide V. 29.

del terreno inondato, somministrava frequenti occasioni di dissidii ed anche di guerra (1). Inoltre Tegea aristocratica teneva per Sparta. Mantinea retta con ordini democratici contrastava a Sparta, e ricorreva per aiuti ad Argo, agli Achei e ad Atene (2). Ultimamente i Lacedemoni avendo espugnato Mantinea obbligarono i cittadini a smantellare la città, a diroccare le case, ed a disciogliersi andando a riabitare i primi quattro loro borghi, poi a ciascun borgo preposero un capo Lacedemone (3). Ma dopo quindici anni essendosi fermata la pace, che ridonava l'indipendenza a tutte le città, i Mantinei si riunirono nuovamente, e mentre riedificavano la loro città andavano divisando di riunire l'intera Arcadia in una confederazione dipendente da un consiglio comune, a fine di rendersi forti contro alla nemica Sparta. Tal era pure in Tegea il divisamento di Callibio e di Prosseno, che coi loro aderenti ne tenevano consiglio, ma erano contrastati da Stasippo e dagli altri di parte Spartana, avversa ad ogni novità. Le due parti vennero alle mani, e Callibio vinto già fuggiva di città, quando avendo incontrato il soccorso che i Mantinei gli inviavano rientrò, sconfisse Stasippo, e lo mise a morte con una parte de' suoi, mentre altri ottocento Tegeati scamparono fuggendo a Sparta.

A tal annunzio i Lacedemoni volendo vendicare i morti, e rimettere i fuorusciti, fecero oste contro ai Mantinei, colpevoli, siccome dicevano, di aver violato i giuramenti portando le armi contro a Tegea. Agesilao però entrò nell'Arcadia, prese alcuni borghi, e saccheggiò il territorio, ma non potè far giornata coi Mantinei, che andavano molto guardinghi dal cimentarsi, aspettando l'arrivo de' Tebani. Questi giunsero, ed allora fu che Epaminonda penetrò nella Laconia sino sotto le mura di Sparta (4).

In questo mezzo la confederazione Arcadica si andava ordinando, tuttavia Orcomeno ricusò di entrarvi, ed Erea si era unita coi Lacedemoni contro a Mantinea (5). Epaminonda, che mirava ad indebolire Sparta, ed a crearle nemici che da vicino la travagliassero di continua guerra, lodò il divisamento degli Arcadi di confederarsi, e ve li infiammava (6), affinchè Sparta fosse per l'una parte assalita dai Messenii da lui ristabiliti,

(1) Tucidide V. 65.
(2) Tucidide V. 29.
(3) Senofonte *Hellen.* V. 2. 7.
(4) Senofonte ivi. VI. 5. 3-22.
(5) Lo stesso VI. 5. 11. 13. 22.
(6) Polibio IV. 32. 10.

e per l'altra dagli Arcadi. Anzi tutto si doveva stabilire la sede del governo, ma l'antica e costante rivalità tra Tegea e Mantinea non permetteva che per tal fine nè l'una nè l'altra città si trascegliesse; imperocchè colla sede del governo va unita la preponderanza politica massimamente in un governo di suffragio popolare universale, poi si aggiungono i motivi di finanza e di lucro. La preferenza dell'una sull'altra città sarebbe stato un perpetuo elemento di discordia, seppur non avrebbe tostamente rotto il disegno della federazione. Come gli Americani crearono la città di Washington, così gli Arcadi stabilirono che una nuova città si innalzerebbe dalle fondamenta. Per tal uopo Tegea, Mantinea, i Clitorii, Menalo ed i Parrasii nominarono ciascuno due deputati, e questo consiglio di dieci avvisar doveva alla fondazione ed alla popolazione della città. Ma dove collocarla? Sui confini della Laconia, affinchè servisse di baluardo contro alle invasioni della gelosa Sparta. Forte per arte dovrebbe esser forte eziandio per popolazione, anche perchè questa votando poi nel foro rappresentasse in qualche modo numericamente la maggioranza e l'opinione pubblica degli Arcadi. Conforme a questi intendimenti sorse dalle fondamenta la nuova città, che ebbe il fastoso nome di Megalopoli; ed affinchè gli Arcadi non fossero nell'opera molestati da Sparta, Epaminonda lasciò loro una legione di mille uomini, che capitanati da Pammene proteggessero gli edificatori. Ma come mai popolarla? Il consiglio dei dieci deliberò che, oltre ai volontarii, quaranta diversi borghi dell'Arcadia abbandonerebbero i loro casolari, e verrebbero a stanziarsi in Megalopoli. Pausania scrive che i borghi con somma alacrità si inurbarono, tranne quattro, dei quali tre furono costretti dalla forza ad ubbidire al decreto, ma nel quarto borgo di Trapezunte quanti sfuggirono all'ira costringitrice degli Arcadi entrarono in mare e migrarono alla volta dell'Eussino (1).

Dovendo il governo essere democratico, il supremo potere risiedeva nell'assemblea popolare di Megalopoli, alla quale tutti gli Arcadi avevano diritto di intervenire. Questa, conforme alla grandiosa appellazione della città, ebbe il titolo fastoso di *οἱ μύριοι i dieci mila*, riceveva le estere ambasciate, deliberava sulla pace, sulla guerra e sulle alleanze, e giudicava le accuse mosse contro ai magistrati (2). La proteggeva un corpo militare, detto degli Epariti, ogni città pagava una stabilita tassa, ed un

(1) Pausania VIII. 27, Diodoro Sic. XV. 72, Clinton *Fasti Hellenici* pag. 425. ed. Krueger.
(2) Senofonte *Hellen.* VII. 1. 38, e 4. 2. 33. sg.

capitano supremo comandava alla milizia. I due magnifici nomi di Megalopoli e di diecimila bastano per indicare l'entusiasmo e la burbanza de' primi fondatori. Siccome poi gli Elei, gli Orcomenii ed i Lepreati avevano ricusato di aderire alla confederazione, però gli Arcadi andarono a saccheggiare i loro territorii (1).

7.° *La federazione vuol fare da sè.*

Nel primo e nel secondo anno, che i Tebani invasero il Peloponneso, gli Arcadi non che gli altri popoli avversi a Sparta si univano spontanei a militare sotto Epaminonda, che ben a ragione ideava ed eseguiva le fazioni come capitano supremo. Quando Licomede, cittadino di Mantinea, illustre per nascita, ricco ed ambizioso così parlò ai diecimila: Noi Arcadi, perchè autoctoni, noi soli possiamo considerare il Peloponneso come patria nostra; noi frai Greci popoli siamo i più numerosi, robusti e valenti nelle armi, infatti i Greci ci prescelgono per loro ausiliarii; senza noi nè i Lacedemoni sarebbero mai entrati nell'Attica, nè i Tebani avrebbero invasa la Laconia. Epperò cessate omai dal seguitare altrui, ma siate vostri. Imperocchè siccome per lo passato accresceste potere ai Lacedemoni seguitandoli, così, se ora continuate a seguitare pecorilmente i Tebani, senza domandare la vostra parte di comando, troverete in essi ben presto altri Lacedemoni (2). Licomede ambizioso di elevarsi ai primi onori della federazione si era dichiarato campione della dignità Arcadica, destando ne' suoi nazionali l'orgoglio dell'egemonia, e la persuasione di bastar da se soli, senza i Tebani, contro alla nemica Sparta. A tal parlata applaudì l'assemblea, e riputandolo essere il *solo uomo capace* di condurre a bene le cose lo nominò capitano, e sulla sua proposta nominò gli altri primarii uffiziali (3). Alcune fazioni felicemente eseguite ne' primi giorni d'entusiasmo contribuirono a persuadere gli Arcadi della loro prestanza e sufficienza; ma quanto più cresceva la loro burbanza, tanto più si alienavano gli animi de' vicini e de' Tebani. Richiesti dagli Elei perchè loro fossero rendute alcune città, state loro tolte da Sparta, gli Arcadi non solo non tennero conto della domanda, ma presero a proteggere quelle stesse città

(1) Senofonte *Hellen.* VI. 5. 11. 13. 22, Diodoro Sic. XV. 62.
(2) Senofonte ivi. VII. 1. 23.
(3) Senofonte ivi. VII. 1. 24, Diodoro Sic. XV. 62. 67.

ribelli, accettandole come aggregate alla federazione. Anche i Tebani, che dapprima avevano caldamente promossa l'unione federativa sperando di averla a sè devota, cominciarono a diffidare in vedendo che Licomede mirava a render l'Arcadia indipendente da Tebe (1). Epperò quando gli Arcadi furono poco dipoi sconfitti da Archidamo in uno scontro, allora per tale sconfitta i Tebani e gli Elei esultarono non meno dei Lacedemoni; cotanto gli Arcadi si rendevano odiosi pel loro orgoglio (2). Questo si parve vieppiù insigne, quando Licomede davanti i deputati della Grecia raccolti in Tebe non solamente si oppose al primato de' Tebani sulla Grecia, ma dispettoso uscì dal congresso (3); nel tornare in patria fu miserabilmente ucciso dai fuorusciti d'Arcadia.

Quanto più la gelosia ed il mal animo della federazione Arcadica contro ai Tebani compariva evidente, tanto più Epaminonda procacciava di acquistarsi nel Peloponneso nuovi alleati, che tenessero in rispetto gli Arcadi mal fidi; epperò entrato nell'Acaia la sottomise alla sua ubbidienza, tanto che gli Arcadi per una parte erano stretti dai Lacedemoni, e per l'altra dagli Achei (4). Gli Arcadi allora omai persuasi, che soli non basterebbero contro a tanti nemici, invece di riconciliarsi con Tebe, ricorsero ad Atene; questa, siccome alleata dei Lacedemoni, si peritava di stringere amicizia con gli Arcadi nemici di Sparta, tuttavia riflettendo che così l'Arcadia si staccherebbe da Tebe acconsentì all'alleanza. Per tal trattato gli Arcadi si confederarono con Atene, senza disdire la loro lega con Tebe, e senza rinunziare all'antica loro rivalità con Sparta. Così le relazioni di guerra e d'amicizia stranamente si complicarono; Atene alleata di Sparta e nemica di Tebe si era stretta d'amicizia con gli Arcadi nemici di Sparta, ed amici, sebbene non cordiali, di Tebe.

In questo mezzo gli Elei non potendo ottenere dagli Arcadi la restituzione di alcune città già loro appartenenti, le quali col pretesto della loro origine Arcadica si erano aggregate alla federazione, ricorsero alle armi, e presero Lasione; gli Arcadi però si mossero anch'essi, e, ripigliata Lasione, corsero l'Elide, si impadronirono di Olimpia, vi stabilirono un presidio, e si appropiarono il tesoro del tempio per pagare la soldatesca. Per questo sacrilegio scoppiò più evidente l'antica rivalità tra Tegea

(1) Senofonte *Hellen.* VII. 1. 26.
(2) Senofonte ivi. VII. 1. 32.
(3) Senofonte ivi VII. 1. 39.
(4) Senofonte VII. 1. 43.

e Mantinea. Imperocchè i magistrati Mantinei decretarono non si toccasse il sacro danaro, ma i magistrati Arcadi citarono quelli di Mantinea davanti i diecimila, accusandoli di rompere l'unione federativa; questi avendo ricusato di comparire furono condannati, e si mandarono soldati per arrestarli. Ma i Mantinei loro chiusero le porte. A tal resistenza i diecimila rinsavirono, e confermarono il divieto di Mantinea. Allora i magistrati Arcadi, che avevano abusato del sacro danaro, e rifuggivano dal renderne conto, temettero per sè e mandarono significando a Tebe, che, se non accorreva in aiuto, gli Arcadi si darebbero ai Lacedemoni. Infatti già i Mantinei stavano per invitare gli Spartani; se non che la parte moderata degli Arcadi si interpose, e nella dieta dei diecimila vinse il partito, si significasse ai Tebani di non muoversi se non chiamati, si restituisse il tempio agli Elei, e si fermasse con essi la pace. Tutte le città Arcadiche giurarono la pace, e lo stesso comandante Tebano, che con trecento opliti Beoti stava di presidio in Tegea, la avvalorò col suo giuramento (1).

8.° *Divisioni intestine.*

Quindi intendiamo che in tre parti si divideva allora l'Arcadica federazione. Tegea, dove Epaminonda partendo dal Peloponneso lasciava un forte presidio Beoto, teneva per Tebe, ed era democratica. Mantinea, patria di Licomede, avversava i Tebani, preferiva Atene, ed era aristocratica. La terza parte si formava di coloro, che Senofonte chiama *οἱ τὰ κράτιστα τῇ Πελοποννήσῳ βουλευόμενοι*, ovvero *οἱ κηδόμενοι τῆς Πελοποννήσου* (2) *solleciti degli interessi del Peloponneso*, ed *ottimi suoi consiglieri*, che non badavano ai soli interessi municipali, ed io chiamai moderati. A queste tre parti si aggiungano gli Epariti, milizia della lega, che parteggiava pel suo maggior soldo e pel bottino. Stata per gran tempo nutrita lautamente a spese del tesoro d'Olimpia, quando udì il divieto di toccare il sacro danaro, la abbandonarono tutti coloro che senza tal mercede militar non potevano; ma in loro vece sottentrarono ricchi cittadini, che spontanei si renderono Epariti per dominare quel corpo, dice Senofonte, e non esser più da esso dominati (3). Così questa milizia, comparabile

(1) Senofonte *Hellen.* VII. 4. 13. sg. Diodoro Sic. XV. 82.
(2) Senofonte ivi. VII. 4. 34, 5. 1.
(3) Ivi. VII. 4. 33. sg.

ai Giannizzeri ed ai Mamalucchi, fu allora purgata e divenne aristocratica.

Mentre in Tegea gli Arcadi festeggiavano la pace conchiusa con gli Elei, il comandante Tebano, così consigliato dai fautori del sacrilegio, chiuse le porte della città, intrapreso in mezzo ai banchetti i principali Arcadi promotori della pace, e li cacciò in prigione; ma gli doleva che fra gli arrestati pochi fossero i Mantinei, che egli avrebbe desiderato di avere sopra tutti nelle mani. All'annunzio di tal sorpresa Mantinea ordinò agli Arcadi pigliassero le armi e guardassero la loro città, poi intimò a Tegea di rilasciare i prigioni. Il Tebano intimorito ubbidì, adducendo per iscusa uno sbaglio avvenuto. Ma Tebe per consiglio di Epaminonda riprovò il suo comandante per avere restituito a libertà i prigionieri, e disse che a buon diritto erano stati intrapresi siccome quelli che, dopo avere implicato Tebe in una guerra, avevano senza il consenso di lei fermata la pace, ultimamente protestò che scenderebbe a vendicar coll'armi l'affronto ricevuto (1).

A tal risposta i Mantinei, gli Arcadi moderati, gli Elei e gli Achei non dubitarono più che Tebe tendesse a dominare il Peloponneso come sua provincia, epperò ricorsero per aiuti a Sparta e ad Atene. Epaminonda infatti scese con oste numerosa nella penisola, facendo assegnamento sugli Argivi, sui Messenii, e sulla parte Tebana degli Arcadi, vale a dire sui Tegeati, sui Megalopolitani, sugli Aseati e sui Palantini. Si vide allora la confederazione Arcadica divisa in due contrarii campi: i Mantinei coi loro aderenti dell'Arcadia stavano arringati coi Lacedemoni e con gli Ateniesi, assistiti eziandio dagli Elei e dagli Achei; laddove i Tegeati con altri Arcadi loro fautori stavano schierati presso ai Beoti, ai Messenii ed agli alleati di Tebe. Si ingaggiò la battaglia presso Mantinea, e la vittoria rimase incerta, ma Epaminonda cadde trafitto, e con esso cadde la forza ed il primato di Tebe (2). Poco stante si giurò la pace che stabiliva lo *statu quo;* ma perchè riconosceva l'indipendenza dei Messenii, Sparta ricusò di aderire al trattato (3).

Dalla fondazione di Megalopoli alla battaglia di Mantinea erano trascorsi soli otto anni, ma in questo breve intervallo nell'animo di molti coloni Megalopolitani era all'antico entusiasmo sottentrato il disinganno. Essi

---

(1) Senofonte *Hellen.* VII. 4 36. sg.
(2) Senofonte ivi. cap. 4 e 5.
(3) Diodoro Sic. XV. 89, Polibio IV. 33.

avevano abbandonato i loro borghi, la vita campestre e l'indipendenza, sperando che la nuova città sarebbe il centro dell'unione Arcadica, ma la discordia talmente regnava nella nazione, che Arcadi contra Arcadi avevano nei campi di Mantinea sparso il sangue fraterno; coll'unione avevano sperato indipendenza dai Lacedemoni, ma li avevano solamente scambiato coi Tebani non meno imperiosi; oltre all'unione ed all'indipendenza avevano pure sperato un aumento di territorio, ma per la pace testè conchiusa dovevano rinunziare alle fatte conquiste. Sparita così l'illusione, molti coloni di Megalopoli andavano sbiettando e facendo ritorno ai loro antichi borghi ed all'indipendenza; invitati a rientrare in città ricusavano, sperando di essere nella loro emigrazione protetti dai Mantinei e da altri Arcadi di parte anti-Tebana. Allora gli altri Megalopolitani ricorsero a Tebe, che loro inviò tremila opliti e trecento cavalli guidati da Pammene (1). Questi datisi a rovinare i già sorgenti borghi ed a spargere dovunque il terrore costrinsero gli emigrati a rientrare in Megalopoli, e così ne conservarono l'integrità, tanto che essendo poco stante assalita dai Lacedemoni potè mediante il soccorso dei Tebani opporre gagliarda resistenza (2).

Nel secolo dei Macedoni i Megalopolitani, al dir di Pausania (3), presero a vezzeggiare il re Filippo venuto ad invadere la Laconia, così che essi ed i Tegeati ottennero da lui un aumento di territorio a danno dei Lacedemoni (4); ma siccome gli Arcadi, secondo che attesta Diodoro (5), ricusarono nel congresso di Corinto di riconoscere il principato di Filippo sulla Grecia, però intendiamo che altra era la politica di Megalopoli e di Tegea poste sui confini della Laconia, ed altra quella degli Arcadi interni e massimamente di Mantinea, ossia intendiamo che la confederazione Arcadica non era più che nominale. Sotto i successori d'Alessandro vediamo l'Arcadia corsa quando da Cassandro, e quando da Alessandro figlio di Polisperconte, poi da Antigono, e da Antipatro (6), epperò

---

(1) Il testo di Diodoro Sic. XV. 94, che ci conservò questo brano di storia, ha οἱ Μεγαλοπολῖται τοὺς Ἀθηναίους παρεκάλουν, ma il Thirlwall vol. V. pag. 43, ed il Grote tom. X. cap. 80. pag. 494 vittoriosamente dimostrarono che invece di Ἀθηναίους bisogna riporre Θηβαίους.

(2) Pausania VIII. 27. 7.

(3) Pausania VIII. 30. 3.

(4) Polibio IX. 28.

(5) Diodoro Sic. XVII. 3.

(6) Diodoro Sic. XVIII. 68. 69. XIX. 61. 74. 87.

secondo la varia fortuna delle armi le diverse città cangiavano padroni, ed era scissa l'unità della contrada. Ultimamente Megalopoli era caduta sotto la tirannia di Aristodemo Figalese, al quale succedette Lisiade, che per consiglio di Arato abdicò il comando, ed unì Megalopoli alla lega Achea (1), mentre altri Arcadi, fra i quali probabilmente i Mantinei, aderivano ai Lacedemoni (2).

9.° *Considerazioni.*

Io ho percorso sinquì la storia della lega Arcadica, raccogliendola da Tucidide, Senofonte, Plutarco, Diodoro, Polibio e Pausania; e sebbene circa allo statuto Arcadico io non abbia potuto ricavare se non quei pochi cenni da me riferiti più sopra, tuttavia basta la storia per fare il seguente giudizio della lega.

Tutte le condizioni richieste dai nostri politici ideologi per assembrare in un'unità, od almeno in un'unione federativa le disgregate frazioni d'una stessa stirpe si trovavano riunite negli Arcadi, medesimezza di origine anzi di tribù, di lingua anzi di dialetto, poi di costumi e d'interessi, eppure l'Arcadia è quella che nuovamente ci insegna essere difficilissima impresa l'unire fratelli in una federazione, massimamente quando questa debba essere stretta per difendersi dagli stranieri, e quando tra fratelli già esistano semi di discordia e di odii, perchè gli odii fraterni sono i più irreconciliabili.

La lega Arcadica fu iniziata da Mantinea, che la impose a Tegea avendovi destata una sommossa, per la quale altri morirono ed ottocento andarono in bando. L'iniziamento fu infelice, perchè l'unione non fu un bisogno che tutta l'Arcadia provasse per raggiungere uno scopo da tutti desiderato, ma fu una rivoluzione eccitata da una fazione poderosa in Mantinea, la quale conspirò con pochi ardimentosi suoi amici in Tegea, e riuscì vincitrice colle armi, col sangue e coll'esilio. Alcune anime generose che aspiravano all'indipendenza, ed altre ambiziose di dominare in un nuovo governo ordirono tal rivolgimento, poco scrupolose circa ai mezzi. Laddove i molti borghi della contrada niun bisogno sentivano d'innovare, giacchè gli uni addetti alla pastorizia vivevano alieni dalle pubbliche faccende, e gli altri militi al soldo degli altri Stati non miravano

(1) Pausania VIII. 27. 8 sg. Plutarco *Aratus* 30

(2) Plutarco *Cleomenes* 3.

se non al lucro, che probabilmente in patria sarebbe stato più scarso, tutti poi sarebbero stati dominati dalle due principali città ritrose ad abbassarsi alla civile uguaglianza con gli umili borghi. Sebbene infelice, fu tuttavia necessario l'iniziamento, perchè le due città rivali non mai si sarebbero accostate parlamentando; la sola forza poteva unirle. Il primo punto a decidersi era quello della metropoli, il consiglio di fondare una città per evitare le gare di Tegea e di Mantinea fu lodevole, ma imprudente ne fu l'esecuzione. Gli Arcadi nel primo entusiasmo vollero una vera Megalopoli, che troppo vasta mal si poteva militarmente difendere (1), e peggio ancora popolare. La coazione, colla quale obbligarono quaranta borghi a trasferirsi a Megalopoli, poi li ritennero e colle armi ne ricondussero gli emigrati, fu un altro mal auguroso cominciamento. Codesti borghigiani, che avrebbero formato la massima parte dei diecimila votanti nel foro, come mai per la sola virtù del trasferito domicilio si sarebbero da pastori trasformati in idonei votanti sulle cose di Stato? Il foro Megalopolitano era dunque un campo, nel quale Tegeati e Mantinei avrebbero fra loro combattuto alla presenza d'una vera milizia gregaria. La divisione ne' consigli sempre regnò, e la discordia fu spinta sino ad impugnar le armi tra fratelli.

Il primo scopo degli Arcadi fu quello di rendersi indipendenti da quel primato politico, che Sparta esercitava sulla contrada; ottennero forse l'indipendenza desiderata? Per sottrarsi dai Lacedemoni si dovettero sottomettere ai Tebani. Cangiarono padroni insino a che Licomede disse: Nè Lacedemoni nè Tebani ci comandino, l'Arcadia faccia da sè. Nulla v'ha di più facile che il dirlo accozzando frasi orgogliose e belligere, nulla v'ha di più facile che il persuaderlo ad una moltitudine lontana dal nemico. Questa poi è la solita via, per la quale un ambizioso demagogo arriva a dominare, ed infatti Licomede fu dichiarato capitano supremo, toglieva e dava a suo arbitrio i primi onori della repubblica, e Mantinea sotto lui teneva il primato. Ma alla prima sconfitta toccata dagli Arcadi temerarii il Peloponneso esultò vedendo la presunzione punita, ed esultò Tebe sperando di ripigliare il suo dominio sopra i presuntuosi. Tornarono forse i Mantinei alla seconda e terza riscossa? Fecero peggio. Perfidiando nell'indipendenza da Tebe si diedero ai Lacedemoni, cangiando nuovamente padroni, e ripigliando gli antichi contro ai quali

(1) Polibio II. 55

si era instituita la federazione. Allora l'Arcadia, che sempre divisa fra sè aveva per lo innanzi battagliato a parole nel foro di Megalopoli, comparve separata in due campi nemici, e Mantinea assistita da' suoi Lacedemoni si azzuffò con Tegea rinforzata da' suoi Tebani; e dopo avere sparso il sangue fraterno l'Arcadia quietò per dipender sempre da altrui o vincitrice, o vinta. L'Arcadia si federò per essere indipendente, ma non era paese federativo, sì perchè tra Mantinea e Tegea regnavano odii fraterni, che sono inestinguibili, e sì perchè i vicini Lacedemoni non le avrebbero mai acconsentita l'indipendenza; l'Arcadia poi era troppo piccola per bastare a sè.

Da ultimo come nella federazione Tebana, così nell'Arcadica, io osservo che le primarie città volevano libertà e indipendenza a casa loro, ma sudditanza ed obbedienza a casa altrui. Tegea possedeva borghi da sè dipendenti, e Mantinea per mantenersi suddita una parte dell'Arcadia aveva una volta fatto lega con Argo, Corinto ed altri contro a Sparta (1). Tegea poi e Mantinea per popolare Megalopoli obbligarono quaranta borghi ad inurbarsi, e colle armi li tennero domiciliati in città. Qual poteva essere mai lo zelo federale di borghi, che nella lega, anzichè guadagnare, perdevano? A Washington si recavano spontanei, epperò pochi, gli abitatori, tanto che ella è tuttavia la città meno popolata di tutta l'Unione. Ben è vero che non fu, come Megalopoli, fondata per essere piazza forte, ma dell'errore d'instituire federazioni per lo scopo di guerra parlerò più sotto nelle osservazioni generali.

PARTE TERZA

LA LEGA ACHEA

10.° L'Acaia e la sua storia.

Il terzo governo federativo, del quale la Grecia ci offre un esempio, è la lega Achea.

Gli Achei vivevano da antico divisi in dodici regioni [μέρη], ogni regione aveva una città, ed ogni città un territorio di sette od otto borghi.

(1) Tucidide V. 29.

Delle dodici città due vennero meno, Elice distrutta da un'inondazione, ed Oleno non si sa per qual motivo, così che sole rimasero le dieci, Pellene, Egira, Ege, Bura, Egio, Ripe, Patre, Farc, Dime e Tritea. Queste erano così piccole, che tutte prese insieme, anche ai tempi di Arato, non aggiungevano alla forza d'una delle insigni città Greche; la contrada poi era ristretta, sterile, e, sebbene confinante col mare, priva di porti (1). Dominati da re della stirpe d'Ercole ne scossero anticamente il giogo, e stabilirono un governo democratico di perfetta uguaglianza fra loro. Ogni città indipendente dalle altre si amministrava da sè (2), senza che alcuna vi fosse che pretendesse ad esercitare un primato sulle altre. Disgregate fra loro si univano all'uopo in una dieta comune, che raccoglievasi ad Egio (3), per provvedere ai generali interessi, ma questi erano pochi, imperocchè la politica degli Achei consisteva tutta nel mantenersi alieni dagli affari altrui, affinchè gli altri non s'ingerissero nelle cose loro. Quando i Persiani scesero nella Grecia, gli Achei non presero parte alcuna con gli altri Greci nè a Maratona, nè a Salamina (4). Quando poi si ruppe la guerra del Peloponneso gli Achei si mantennero per gran tempo neutrali (5). Si vogliono tuttavia eccettuare i Pellenesi, i quali tosto si aderirono a Sparta (6); e siccome nell'anno 14 della guerra li vediamo collegati coi Corinzii (7), dobbiamo dire che Pellene, avvegnachè geograficamente compresa nell'Acaia, tuttavia talora si reggesse separata dalla lega. Ma nell'anno 15, scrive Tucidide, Sparta *diede sesto alle cose d'Acaia, che prima non erano a suo grado* (8); ossia Sparta volendo avere confederati gli Achei cangiò il loro governo in oligarchico. Tuttavia l'opera, che come alleati prestarono a Sparta, fu di sì piccolo momento che gli Achei appena si incontrano citati nella storia di Tucidide (9).

---

(1) Erodoto I. 145, Polibio II. 41 sg., Plutarco *Aratus* 9, Pausania VII. 6. 1, Strabone p. 385 sg. Clinton *Fasti Hellen.* ed. Krüger pag. 427. sg.

(2) Plutarco *Philopoemen* 8.

(3) E più specialmente in Ἀρνάριον, od Αἰνάριον, bosco sacro a Giove nelle vicinanze di Egio, vedi Strabone VIII. p. 385.

(4) Pausania VII. 6. 3.

(5) Tucidide II. 9.

(6) Tucidide ivi.

(7) Tucidide V. 28. Anche ai tempi d'Alessandro i Pellenesi si governavano separatamente dagli Achei, vedi Eschine *in Ctesiphontem* n.° 165.

(8) Tucidide V. 82.

(9) Polibio II. 39 riferisce, che *dopo la battaglia di Leuctra essendo insorta fra i Greci, e massimamente frai Tebani ed i Lacedemoni, una gran confusione, negando gli uni d'esser vinti e gli altri*

A' tempi di Epaminonda durava ancora il governo oligarchico, quando gli armosti Tebani coll'aiuto del popolo cacciarono gli oligarchi, e stabilirono ordini democratici; ma gli sbanditi essendo molti rientrarono a forza nelle loro città, ed avendo rioccupato il comando non più si mantennero neutrali, ma alacremente soccorrevano i Lacedemoni (1). Così secondo la necessità de' tempi variò nelle diverse città il pubblico reggimento, tuttavia sino a' tempi d'Alessandro e di Filippo gli Achei, per attestato di Polibio II. 41. generalmente ritennero a tutto potere la forma popolare. Come poi i successori d'Alessandro vennero a turbare le cose Greche, seminarono tali discordie nell'Acaia, che rompendone l'antica unione la dismembrano *κατὰ πόλεις καὶ κώμας in città e borghi di contrarii consigli fra loro;* parecchie ebbero a ricevere presidii da Demetrio, da Cassandro e da Antigono Gonata, ed altre caddero sotto tiranni protetti e stipendiati dai Macedoni (2).

11.° Origine della lega.

Stavano in questo povero stato le cose dell'Acaia, quando al fine dell'Olimpiade 124 (3) le città di Patre, di Dime, di Tritea e di Fare ristabilirono l'antica unione, alla quale dopo cinque anni aderì Egio, poi Bura che uccise il suo tiranno, e quindi Cerinea. Durava da venticinque anni

---

riputando se stessi vincitori, allora Tebani e Lacedemoni commisero il giudizio delle contese ai soli Achei frai Greci . . . . . siccome a quelli che universalmente godevano di bella fama di fedeltà e di probità. Già gli annotatori di Polibio avvertirono che egli alludeva alla battaglia di Mantinea, della quale i Tebani ed i Lacedemoni si attribuivano egualmente la vittoria, avendo ciascuno elevato un trofeo e conceduto all'avversario una tregua per seppellire i morti (Senofonte *Hellen.* VII. 5. 26); nè mai quelle parole intender si potessero della battaglia di Leuctra, che fu senza il menomo dubbio vinta dai Tebani. Polibio volle solamente indicare che ciò avvenne dopo la battaglia di Leuctra, la quale infatti precedette l'altra di Mantinea. Quali differenze abbiano amendue i popoli sottomesso al giudizio degli Achei nè Polibio lo accenna, nè altri scrittori ne fanno menzione. Che i Lacedemoni orgogliosi pel loro antico primato e non vinti, ed i Tebani altieri pel loro primato recente e persuasi d'essere vincitori, si sieno commessi bassamente all'arbitrato degli umili Achei in qualche importante affare parmi duro a credere, e sospetto che dopo la battaglia di Mantinea essendo insorta qualche leggiera contesa tra i due popoli, i vicini Achei, desiderosi di vedere il loro territorio sgombro dalle nemiche truppe, abbiano consigliato qualche partito conciliativo; donde l'Acheo Polibio abbia tolto occasione di magnificare il poco con tal malizioso cenno che permettesse di supporre il molto a favore della sua prediletta Acaia.

(1) Senofonte *Hellen.* VII. 1. 41. sg.

(2) Polibio II. 41. 44. IV. 1.

(3) Clinton *Fasti Hellenici* stabilisce questa unione al primo anno dell'Olimp. 125. Anche in seguito nel segnare gli anni io mi atterrò alla cronologia del Clinton.

la nuova lega, che aveva a presidenti due Strategi, ed un segretario [γραμματεὺς] (1), quando comparve sulla scena politica Arato di Sicione, figliuolo di Clinia. Egli caldo d'un amor patrio, che pareggiava l'odio contro ai tiranni, concepì l'ardito disegno di liberare il Peloponneso dai molti tirannelli, di cacciarne i Macedoni, e di riunire i varii Stati della penisola, ed altri ancora, sotto un solo nome, ed un solo governo di comune uguaglianza, libertà e concordia (2).

Sinchè nei primi 25 anni la lega stava ristretta a poche città dell'Acaia, pare che le sole antiche consuetudini bastassero per governare la federazione; ma quando Arato volle estendere la lega alle città del Peloponneso ed oltre, allora lo statuto senza dubbio fu scritto, e col tempo qua e là corretto. Base della lega lo statuto merita di essere anzi tutto considerato, ed io lo esporrò per quanto seppi diligentemente raccoglierlo da Plutarco, da Pausania, da Livio e sopratutto da Polibio, che cresciuto sotto tal legge ne' conosceva i particolari, e ne adoperava la nomenclatura propria. Per unire la chiarezza coll'erudizione e colla critica io procaccierò di ristabilire il testo legislativo distinto ne' suoi articoli, ma ad ogni articolo soggiungerò le citazioni opportune, e quelle osservazioni che lo illustrino e ne segnino le correzioni col tempo introdotte.

12.° Statuto della lega.

1.° Qualunque città dentro o fuori del Peloponneso potrà aggregarsi alla lega degli Achei.

Fuori del Peloponneso stava Egina aggregata alla lega (3), e quando gli Achei disegnavano di acquistare l'isola di Zacinto Q. Flaminio ne li dissuase, dicendo che correrebbero gran pericolo se stendessero il capo fuori del Peloponneso, come le testuggini fuori del guscio (4).

2.° Le città aggregate saranno uguali fra loro ed autonome, ma rette con ordini democratici. Ciascuna avrà i suoi magistrati, il suo Senato, e la sua assemblea popolare.

Polibio II. 38 loda il reggimento Acheo principalmente per l'eguaglianza, per la libertà e per la sincera democrazia. Le stesse città

(1) Polibio II. 43.
(2) Polibio II 40. 41. 43 IV. 1, Plutarco *Philopoemen* 8, Strabone VIII. p. 385 sg.
(3) Plutarco *Aratus* 34.
(4) Plutarco *Flaminus* 17.

fondatrici della federazione non si erano riserbato alcun privilegio, ma, come una città si aggregava, tosto le comunicavano l'intera pienezza dei loro diritti; questa uguaglianza contribuì molto a mantenere unita la lega. Secondo Livio XXXVIII. 30 i primi magistrati di ciascuna città si chiamavano Damiurgi, vocabolo generalmente adoperato nel Peloponneso (1). Lo stesso Livio cita il Senato di ogni città, lib. XXXII. 19. L'uniformità del reggimento democratico indusse Filopemene ad abolire le instituzioni di Licurgo a Sparta, e sottoporla ai comandi de' nuovi magistrati (2).

3.° Ubbidiranno ai decreti della lega. Contribuiranno a formare il governo federale, e contribuiranno pure uomini e danari secondo gli ordini ricevuti. La lega si obbliga a difenderle contra chiunque le aggredisse.

Col vocabolo *συντέλεια contribuzione* i Greci denominavano la lega federale di più città, ma con esso intendevano non solo i tributi che pagavano ed i soldati che coscrivevano, ma ancora gli onori ed i diritti ai quali partecipavano. – Dima, Fara e Tritea tribolate dagli Elei avevano domandato soccorso ad Arato, e non avendolo ottenuto decretarono di nulla più contribuire alla lega, del che furono rimproverati da Polibio (3).

4.° I crimini capitali saranno giudicati dal tribunale della lega.

I Romani avevano dichiarato i Lacedemoni immuni da questo articolo, vedi Pausania VII. 9. 3, e 12. 2.

5.° Niuna città potrà contrarre alleanza con estero Stato, o domandarne soccorso, o mandarvi oratori speciali, senza il consentimento della lega.

La città di Megalopoli aveva decretato di domandare soccorso ad Antigono re di Macedonia, ma sottopose il suo decreto municipale all'approvazione della lega (4). Era pure vietato di mandare oratori speciali e diversi da quelli nominati dall'assemblea federale, vedi Pausania VII. 9. 3, e 12. 2, ma i Lacedemoni nelle loro controversie con gli Achei sempre violarono questo articolo, mandando quasi ogni anno oratori a Roma per accusare la lega.

6.° Aggregandosi una città alla lega, vi si alzerà una colonna che attesti l'unione.

---

(1) Muller *Dorians* III. 8. 5.

(2) Plutarco *Philopoemen* 16, Polibio XXIII. 12.

(3) Polibio IV. 60.

(4) Polibio II 48.

Polibio II. 41 narrando che Dime, Patre, Tritea e Fara furono le prime città che rinnovarono l'antica federazione, osserva che di tal unione non esisteva colonna alcuna, che ne facesse testimonianza. Quindi si intende la consuetudine di alzare una colonna, che Polibio infatti riferisce essersi eretta nell'occasione di varie aggregazioni, vedi lib. XXV. 1. 2. 3. 4.

7.° La lega avrà un presidente, detto Stratego. Capitano comanderà l'esercito, ed avrà sotto sè uno o più ὑποστρατηγοὶ Vice-Strategi, ed inoltre un ἵππαρχος comandante della cavalleria. Magistrato politico avrà συνάρχοντες consiglieri nel governo.

Dapprima gli Strategi erano due, ma sin dall'anno 255 av. Cr. furono ridotti ad un solo, e Marco di Cerina fu il primo (1). I Vice-Strategi sono accennati da Polibio IV. 59, V. 94, il quale pure parla dell'Ipparco XXVIII. 6. L'Ipparchia soleva fare scala alla Strategia, epperò l'Ipparco volendo conciliarsi i voti de'suoi cavalieri tollerava i loro vizii e le loro negligenze, così che la cavalleria Achea era meschina (2).

Le lettere del Senato Romano erano indirizzate *allo Stratego ed ai Damiurgi degli Achei* (3), e Livio scrisse *magistratus gentis (Achaeorum) Damiurgos vocant, decem numero* (4). Lo Stratego adunque aveva dieci consiglieri, detti Damiurgi, e distinti dai Damiurgi di ciascuna città. Ma Polibio nomina pure i συνάρχοντες, coi quali lo Stratego deliberava nei casi urgenti ed eseguiva le deliberazioni riserbandosi poi di riferirne alla generale assemblea (5). Cotali adunanze dei consiglieri chiamavansi συναρχίαι τῶν Ἀχαιῶν, e quanto vi si deliberava doveva mantenersi secreto (6); di una di queste tenuta in Argo abbiamo un esempio in Polibio XXVII. 2. Polibio ancora cita αἱ ἀρχαὶ ossia οἱ ἄρχοντες τῶν Ἀχαιῶν (7) come un consiglio intimo dello Stratego, e con esso avendo Cecilio Metello invano conferito appellò all'assemblea federale. Io per me credo che δημιουργοὶ [e doricamente δαμιουργοὶ], συνάρχοντες, ἀρχαὶ ed ἄρχοντες τῶν Ἀχαιῶν fossero gli stessi, vale a dire i dieci consiglieri citati da Livio; ma dobbiamo

(1) Polibio II. 43.
(2) Polibio X. 25.
(3) Polibio XXIV. 5.
(4) Livio XXXII. 22.
(5) Polibio XXIV. 12
(6) Polibio XXXVIII. 5.
(7) Polibio XXIII. 10

diligentemente distinguerli dai magistrati di pari nome di ciascuna città. questi erano Arconti e Damiurgi municipali, e quelli federali.

8.° Lo Stratego sarà nominato dall'assemblea federale, entrerà in uffizio al levarsi delle Pleiadi, e riceverà dal suo predecessore il sigillo pubblico.

Lo Stratego essendo nominato dall'assemblea popolare, ognuno già intende che i brogli avevano luogo, e che il danaro dei candidati talora prevaleva, vedi Polibio IV. 82, XXVIII. 7. Lo Stratego scelto fra tutti i cittadini della lega era ora Dineo, ora Tritense, o d'altre città (1). Il Clinton ne' suoi *Fasti Hellenici* registrò quanti Strategi trovò menzionati dagli antichi.

Polibio IV. 37 scrivendo delle cose avvenute circa l'anno 219 av. Cr. dice che lo Stratego degli Achei *allora* [τότε] entrava in uffizio περὶ τὴν τῆς Πλειάδος ἐπιτολήν *circa al levarsi delle Pleiadi*, ossia nella prima metà di maggio, e ciò riconferma nel libro V. 1. Il Clinton però ne' *Fasti Hellenici* all'anno 146 av. Cr. opina che in più tarda età lo Stratego entrava in carica nell'autunno. Il giorno del sorgere delle Pleiadi era talmente fisso, che Arato avendolo anticipato di cinque dì ne fu accusato (2). Entrando in uffizio lo Stratego riceveva dal suo predecessore il sigillo della lega (3).

Siccome i Senatori, non meno che gli oratori che si mandavano presso gli esteri Stati, dovevano in età oltrepassare i trenta anni, però io già stava per inserire nel testo legislativo questa condizione di età anche per li Strategi; ma me ne astenni, avendo osservato che Arato nell'anno 28.° di sua età era stato nominato Stratego per la seconda volta (4). Probabilmente tal condizione fu introdotta più tardi.

9.° Egli starà in carica un anno solo, nè potrà essere rieletto se non dopo un anno.

Vedi Plutarco *Aratus* 24 e 30. Arato visse 58 anni, e morì mentre era Stratego per la 17.ª volta (5); posto l'anno d'intervallo, si vede che la sua prima Strategia cadde nell'anno suo 26.°, epperò la seconda nel 28.°

(1) Plutarco *Aratus* 11
(2) Polibio IV. 7. sg.
(3) Polibio ivi.
(4) Polibio II 43, e Clinton *Fasti Hellen.* all'anno 243 av. Cr
(5) Plutarco *Aratus* 53.

come disse Polibio II. 43, e si vede ancora che ogni altro anno era assunto al primo posto della lega.

10.° Egli presiederà l'assemblea generale, vi parlerà, ma sulle proposte di guerra si asterrà dal dire la sua opinione. Per mezzo dell'araldo inviterà i cittadini a parlare. Presiedendo all'assemblea avrà una guardia di soldati.

Gli Achei bramando di romper guerra a Nabi tiranno di Sparta avevano consultato T. Quinzio, il quale aveva risposto aspettassero l'arrivo della flotta Romana. Avuto così il consentimento del legato di Roma, posero la guerra a partito nell'assemblea generale. I pareri variavano, gli uni volendo che tosto si intimasse, e gli altri consigliando di aspettare la flotta. *Multitudo*, scrive Livio, *Philopoemenis sententiam expectabat, praetor is tum erat . . . . . Is praefatus: bene comparatum apud Achaeos esse, ne praetor, quum de bello consuluisset, ipse sententiam diceret, statuere quam primum ipsos quid vellent iussit. Praetorem decreta eorum cum fide et cura exsequuturum, adnisurumque ut, quantum in consilio humano positum esset, nec pacis eos poeniteret nec belli.* E Livio soggiunge: *Plus ea oratio momenti ad incitandos ad bellum habuit, quam si aperte suadendo cupiditatem res gerendi ostendisset* (1). Le democrazie sogliono essere dominate dalla gelosia, epperò, come non prolungano oltre l'anno le primarie cariche, così nell'Acaia era vietato allo Stratego di parlare sulla guerra, poichè si temeva che la *cupiditas res gerendi* inducesse il presidente a promuovere guerre imprudenti.

Nell'anno 198 av. Cr. un'assemblea federale era stata convocata, affinchè deliberasse se la lega dovesse continuare nella alleanza Macedone, oppure voltarsi alla Romana. Nel primo giorno parlarono gli oratori Romani, poi quelli Macedoni, ed ultimi gli Ateniesi; e l'adunanza fu sciolta col tramontar del sole. *Postero die*, scrive Livio, *advocatur concilium, ubi quum per praeconem, sicut Graecis mos est, suadendi, si quis vellet, potestas a magistratibus facta esset, nec quisquam prodiret . . . . . tandem Aristaenus praetor Achaeorum, ne tacitum concilium dimitteret* (2), prese egli la parola per rimproverare agli Achei il loro silenzio: ma il rimprovero nulla giovando, egli fu costretto a dire il

(1) Livio XXXV. 25.
(2) Livio XXXII. 20 sg.

primo la sua opinione. Quindi intendiamo qual ordine si seguisse nelle generali assemblee.

Della guardia dello Stratego parla Polibio XXXVIII. 5.

11.° Morendo lo Stratego nell'anno del suo uffizio, il predecessore ne farà le veci insino a che un altro sia legalmente nominato.

Vedi Polibio XL. 2.

12.° La lega sarà rappresentata da una assemblea di tutti i cittadini della federazione.

L'assemblea è chiamata da Polibio ἐκκλησία XXI. 7, XXXIII. 10, σύνοδος XXIII. 7, XXIX. 8, ἀγορὰ XXVIII. 7, XXIX. 9; è composta da οἱ πολλοὶ τῶν Ἀχαιῶν XXI. 7; anche gli operai e la gente vile vi intervenivano, donde poi la facilità dei tumulti XXXVIII. 4. Livio XXXII. 20. sg. la chiama *concio tanta ex tot populis congregata.*

13.° L'assemblea sarà convocata nella città di Egio.

Pausania parlando dell'instituzione della lega Achea dice: *gli Achei decretarono che l'assemblea si adunasse in Egio, perchè questa città, dopo che Elice fu distrutta dalle inondazioni, avanzava da antico per dignità le altre città dell'Acaia, ed allora era potente* (1). Con Pausania concorda Livio, che citerò più sotto. Concorda pure Strabone, il quale descrivendo la città di Egio dice che le sta vicino un bosco sacro a Giove, denominato Αἰνάριον, dove si tenevano le comuni assemblee degli Achei (2); ma egli poco sopra p. 385 aveva chiamato Ἀρνάριον questo stesso luogo, il quale, secondo Polibio, parrebbe che fosse detto Ὁμάριον (3). Checchè sia di tal nome, noi infatti troviamo in Egio adunate le più antiche assemblee, delle quali parla Polibio II. 54, IV. 7. 26, anzi V. 1. la chiama convocata in Egio κατὰ τοὺς νόμους *secondo le leggi.* Ma col tempo a questo articolo fu fatta l'aggiunta seguente:

Potrà tuttavia essere convocata in altra città, designata dallo Stratego e da' suoi consiglieri.

In fatti la troviamo in più tardi tempi convocata in Megalopoli XXIII. 7. XXIV. 12, in Clitore XXIII. 5, in Sicione XXV. 1. XXVIII. 11, in Corinto XXIX. 8, XXXIII. 15, XXXVIII. 4, in Tegea *Pausania* VII. 14. 3, in Argo *Livio* XXXI. 25.

---

(1) Pausania VII. 7. 1.

(2) Strabone VIII. p. 387.

(3) Polibio II. 39. V. 93, e le note ivi.

Sin tanto che la lega rimase ristretta entro i limiti dell'Acaia o poco oltre, Egio potè essere la città privilegiata del convegno; ma quando alla lega si aggregarono la Sicionia, Argo, Corinto e l'intera Arcadia, allora la eguaglianza proclamata da Arato esigeva che alle nuove ragguardevoli città si accomunasse l'onore di Egio. Tal fu il primo ragionevole motivo per mutar l'articolo dello statuto, ma guari non andò che la solita malizia ebbe gran parte nello scegliere la città dell'adunanza. Io ne riferirò un esempio citando una narrazione di Polibio, nella quale inserirò gli opportuni commenti.

Apelle, uno dei cortigiani del re Filippo, ed avversario politico dei due Arati, si brigava perchè nella prossima assemblea comiziale fosse esclusa dalla Strategia la parte di Arato, ed eletto altri della parte contraria. L'assemblea convocar si doveva in Egio sul finir dell'autunno, e ad essa, come è facile di presumere, si recava in maggior numero il popolo delle vicine città, anzi che quello delle lontane; epperò Apelle si diede a conciliarsi le città circonvicine con ogni modo di lusinghe, e calunniando i due Arati, così che riuscì ad escludere Timosseno candidato degli Arati, ed a far nominare Stratego Eperato loro avversario (IV. 82). Lungo l'inverno il re Filippo ebbe agio di conoscere l'imbecillità di Eperato generalmente sprezzato, e la convenienza di mantenersi amici i due Arati. Già si accostava il mese di maggio, nel quale Eperato sarebbe entrato in carica, e Filippo prossimo ad entrar in campagna abbisognava per le sue truppe di viveri, di danaro e d'altro che domandar doveva all'assemblea per mezzo dello Stratego universalmente inviso. L'adunanza doveva *κατὰ τοὺς νόμους secondo le leggi* convenire nuovamente in Egio, cioè nella città che si era poc'anzi dichiarata sfavorevole agli Arati, eppur Filippo abbisognava del credito di questi per ottenere soccorsi più abbondanti. Che fa egli? Indusse i magistrati a *μεταγαγεῖν τὴν ἐκκλησίαν εἰς Σικυῶνα trasferire l'assemblea in Sicione;* poi, chiamati a sè il vecchio ed il giovane Arato, si purgò del passato gettandone la colpa su Apelle, e li pregò a continuargli l'antica loro benevolenza. Sicuro di questa si presenta all'assemblea in Sicione, e coll'aiuto degli Arati ottiene ogni suo intendimento. Così Polibio V. 1.

Perchè mai Filippo volle da Egio trasferita l'assemblea in Sicione? Perchè doveva far fondamento sugli Arati, e ad essi Egio si era testè mostrata sfavorevole, laddove gli Arati in Sicione loro patria, liberata per opera del vecchio Arato dai tiranni, avevano gran seguito e tale

dependenza da ripromettersi certi i voti dell'intera Sicionia, la quale in quel foro avrebbe formato la gran maggioranza numerica. Imperocchè sebbene Livio XXXII. 20 con pomposa frase esalti le assemblee dell'Acaia, dicendole *ex tot populis congregatae*, io sono persuaso che dei popoli lontani dal convegno vi si recavano poco più degli Arconti e de' principali di singole le città; cioè io credo che gli antichi rassomigliassero ai moderni, perchè fu e sarà sempre vero quel detto d'Aristotele nella sua *Politica* VI. 2. 11 che gli uomini, anzichè dei politici diritti, sono più studiosi dei loro agii, del benessere, e del lucro. Così la scelta della città del congresso divenne per lo Stratego un malizioso mezzo per assicurarsi i voti della futura assemblea.

Non posso dissimulare come a me contrario il seguente passo di Livio: *Aegium a principio Achaici concilii semper conventus gentis indicti sunt, seu dignitati urbis id, seu loci opportunitati datum est. Hunc morem Philopoemen eo primum anno* [l'anno 189 av. Cr.] *labefactare conatus legem parabat ferre, ut in omnibus civitatibus, quae Achaici concilii essent, in vicem conventus agerentur: et sub adventum consulis, Damiurgis ... Aegium evocantibus, Philopoemen* [*praetor tum erat*] *Argos conventum edixit. Quo quum appareret omnes fere conventuros, consul quoque, quamquam Aegiensium favebat causae, Argos venit. Ubi quum disceptatio fuisset, et rem inclinatam cerneret, incepto destitit* (1). Adunque Filopemene, al dire di Livio, sarebbe quegli, che il primo propose nell'anno 189 av. Cr. la legge che permetteva di convocare l'assemblea altrove che in Egio; ma Polibio cita parecchie assemblee anteriori a tal anno, che si tennero in Sicione, in Megalopoli ed altrove. Che più? Livio si scordò ch'egli stesso nel libro XXXV. 25, all'anno 192 av. Cr., parlò d'un'assemblea convocata in Sicione. Adunque la legge che permetteva la traslazione esisteva già prima di questo fatto, il quale si dee ridurre ne' seguenti termini. I Damiurgi delle città già avevano fatto avvertito il popolo di recarsi ad Egio, ma Filopemene, stimando questa città favorevole al console, trasferì incontanente l'assemblea in Argo, dove infatti il console non vinse il partito. Così abbiamo un secondo esempio d'una maliziosa traslazione.

14.° L'assemblea delibererà intorno alle alleanze [Polibio XXI. 7], alle guerre ed alle leve di soldati [IV. 7. 15],

(1) Livio XXXVIII. 30.

alle domande di soccorso chieste da altri Stati [XXIX. 8], all'aggregazione di nuove città alla lega [XXV. 2] ed a quanto verrà da esteri Stati proposto con lettere scritte dalle competenti autorità.

Cecilio legato Romano instava presso i magistrati federali, affinchè rimediassero ai mali recati ai Lacedemoni, ma non facendo alcun frutto domandò che si adunasse l'assemblea, e la sua rimostranza vi fosse posta in deliberazione. Allora, scrive Polibio XXIII. 10, *i magistrati lo richiesero di mostrare gli ordini scritti che ne avesse ricevuto dal Senato; e, come egli non li presentava, ricusarono di convocar il popolo, dicendo che le leggi vietavano di convocare l'assemblea se il legato non produceva lettere precise del Senato.* Cecilio sdegnato partì, e ne riferì al Senato, davanti il quale gli oratori Achei si scusarono *allegando la legge Achea, la quale vietava di assembrare la lega, tranne che deliberare si dovesse o di alleanza, o di guerra, oppure se altri recasse lettere scritte dal Senato ..... Ma Cecilio nè aveva codeste lettere, nè egli stesso volle dare per iscritto ordini ai magistrati* (1). Livio XXXIX. 33 così tradusse le parole di Polibio: *Achaei concilii negati crimen excusabant, recitando legem, quae, nisi belli pacisve causa et quum legati ab senatu cum literis aut scriptis mandatis venirent, vetaret indici concilium* (2). Con questa legge gli Achei eludevano le personali domande dei legati Romani talora capricciose, ma talora anche giuste. Se non che, prosegue Livio a dire: *Ea ne posteu excusatio esset, ostendit senatus, curae iis esse debere ut romanis legatis semper adeundi concilium gentis potestas fieret; quemadmodum et illis, quoties vellent, senatus daretur.*

15.° Nominerà lo Stratego [Polibio IV. 82. ecc.] e gli oratori che si recheranno presso gli esteri Stati [XXV. 1. 2.]. Gli oratori dovranno essere maggiori d'anni trenta.

All'età degli oratori fu derogato in favore di Polibio XXV. 7. L'assemblea probabilmente nominava pure l'Ipparco ed i dieci Damiurgi, ma l'autorità degli scrittori mi manca per affermarlo con certezza.

16.° Nell'assemblea non si potranno discutere altri affari oltre quelli per cui fu convocata; nè questa potrà protrarsi oltre al terzo giorno.

---

(1) Polibio XXIII. 12.

(2) Vedi anche Pausania VII. 9. 1

Gli Achei dovendo deliberare se abbandonerebbero l'alleanza dei Macedoni per accostarsi a quella dei Romani consumarono due giorni in caldi dibattiti; trascorsi questi, *supererat unus insti concilii dies, tertio enim lex iubebat decretum fieri* (1). Legge savissima! L'assemblea federale si componeva dei magistrati di tutte le città e dei loro abitanti giunti all'età di venti anni, i quali per intervenirvi dovevano intraprendere anche lunghi viaggi, e soggiornare nella città del convegno per quanto durava la sessione federale. Dacchè i popoli si dovevano così disagiare, la discretezza voleva che si provvedesse acciò che il disagio non fosse lungo; epperò si stabilì che la sessione si chiudesse al finire del terzo giorno. Affinchè poi in tre giorni si riferissero e si discutessero gli affari, il solo Stratego proporre li poteva, ed era agli altri vietata l'iniziativa; infatti lo Stratego Cicliade si oppose al re Filippo dicendo *non licere legibus Achaeorum de aliis rebus referre, quam propter quas convocati essent* (2). Inoltre io non dubito che per ovviare alla parlantina degli oratori fosse loro, come in Atene, limitato il tempo per mezzo della clepsidra.

17.° L'assemblea si radunerà due volte l'anno. La prima poco dopo il levarsi delle Pleiadi, la seconda sul finir dell'autunno.

Polibio XXIV. 12 parla della δευτέρα σύνοδος, che tener si doveva nello stesso anno; erano adunque due le tornate ordinarie; epperò Dione Cassio, o per meglio dire il suo compendiatore [Excerp. l. XXXIV. tom. I. p. 70. ed. Reim.] meritamente chiama semestrali le assemblee degli Achei.

Per indagarne i tempi stabiliti consultiamo i fatti dell'anno 221 av. Cr. minutamente narrati da Polibio nel libro IV. Arato, nuovo Stratego, anticipando di cinque giorni il tempo legale [IV. 7. 14] aveva assunto la Strategia nella prima metà di maggio, e tosto andato contro gli Etoli era stato sconfitto a Cafie. Quindi a pochi dì, dunque nella seconda metà di maggio, cadde la σύνοδος καθήκουσα *l'assemblea legale*, detta pure ἐκ τῶν νόμων *secondo la prescrizione delle leggi* [IV. 7], nella quale gli Achei domandarono soccorso a Filippo [IV. 14]. Gli oratori partirono per la Macedonia, Filippo acconsentì, allestì l'esercito, ma *troppo tardi* giunse a Corinto, donde spedì messaggieri ad invitare gli alleati a congresso. Frattanto egli avviatosi per la Laconia compose le differenze di Sparta,

(1) Livio XXXII. 22
(2) Livio XXXI. 25.

donde tornato a Corinto conferì con gli alleati là raccolti; nè guari andò che si recò in Egio εἰς τὴν καθήκουσαν σύνοδον *all'assemblea legale* [IV. 26], e quindi partì coll'esercito per la Macedonia, dove passò l'inverno [IV. 27. 29]. Dunque la seconda assemblea cadde sul finir dell'autunno. Più tardi Arato terminò il suo anno di Stratego, e, senza che si convocasse altra adunanza, ebbe per successore il suo figlio omonimo [IV. 37]: epperò il figlio era stato nominato nella seconda assemblea, che dicevasi delle ἀρχαιρεσίαι *dei comizii magistrali* [IV. 82]. Così l'assemblea raccolta in Egio, dopo la quale Antigono si ridusse in Sicione a' quartieri d'inverno [II. 54] fu la seconda. La seconda pur fu quella, nella quale si decretò la guerra contro ai Lacedemoni, ma *ne extemplo gereretur hiems impediit* (1).

Nella prima assemblea il nuovo Stratego entrava in uffizio, e così si debbono intendere quelle parole di Polibio V. 30 οἱ Ἀχαιοὶ τῆς θερείας ἐναρχομένης στρατηγὸν αὐτῶν Ἄρατον κατέστησαν *gli Achei al cominciar della state costituirono* [oppure insediarono, e non già nominarono] *Arato loro Stratego*. Entrato in carica e stando per aprir la campagna domandava alla lega quanto gli occorreva per la guerra [IV. 15]. Nella seconda assemblea si nominavano lo Stratego e gli uffiziali per l'anno prossimo, gli attuali rendevano conto delle loro operazioni, e si provvedeva a quei negoziati di pace o di leghe che solevano trattarsi nell'inverno.

18.° Oltre alle due assemblee ordinarie potrà la nazione essere straordinariamente convocata per urgenti deliberazioni.

Quinzio comandò allo Stratego *concilium Achaeorum extemplo sibi praebere*. [Livio XXXVI. 31].

19.° Ogni città della lega nominerà quel numero di deputati, maggiori degli anni trenta, che verrà stabilito nell'atto di aggregazione. I deputati di tutte le città formeranno il Senato.

Esso eserciterà il potere giudiziario, preparerà collo Stratego le cose da porsi in deliberazione nelle assemblee del foro, interverrà a queste, ed a quelle altre particolari, alle quali sarà invitato dallo Stratego.

Nel Senato, detto βουλή, e nel popolo stavano i due supremi poteri degli Stati Greci. Nell'Acaia, come altrove, il Senato era anche denominato γερουσία [Polibio XXXVIII. 5] per l'età richiesta ne' suoi membri, che

(1) Livio XXXVIII. 32.

era, siccome vedremo, d'anni trenta. Interveniva alle assemblee popolari [Polibio II. 46], dove all'uopo richiamava all'ordine gli oratori che trasmodassero [XXXVIII. 5]. In Egio lo vediamo assistere ad una conferenza coi legati Romani [XXVIII. 3].

Che il numero de' Senatori fosse ragguardevole lo intendiamo da quanto narra Polibio XXIII. 7. sg. del re Eumene. Questi aveva per mezzo dei suoi oratori offerto 120 talenti agli Achei, *affinchè l'annuo interesse di tal somma servisse di mercede al Senato degli Achei pel suo intervento alle comuni adunanze.* Posto che il talento Pergameno fosse di nostre lire 5000, e posto l'interesse al 10 per cento, l'annuo frutto di lire 60 mila basta per indicarci che i membri del Senato erano molti. Inoltre la proposta di un'annua ricompensa indica eziandio che il disagio de' Senatori nel corso dell'anno tornava frequente e lungo. Nè la cosa poteva essere altrimenti. Imperocchè quanto più le assemblee del popolo, primo potere dello Stato, erano rare e due sole all'anno, tanto maggior mole di affari doveva ricadere sul Senato, secondo potere della lega. Inoltre al suffragio universale suole sempre corrispondere un numeroso corpo conservatore.

Come nell'Attica divisa in tribù il numero de' Senatori era relativo a quello delle tribù, così nell'Acaia corrispondeva a quello delle città confederate. Queste dovevano essere rappresentate sì nella condotta degli affari, e sì nelle loro domande. Siccome poi nelle adunanze generali era vietata a tutti l'iniziativa d'un affare, però i Senatori convenivano collo Stratego per formare, come noi diciamo, l'ordine dei lavori. In Atene a' tempi della moderata democrazia, ed a Sparta in tutti i tempi, nulla si proponeva nel foro, che non fosse stato prima discusso nel Senato; lo stesso dir si dee della lega Achea.

20.° Per deliberare sugli affari di massimo momento si aggiungeranno al Senato ordinario tutti i cittadini maggiori degli anni trenta, convocati dallo Stratego straordinariamente. L'adunanza straordinaria, detta *σύγκλητος*, non si potrà protrarre oltre ai due giorni.

Polibio XXIX. 8 e 9 narra che il re Tolommeo nell'anno 168 av. Cr. mandò per oratori chiedendo soccorso agli Achei. La domanda essendo discussa nell'assemblea popolare raccolta in Corinto, Licorta e Polibio parlarono in favore con tali argomenti che la maggioranza evidentemente propendeva nel loro parere. Quando Callicrate, disperando di vincere con ragioni gli avversarii, rimostrò che *secondo le leggi l'assemblea del foro*

era incompetente a deliberare in quel caso speciale di soccorso; così fu sciolta l'adunanza. Quindi a poco *essendo riunita in Sicione la* σύγκλητος, *alla quale intervenne non solo il Senato* [βουλὴ], *ma ancora tutti che oltrepassassero i trenta anni*, fu riproposta la domanda, e Polibio, avendo nuovamente parlato in favore, traeva dalla sua l'uditorio; ma per quel dì non si venne a votazione. *Nel secondo giorno* i propugnatori delle due opinioni dovevano *a norma delle leggi presentare lo schema dei loro decreti* per mandarli a partito. Licorta propose il suo e perorò con tal efficacia, che Callicrate disperando di far prevalere la sua proposta ricorse all'astuzia. Egli introdusse εἰς τὸ θέατρον *nel teatro* un messaggere, latore di lettere di Q. Marcio, nelle quali a nome della repubblica Romana invitava l'adunanza ad approvare il decreto di Callicrate. Polibio allora ed il suo padre Licorta si tacquero.

Quindi ricaviamo che nell'Acaia era una σύγκλητος diversa dalla σύνοδος. Quella era giudice competente per certi affari, e questa no; oppure, come meglio congietturo, l'assemblea popolare non poteva deliberare sul soccorso domandato da Tolommeo, se prima non era approvato dalla σύγκλητος. Questa si componeva del Senato [βουλὴ] e dei cittadini maggiori d'anni trenta, e la σύνοδος dei cittadini dell'intera lega maggiori d'anni venti. La Sincleto si adunava nel teatro, sito più ristretto; l'assemblea nel foro ampiissimo. La prima doveva chiudersi al fine del secondo giorno, la seconda al terminare del terzo.

Maggiori particolari non posso aggiungere, essendo questo il solo luogo di Polibio che parli della Sincleto; ma nuova luce io spero di arrecare illustrando adunanze e magistrati dello stesso nome od affine presso altri Stati.

In Atene le ordinarie assemblee popolari [ἐκκλησίαι], essendo determinate dalla legge in giorni prestabiliti di ciascun mese, non abbisognavano d'avviso preventivo per convocarle; ma, se per qualche urgente bisogno occorreva di chiamar il popolo a parlamento straordinario, allora la convocazione doveva essere annunziata per avviso, e quell'assemblea straordinaria chiamavasi σύγκλητος *intimata*, *denunziata* (1).

Ma Aristotele *Polit.* III. 1. 7 riferisce che vi sono Stati, *i quali non riconoscono il popolo, non hanno assemblea popolare* [ἐκκλησία], *ma*

(1) Scoliaste d'Aristofane *Acharn.* 19, Polluce VIII. 95, Ammonio p. 40 e le *Animadv.* del Valckenaer p. 70, Schömann *de Comitiis Athen.* cap. 1.

hanno συγκλήτους, e giudicano determinate cause come . . . . . in Cartagine. Qui i Sincleti sono magistrati investiti del diritto di giudicare, e distinti affatto dal popolo che era nullo. Si chiamavano *σύγκλητοι*, come a Sparta si denominavano *ἔκκλητοι* quanti avevano diritto di votare nella *ἐκκλησία* (1).

Aristotele nel luogo testè citato parla dei Sincleti di Cartagine, ed appunto Polibio X. 18 riferisce che fra i Cartaginesi stati fatti prigionieri nell'espugnazione di Cartagine Nuova nella Spagna stavano due *τῶν ἐκ τῆς γερουσίας due Senatori*, e quindici *τῶν ἐκ τῆς συγκλήτου*, quindici Sincleti Cartaginesi. Inoltre lo stesso Polibio XXXV. 2 narra che il Senato Romano ordinò ai Cartaginesi mandassero come ostaggi a Lilibeo trecento figliuoli *τῶν ἐκ τῆς συγκλήτου καὶ τῆς γερουσίας dei membri della Sincleto e del Senato*. Adunque in Cartagine era un magistrato detto *σύγκλητος*, distinto dal popolo e dal Senato, ma che col Senato doveva avere qualche attinenza.

Anche fra gli Acarnani troviamo una Sincleto, distinta dall'assemblea popolare, della quale parla Polibio XXVIII. 5; e vedi ivi la nota dello Schweighauser.

Presso gli Efesii il re Lisimaco aveva stabilito *ἐπίκλητοι*, dei quali così parla Strabone: *ἦν γερουσία καταγραφομένη, τούτοις δὲ συνήεσαν οἱ ἐπίκλητοι καλούμενοι, καὶ διῴκουν πάντα stava coscritto un Senato, e coi Senatori convenivano i così detti Epicleti, ed amministravano ogni cosa* (2). In Efeso adunque gli Epicleti, secondo l'etimologia del nome, non erano Senatori coscritti, ma *aggiunti* al Senato, col quale convenivano.

Finalmente tutti sanno che il Senato Romano si denominava dai Greci non solamente *βουλή*, ma ancora *σύγκλητος*.

Dalle cose esposte si vede che *σύγκλητος* in Atene si appellava l'adunanza popolare straordinaria, ossia aggiunta alle ordinarie stabilite dalla legge, e che altri popoli applicarono tal vocabolo non più al popolo, ma al Senato, chiamando *σύγκλητοι* i consiglieri straordinariamente aggiunti al Senato. Siccome poi l'adunanza *σύγκλητος*, composta dei *βουλευταὶ* Senatori ordinarii e dei *σύγκλητοι* consiglieri aggiunti rappresentava il pien Senato, però dai Greci *σύγκλητος* fu appellato il numeroso Senato Romano. Senza questa genealogia dei Sincleti non si può intendere come i padri coscritti di Roma siano stati chiamati collo stesso nome, col quale Atene denominava le sue assemblee del foro straordinarie.

---

1) Schömann *de Ecclesiis Lacedem.* nei suoi *Opuscula Academica* tom. I. p. 88. sg.

2) Strabone XIV 1. 21.

Così l'esempio di altre Greche contrade conferma l'Achea instituzione, che dava per aggiunti al Senato i cittadini maggiori d'anni trenta. Tale aggiunta si riscontrava col carattere sommamente democratico di quel governo, ed in parte era altresì necessaria. Imperocchè due sole erano nell'anno le assemblee popolari, e rare esser dovevano quelle straordinarie che avrebbero disagiato l'intera lega estesa al Peloponneso; per altra parte il Senato dovunque ha voce di corpo aristocratico, e lo statuto Acheo voleva democrazia. Epperò affinchè le adunanze del Senato togliessero un aspetto popolare gli furono aggiunti come consiglieri straordinarii i cittadini, che maggiori d'anni trenta fossero eligibili per tal corpo. Il Senato ristretto ai membri ordinarii dicevasi βουλή, i membri aggiunti straordinariamente convocati si appellavano σύγκλητοι, e σύγκλητος si chiamava l'adunanza di pien Senato.

Questi sono i frammenti dello statuto della lega Achea, che io potei riunire in leggendo gli antichi scrittori, e primo di tutti Polibio, il quale cittadino Acheo, oratore e capo di parte col padre Licorta conosceva pienamente le leggi di quel governo, e la giusta nomenclatura de' varii magistrati e delle diverse instituzioni.

13.° Giudizio sullo statuto.

Polibio loda la lega Achea per aver introdotto una piena uguaglianza ed una sincera libertà (1); le due lodi sono giustissime. Nella Beozia i privilegii ed il primato di Tebe tennero sempre la federazione disunita ed inferma, nell'Arcadia la rivalità tra Tegea e Mantinea cagionò torbidi: laddove nell'Acaia regnava una perfetta uguaglianza tra le città. Le fondatrici niun privilegio si riserbarono, e col tempo il convegno delle popolari assemblee fu senza difficoltà da Egio accomunato a tutte le città: parimente la carica di Stratego trapassava alle varie città, ed anche a Sparta, secondo i liberi voti. Quindi non v'ha esempio di gelosie interne, di dissidii, e molto meno di guerre civili; la sola Sparta si mantenne sempre, non che aliena, nemica della lega, esempio che la Messenia talora imitò. Quanto alla libertà niun governo poteva essere più democratico di quello, che ammetteva il suffragio universale non solo nel foro, ma ancora nel Senato, che chiamava tutti i cittadini indistintamente agli uffizii ed al primo posto dello Stato, e che ogni anno rinnovava le elezioni.

(1) Polibio II. 38.

14.° Storia della lega.

(*a*) La lega fa da sè.

Dalla lega sinquì teoricamente esposta nel suo statuto passando ora ai fatti che con essa si connettono, e cominciando dall'occupazione di Sicione, prima impresa d'Arato, si estendono sino all'incendio di Corinto, io divido questi 105 anni in tre periodi, secondo la naturale successione degli avvenimenti. Nel primo gli Achei operarono soli da sè, nel secondo erano collegati coi Macedoni, e nel terzo coi Romani.

Correva l'anno 251 av. Cr. quando Arato in età di soli venti anni pose mano alla prima sua impresa, che fu quella di liberare Sicione sua patria dal tiranno Nicocle (1). Destro simulatore e dissimulatore nel maneggio degli affari, scaltrissimo nel tender insidie, paziente nell'aspettare le opportunità, avveduto nell'ordir congiure, fecondo di partiti ed animoso nell'eseguirli (2), Arato potè con minaccie, con inganni, con agguati, con sorprese, ed anche col danaro corruttore liberare Sicione, Ermione, Megara, Trezene, Cleona, Epidauro, Megalopoli, Argo, i Fliasii, e l'Arcadia, aggregando tutti alla lega (3), e, quel che è più, impadronirsi dell'Acro-Corinto. Bisognoso di danaro per tante imprese, e per pacificare le città piene di fuorusciti rientrati, recatosi in Egitto seppe colle sue blande attrattive ottenere dal re Tolommeo una prima egregia somma, poi un annuo assegnamento. Questa prima parte del suo disegno gli venne fatta facilmente. Infatti trattavasi di abbattere tiranni attuali; l'abbattere riesce più agevole che non l'edificare, i tiranni erano esosi nella Grecia, ed il governo attuale suol sempre essere il peggiore di tutti. I mezzi poi erano le congiure, le sorprese, i tradimenti, e simili malizie, congiunte ad un coraggio di cospiratore, ed in ciò Arato era solenne maestro a niun altro secondo. Finalmente che città disgiunte fra loro, e liberate dai loro tiranni si aderissero prontamente alla lega, accettando bello e creato un governo autonomo di libertà e d'uguaglianza, ciò si doveva presumere, ed in fatti avvenne.

---

(1) Plutarco *Aratus* 5.
(2) Polibio IV. 8.
(3) Polibio II. 44.

Ma quanto più la lega si andava ampliando, tanto più si ingelosivano i maggiori Stati circonvicini, che non amavano di veder sorgere accanto a sè una nuova potenza ragguardevole. Gli Etoli, nazione feroce, rapace e sprezzatrice d'ogni diritto di pace o di guerra, volevano che le città del Peloponneso rimanessero separate, a fine di poterle più facilmente assalire, predare ed anche sottomettere (1); epperò mal soffrivano che esse coll'unione federativa acquistassero forza. Gli Spartani poi non potevano a meno di vedere nella lega Achea la rivale che loro toglieva il primato del Peloponneso, la nemica che proteggeva i Messenii, l'insidiatrice che loro ribellava una ad una le città, ed ultima riserbava Sparta. Epperò prima gli Etoli, poi Cleomene re di Sparta ruppero guerra alla lega Achea.

Per resistere a sì gagliarde forze non bastavano più nè le arti clandestine, nè la guerra di partigiani, si richiedeva un provvido ed esperto capitano, ed un esercito agguerrito e disciplinato; ma tali non erano nè gli Achei, nè Arato. Infatti gli antichi mentre attribuiscono a Filopemene la gloria di aver creata la milizia Achea, dichiarano bastantemente che gli Achei sotto Arato erano poveri soldati, al più masnadieri e partigiani. Arato poi, per confessione di Polibio [IV. 8], quando doveva condurre in campo aperto le schiere, era tardo nello scegliere i partiti, timido nell'aggredire, e disveniva alla sola vista d'un feroce scontro; duellante animoso non aveva il freddo ed impassibile coraggio del vero soldato. Quindi, al dir di Plutarco, per le bocche di tutti correva il motteggio, che Arato all'approssimarsi della battaglia provava un flusso di ventre, all'udir la carica suonata dal trombettiere pativa vertigini, e nel momento dell'affrontata ci si ritirava in sicuro aspettando l'esito della battaglia (2).

(*b*) Arato richiama i Macedoni già da lui cacciati. Giudizio di Plutarco.

Arato pertanto inetto capitano di un imbelle esercito aveva toccato tali e tante sconfitte, che, al dir di Polibio, il Peloponneso era pieno di trofei contra lui eretti, e l'Acaia stessa, perdute le fatte conquiste, stava per essere invasa e soggiogata dai Lacedemoni (3). Ridotto a tali strette Arato, anzichè rinunziare alla federazione da lui creata, e rientrare sotto

(1) Polibio II. 45.
(2) Plutarco *Aratus* 28. 29.
(3) Polibio IV. 8, Plutarco *Aratus* 39.

il primato degli abborriti Spartani, si appigliò all'abbominevole partito di richiamare nel Peloponneso quei Macedoni, che egli dianzi ne aveva felicemente cacciati.

Per togliere da sè l'onta della chiamata de' Macedoni, e per non entrare mallevadore della loro condotta, egli desiderando che la nazione Achea fosse quella che li invitasse ordì e diresse l'intrigo seguente riferito per minuto da Polibio. Per mezzo di due suoi amici operò che i Megalopolitani deliberassero di domandar soccorso ad Antigono re di Macedonia contra Cleomene che li tribolava con assidua guerra. Tal deliberazione dovendo secondo lo statuto venir sottoposta alla generale assemblea, Arato in questa lasciò che i suoi amici prendessero a patrocinare la proposta, e ne ottenessero l'approvazione. Gli oratori Megalopolitani indettati da Arato si recano nella Macedonia, dove brevemente espongono la domanda della loro città, poi diffusamente rimostrano al re, che egli insidiato pure dagli Etoli e dagli Spartani dovrebbe ambire l'amicizia della nazione Achea, a fine di domare con unite forze i nemici comuni, e di crearsi principe della Grecia; che, se desiderava tal amicizia, Arato era pronto a stringerla, e a dargli di sua fede malleverie gradite, ma l'alleanza dovrebbe rimaner occulta insino a che Arato gli significasse di scendere con oste numerosa nel Peloponneso. Il re approvò tal consiglio, e rinviò gli oratori con lettere, nelle quali prometteva ai Megalopolitani il chiesto soccorso purchè fosse acconsentito dagli Achei, ai quali si dichiarava propenso e pronto a giovare in ogni modo. I Megalopolitani lietissimi per le ricevute lettere le comunicarono all'assemblea federale, instando perchè la nazione intera chiamasse in suo aiuto i Macedoni e con essi stringesse alleanza. Al parere de' Megalopolitani tosto fecero plauso oratori Achei già imbeccherati da Arato, e quando la moltitudine già propendeva ad approvare tal partito, allora Arato si levò e disse: che prima di muovere tal passo dovevano gli Achei far l'estremo di loro possa contro ai nemici; ove poi la fortuna delle armi durasse avversa, allora avrebbero accettato la proferta di tanto amico. Approvato tal parere, gli Achei tornarono alle armi, ma in pochi giorni toccarono tre sconfitte; epperò Arato mandò il figliuolo in Macedonia per conchiudere il trattato d'alleanza. Se non che Antigono pretendeva gli fosse restituito l'Acro-Corinto, chiave del Peloponneso, ed Arato non osava restituirlo senza il consentimento dei Corinzii; ma la buona fortuna gli venne in aiuto. Imperocchè mentre egli andava battendo la ritirata, e le città spontanee si davano a Cleomene, avvenne che Corinto, disperata

d'aiuto, intimò al presidio Acheo di uscirne, intendendo di arrendersi a Sparta; Arato allora, colta l'opportunità di questa defezione, rassegnò la cittadella in potere dei Macedoni. Così Antigono, conseguito il suo intendimento, entrò senza più nel Peloponneso.

Io seguitai sin qui la narrazione di Polibio (1), il quale, non che trovare una parola di biasimo nello scopo e nella condotta di questo comico dramma, ammira l'accortezza, colla quale Arato dalla lunga preparò la chiamata del Macedone, e destreggiandosi tra gli Achei ed Antigono ne venne a capo così da evitarne egli stesso il carico e gettarlo tutto addosso all'assemblea, giacchè ben egli temeva che i Macedoni col tempo si sarebbero diportati da padroni. Quanto meglio Plutarco! *Arato*, die'egli, *se disperava degli affari e delle forze degli Achei, doveva cedere a Cleomene, e non rendere nuovamente imbarberito il Peloponneso con guernigioni di Macedoni, nè riempire l'Acro-Corinto d'armi Illiriche e Galliche, nè condurre nelle città ad esserne padroni* [*chiamandoli però col gentile nome di confederati*] *coloro, che egli medesimo aveva sempre depressi nelle guerre e ne' maneggi politici, e vituperati ne' suoi comentarii. E se Cleomene era* [*diciamolo pure*] *uomo ingiusto e tiranno, egli aveva però gli Eraclidi per progenitori, e Sparta per patria; e tutti che tenessero in qualche conto la nobiltà Greca avrebbero piuttosto nominato a capitano supremo il più oscuro Spartano, che non il primario de' Macedoni. Ed in vero Cleomene domandava agli Achei tal dignità per rendere molti beneficii alle città in ricompensa di quell'onore e di quel titolo; laddove Antigono dichiarato capitano assoluto su terra e su mare non accettò tal incarico, se prima non gli fu dato come mercede l'Acro-Corinto. Imperocchè sebbene pregato dagli Achei con umili ambasciate e decreti, tuttavia scender non volle se non dopochè essi accettando guernigioni e dando ostaggi si lasciarono porre il freno, vocabolo questo che Arato respinge, scusandosi colla necessità* (2). Così dopo due secoli scriveva un Greco, e così dopo altri secoli noi Italiani deploriamo i nostri maggiori, che a questo giardino d'Europa invitavano gli stranieri; ma pur troppo! le gelosie e le inimicizie fraterne sono così malignamente naturate, che sempre fecero e faranno getto dell'indipendenza nazionale.

---

(1) Polibio II. 47. *sg.*

(2) Plutarco *Aratus* 38.

(c) La lega dominata dai Macedoni. Chi fu Arato.

L'Acaia poc'anzi aveva messo su piede cinquemila fanti e cinquecento cavalli (1), ora Antigono scendendo alla testa di diecimila pedoni e di mille quattrocento cavalieri (2) prendeva evidentemente possesso della piccola ed imbelle Acaia. Arato coi magistrati gli mosse incontro ad ossequiarlo, ed Antigono lo ammise nell'intima sua famigliarità. Lo ricambiava Arato consigliando gli Argivi a dare al Macedone le ricchezze dei tiranni e quelle dei traditori; gli fece dono della città di Corinto, quasichè d'una villa volgare; gli intitolò la città di Mantinea, chiamandola Antigonea; lasciò che i Macedoni saccheggiassero Orcomeno; nutriva e stipendiava l'esercito amico; promise di non entrare in alcun trattato senza il consentimento dei suoi padroni; tollerò che gli Achei, anzi i Sicionii i primi, facessero sacrifizii, libamenti e giuochi in onore d'Antigono (3). *Di tutte queste cose*, scrive Plutarco, *gli Achei incolpavano Arato, non sapendo che avendo egli date le redini ad Antigono, e venendo tirato dalla forza della regia autorità, non era rimasto padrone di altro che della sua voce, e gli era pur pericolo di usarla liberamente; ed era evidente che molte di tali cose addoloravano Arato* (4).

A tante onoranze corrispondeva Antigono con forti fatti. Con sì vigorosa guerra egli strinse Cleomene, che in due campagne lo conquise a Sellasia [anno 222 av. Cr.] e lo obbligò ad esulare in Egitto; quindi entrò in Sparta, ma rispettandola le restituì la sua libertà e le sue leggi. Quindi a pochi giorni ne partì chiamato in Macedonia da una sollevazione degli Illirii, vi accorse, li vinse, nè guari andò che morì, lasciando il regno al giovane Filippo. Tuttavia partendo dal Peloponneso egli aveva ritenuta Corinto siccome datagli in dono, e conservata Orcomeno perchè città da lui conquistata; così Corinto gli manteneva aperta la porta del Peloponneso, ed Orcomeno gli serviva di piazza forte nel cuore della penisola, dove un grosso suo presidio l'avrebbe invigilata (5).

In questo mezzo Arato volle colle sole forze Achee tentar la fortuna dell'armi contro degli Etoli, ma, al solito, toccò una grave sconfitta a

(1) Polibio IV. 15.
(2) Plutarco *Aratus* 43.
(3) Plutarco ivi. 43. sg.
(4) Plutarco ivi. 45.
(5) Polibio IV. 6.

Cafie [anno 220 av. Cr.]. Egli era quel povero capitano che abbiam detto più sopra, ed i suoi Achei, siccome scrive Plutarco, *già si erano avvezzati a farsi salvare dalle mani mercenarie, e ricoverandosi sotto le armi de' Macedoni vivevano in un grande ozio e disordine* (1). Anche questi furono i veri frutti, che l'Italia raccolse dalle truppe vendereccie e dalle chiamate degli stranieri. Scarnascialavano gli Etoli nel Peloponneso con arrogante impudenza, e, come il timido ed ottuso Arato non sapeva cogliere l'opportunità di batterli, gli Achei per necessità nuovamente stesero le mani ai Macedoni, *e tirarono*, dice Plutarco, *e menarono giù Filippo ad ingerirsi delle faccende dei Greci* (2).

Scese Filippo, e sintantochè tra per la giovinezza e tra per l'inesperienza degli uomini e dei luoghi abbisognò d'Arato, lo vezzeggiò, anzi condannò ad una multa que' cortigiani, che di lui sparlavano ed erano giunti a trattarlo come un Calandrino nel Mugnone (3). Ma dopochè ebbe conosciuto gli uomini e le cose della Grecia si scostò poco per volta da Arato, anzi ospite di lui gli fece ingiuria nella sua giovine nuora, e di re mansueto e giovine modesto diventò uomo lascivo e tiranno esiziale (4); da ultimo fece amministrare ad Arato un lento veleno che lo trasse in fine di vita, poi con altra qualità di veleno tolse il senno ad Arato il giovane.

Chi fu Arato? Ardente amatore della patria concepì un disegno superiore a sè, agli Achei ed alle probabilità storiche. Se si fosse limitato ad atterrare i tiranni, e ad attirare alla lega le separate città, adoperando per tal fine i maneggi politici, le arti clandestine, e le sorprese da partigiano, avrebbe raggiunto il suo scopo, e mosso un primo gran passo per unire il Peloponneso; ma impaziente del tempo egli volle risolvere tre ardui problemi in una volta, l'indipendenza, l'unione, la costituzione dell'intero Peloponneso, per non dire di tutta la Grecia. Sperava forse che Sparta, allettata da uno statuto liberalissimo, avrebbe dato bonariamente il suo nome alla lega? Soliti sogni degli entusiasti politici! Sparta soffrì piuttosto le prepotenze di Cleomene, e la vedremo soffrire le tirannidi di Macanida e di Nabi, anzichè ricca di bel nome e di bella storia suicidar se stessa annientandosi con una fusione nella piccola Acaia. Confidava egli che i vicini

(1) Plutarco *Aratus* 47.
(2) Plutarco ivi.
(3) Plutarco ivi. 48, Polibio IV. 76.
(4) Plutarco ivi. 49, Polibio VII. 12, X. 26.

lo lascierebbero fare a sua posta? Ma i maggiori Stati vicini non soffrono mai che sorga una nuova potenza rivale. Gli Etoli e Sparta gli ruppero una guerra giusta in campo aperto. Egli abbisognava d'un capitano, ma nè egli, nè il figlio, nè gli altri così detti Strategi, non erano capitani. Abbisognava di soldati, ed aveva soli partigiani; la nazione poi generalmente era corrotta dal lusso, dall'ozio (1), dal comunismo, e da quel languore che occupa gli animi dei popoli dopochè fecero senza frutto molti esperimenti politici. Abbisognava di danari per soldare mercenarii, ed i sei annui talenti pagatigli da Tolommeo (2) non bastavano, e questi ancora gli mancarono, così che vender dovette il suo vasellame e gli ornamenti della moglie (3). Insomma il disegno esorbitante d'Arato eccedeva le forze di lui e degli Achei, non che la probabilità morale. Egli proclamando di unire il Peloponneso, anzi la Grecia, in un solo Stato, pareva bensì greco, ma volendo che il Peloponneso si versasse nell'Acaia, e non l'Acaia nel Peloponneso, era un pretto Acheo. Ed Acheo fradicio era pure Polibio, che nel predicare i vanti della lega Achea giubilando scriveva, che il Peloponneso, perduto il suo nome, omai si chiamava Acaia (4). Se non che più severo è il giudizio di Plutarco. *Arato*, egli dice, *si volse a far un'azione indecente ad ogni Greco, di sommo opprobrio per lui, e indegnissima delle sue passate imprese; ciò fu il chiamare in Grecia Antigono, ed il riempiere il Peloponneso di Macedoni, quando egli stesso ancor giovinetto gli aveva dal Peloponneso scacciati, egli che . . . contra Antigono stesso aveva scritto vituperii infiniti ne' suoi comentarii, egli . . . introdusse armati i Macedoni nella patria, nella sua casa, e fin nelle stanze dove abitavano le donne, perchè non voleva che Cleomene re ed Eraclida fosse capitano de' Sicionii . . . sottomise se stesso ed insieme l'Acaia tutta al diadema, alla porpora ed a' comandi de' Macedoni e de' loro satrapi, acciò che non paresse di sottostare a Cleomene* (5). Arato adunque era nè Greco, nè Acheo, ma Sicionio, e talmente ambizioso del potere, che, invece di cederlo ad uno Spartano Eraclida, lo rassegnò da traditore al barbaro Macedone.

---

(1) Polibio XI. 8.
(2) Plutarco *Aratus* 13. 41.
(3) Plutarco ivi. 19.
(4) Polibio II. 38.
(5) Plutarco *Cleomenes* 16.

(*d*) Chi fu Filopemene. Ammirato, ma non secondato dagli Achei.

Ad Arato nella grande impresa succedette Filopemene Megalopolitano, che meritò d'essere chiamato l'ultimo dei Greci. Ardente per la milizia studiò l'arte militare sui libri, e la esercitò come cavaliere in varie fazioni in patria, poi in Creta trattovi dalla fama di quei bellicosi isolani. Tornato in patria, e nominato comandante della cavalleria ordinò quest'arma, stata sin allora trascuratissima; quindi applicandosi alla fanteria ne cangiò le armi, ereò la falange e le sue evoluzioni, riformò gli ordini delle schiere, avvezzò i soldati alla battaglia stabile ed alla disciplina. Erano gli Achei dediti alle vesti sfoggiate, ai tappeti di porpora, alla magnificenza delle cene e ad ogni maniera di lusso, e Filopemene andando di città in città destava i giovani all'ambizione delle armi, delle clamidi militari e de'cavalli, poi li esercitava addestrandoli ne' varii movimenti, e talora ne' pubblici giuochi produceva come spettacolo militare la sua falange, che con prestezza e precisione eseguiva le comandate evoluzioni (1). Filopemene così volle divezzar la nazione dalle morbidezze, ed educarla alla disciplina, all'onore ed alle virtù militari; ma incontrò molti ostacoli.

Polibio, Plutarco e Pausania parlano di Filopemene quasi fosse l'idolo della nazione, ma un solo fatto narrato da questi scrittori mi persuase che la nazione lo ammirava bensì come tutti, anche i viziosi, ammirano la virtù, ma poi lo respingeva come educatore e riformatore de' pubblici costumi. I soli giovani di alti e generosi spiriti si saranno docilmente sottomessi alla dura e faticosa educazione da lui iniziata, ma la nazione ricusava le sue cure educatrici; a lui ultimo de' Greci mancava la nazione che non era più Greca. Il fatto che mi colpì, e parmi decisivo, è il seguente.

Arato nei 58 anni che visse fu eletto Stratego ben 17 volte, e Filopemene, all'età di 70 anni, fu nominato Stratego per l'ottava e l'ultima volta. Arato, capitano imperito, timido e celebre per le toccate sconfitte, era ogni altro anno assunto alla dignità di Stratego, e Filopemene, ordinatore della milizia, chiaro per più trionfi, fu appena ogni sesto anno eletto alla prima dignità di capitano. Se lo paragoniamo con Arato, dobbiamo dire che la nazione elettrice lo mettesse in abbandono, e non lo

(1) Plutarco *Philopoemen* 4-10, Polibio XI. 8-10, Pausania VIII. 49-50.

chiamasse se non quando stringeva il bisogno di qualche segnalata impresa e vittoria; ma ciò facilmente si spiega. Arato connivente ai vizii della nazione la lasciava poltrire nelle morbidezze, procacciando di supplirvi mediante la potenza della sua parola, la piacevolezza dei modi, e le amicizie che aveva coi re, colle quali arti, scrive Plutarco, egli pigro e trascurato nelle cose di guerra eseguì la maggior parte degli affari (1); quando poi cotali arti più non giovavano, buttò sè e l'Acaia in balia dei Macedoni, ed allora la nazione lo applaudì, lieta di farsi salvare da altri. All'incontro Filopemene non patteggiava nè coi vizii della nazione, nè colla prepotenza dei re. Egli voleva che gli Achei, lasciate le sontuosità della molle vita, e lasciate le palestre di atleti che derideva, si assoggettassero alla dura educazione militare, e divenissero guerrieri disciplinati bastevoli a difendere la patria; ma ciò non garbava alla moltitudine. Egli voleva che i re rispettassero la lega, trattandola da eguale; ma Filippo voglioso di soprastare deputò contra lui sicarii per ucciderlo (2). Voleva alle parti estreme inculcare moderazione, e contrastava ai magistrati ed oratori, che ipocritamente mantellassero bassi fini privati; così si creava rivali e nemici. Egli però nelle elezioni non aveva per suffragatori che le persone di senno ed i giovani generosi, pochissimi amendue in una nazione corrotta; ma, come giungeva un imperioso bisogno, allora per necessità era eletto Stratego.

Al vedersi così trascurato Filopemene non poteva rimanere indifferente, epperò dispettoso si recava sovente a militare in Creta, dicendo che aborriva il vivere scioperato, ma frattanto nell'Acaia si parlava del suo dispetto di veder la prima carica occupata da altri (3). Stava egli in Creta governando l'esercito de' Gortinii, quando Megalopoli sua patria, stretta da Nabi, si trovava ridotta agli estremi, tuttavia egli non si mosse, talchè i Megalopolitani già disegnavano di punirlo coll'esilio. A tal annunzio si accese di sdegno contro ai suoi concittadini, e ripatriato si vendicò adoperandosi per istaccare da Megalopoli molti borghi circonvicini, insegnando loro a dire che anticamente non le appartenevano (4). Altra volta vedendo che lo Stratego lasciava imbaldanzire i nemici nella Messenia, egli, sebbene

(1) Plutarco *Philopoemen* 8.
(2) Ivi. 12.
(3) Ivi. 7.
(4) Ivi. 13.

persona privata, raccolse i suoi fidi giovani e corse a salvare Messene (1). Parimente, dopo che ebbe in vano procacciato di dissuadere lo Stratego Diofane dal far un'impresa contro a Sparta, pervicace nel volerla spuntare corse a Lacedemone; dispose il popolo alla difesa, ed impedì che Diofane col console Romano vi entrasse (2). Eppure egli fu che poco stante colla rabbiosa ira d'un vero Acheo sevì contro a Sparta, mettendo a morte almeno ottanta cittadini, e vendendone all'asta altri tremila, poi smantellando la città e staccandone una parte del territorio per darla a Megalopoli; ultimamente non pago di tante sevizie abolì ancora le instituzioni di Licurgo, obbligando i giovani Spartani ad essere allevati alla maniera Achea (3). All'udire maltrattata e vilipesa sì nobile città i Romani pietosi instavano perchè gli sbanditi di Lacedemone fossero rivocati, ma Filopemene vi si oppose; come poi egli fu Stratego, allora li richiamò volendo che tal favore derivasse dalla spontaneità degli Achei, e non dall'intercessione dei Romani (4). Una tal natura irritabile, collerica e troppo persuasa del suo merito somministrava argomenti ai suoi rivali per tenerlo lontano dalla prima carica dello Stato.

(*e*) La lega fa alleanza coi Romani, e si divide in parte Achea ed in parte Romana.

Mentre i Romani cominciavano a prevalere nella Grecia contro a Filippo, la lega Achea dovette deliberare sul partito che prenderebbe. Da due giorni duravano i pubblici dibattiti e gli animi pendevano ancora irresoluti, quando nel terzo dì, dovendosi venir a deliberazione, dopo vivi alterchi e minaccie lo Stratego Aristeno vinse il partito che si abbandonerebbe Filippo, e si farebbe alleanza coi Romani. A tal deliberazione i Dimei, i Megalopolitani e parecchi Argivi, riconoscenti a Filippo per li benefizii ricevuti, ricusarono di partecipare (5); ma la parte Macedone non tardò a dileguarsi, avendo gli Achei ben presto riconosciuta l'impotenza di Filippo a difenderli dai Romani. Lo stesso Polibio scrive che la lega Achea, se non si aderiva ai Romani, sarebbe stata annientata, laddove accostandosi a Roma prese un nuovo incremento (6). Ma allora circa

(1) Plutarco. *Philop.* 12.
(2) Ivi. 16.
(3) Ivi. 16.
(4) Ivi. 17.
(5) Livio XXXII. 20. 23.
(6) Polibio XVII. 13.

al modo di governarsi coi nuovi alleati sorsero due parti, che io esporrò colle parole di Polibio: *Aristeno nel reggere lo Stato faceva volentieri quanto tornava utile ai Romani, prevenendo eziandio talvolta i loro comandi; tuttavia egli studiavasi d'aver sembiante di osservare la legalità, ed anche quando gli ordini Romani erano contrarii ad alcuna delle leggi egli pur cedendo pretendeva di sembrare osservante delle leggi. Laddove Filopemene collaudava ed eseguiva senza tergiversare quanto i Romani comandassero che fosse conforme alle leggi ed al trattato d'alleanza; ma a quanto ne fosse difforme egli mal sapeva indursi ad ubbidire, e diceva che in tal caso i magistrati dovessero rimostrare le loro ragioni, e dopo ciò scendere alle preghiere; che se pregando nulla ottenessero, dovessero da ultimo protestare, ed eseguire così i comandi* (1).

Questa parte Achea, alla quale appartenevano Filopemene, Licorta e Polibio, volendo mantenere indipendente lo Stato dalla prepotenza dei Romani, aveva adottato il sistema seguente. Circa agli affari interni della lega nulla riferiva ai legati ed al Senato, ma tutto deliberava ed amministrava da sè (2). Che se i legati intimassero comandi a nome del Senato, la parte Achea soleva risponder loro che mostrassero o mettessero in iscritto tali comandi, giacchè le patrie leggi non permettevano che si convocasse l'assemblea generale per farle una proposta solamente verbale; così fu risposto a Tito, e così a Cecilio (3). Ove poi si producessero lettere scritte del Senato, i magistrati bensì le comunicavano all'assemblea, ma procacciavano di eluderle in qualche modo. Così quando il Senato ordinava di rivocare i fuorusciti Lacedemoni, Licorta esortava il popolo a mantenere il bando, e diceva: I Romani fanno il loro uffizio, prestando orecchie alle eque domande di gente che reputano sventurata; ma se alcuno loro dimostri, che le domande non si possono concedere, senza arrecare gran disonore e danno agli amici, i Romani, ne son certo, non saranno per perfidiare, o per usare coazione. Epperò se ora alcuno rimostri al Senato che gli Achei coll'ubbidire alle sue lettere violerebbero i giuramenti, le leggi e i trattati inscritti sulle colonne, legami che tengono unita la nostra federazione, il Senato muterà sentenza e riconoscerà che giustamente ci

(1) Licorta perorando davanti il Senato Romano *ex praeceptis Philopoemenis postulabat, ut Achaeis ex foedere ac legibus suis, quae decressent, agere liceret; libertatemque sibi illibatam, cuius ipsi auctores essent, praestarent.* Livio XXXVIII. 32. Vedi anche Polibio XXVI. 2.

(2) Polibio XXIV. 10. 2.

(3) Polibio XXIV. 5, Livio XXXIX. 33.

asteniamo dall'eseguire gli ordini scritti (1). Così la parte Achea ora citando le leggi ed interpretandole a suo modo, ora appellando dal Senato mal istrutto al Senato meglio informato, procacciava di eludere gli ordini de' Romani.

(*f*) La parte Romana guidata da Callicrate prevale, e caccia in esilio mille della parte Achea.

La parte Romana, moderata sotto Aristeno, il quale, mentre cedeva ai Romani, studiavasi pure di conservare il sembiante di legalità, non tardò a trapassare i limiti, professando apertamente, che a fronte dei comandi Romani dovevano cedere le leggi, i trattati parziali della lega, ed ogni riguardo nazionale (2). Capo di questa parte era Callicrate di Leonzio, città dell'Acaia, accusato da Polibio come corruttibile per danaro (3). Parlatore facondo soleva nel foro opporsi ai partiti della parte avversaria, travisandoli come imaginati per recar danno agli interessi Romani (4). Nominato oratore con due altri colleghi per esporre nel Senato le ragioni, per le quali la lega ricusava di richiamare gli esuli Spartani, si recò a Roma, e là non solamente tradì il mandato ricevuto perorando in favore degli esuli, ma ancora accusò i suoi avversarii politici, ed esortò il Senato a trattare i Greci con minori riguardi. A questo partito appigliandosi i Padri Coscritti deliberarono di deprimere la parte Achea e di onorare quella Romana, poi ordinarono agli Achei di ristabilire i fuorusciti di Sparta, soggiungendo che tutti nelle città della lega dovrebbero essere animati come Callicrate; ultimamente scrissero agli Etoli, agli Epiroti, agli Ateniesi, ai Beoti ed agli Acarnani esortandoli ad abbassare la potenza degli Achei (5). Già prima, quando la lega aveva domandato soccorso ai Romani per punire i ribelli Messenii, il Senato aveva ricusato d'ingerirsi in tal affare, scrivendo che *se i Lacedemoni, od i Corinzii, o gli Argivi si staccassero dalla lega ciò punto non lo concerneva* (6). Colle quali parole il Senato evidentemente dichiarava il suo desiderio di vedere disciolta la lega, ed i varii Stati tornare alla prima isolata condizione. Tal era Callicrate, adulatore dei Romani, e da essi favorito per contraccambio.

(1) Polibio XXVI. 1.
(2) Polibio ivi.
(3) Polibio XXVI. 3.
(4) Polibio XXIX. 8-10.
(5) Polibio XXVI. 3.
(6) Polibio XXIV. 10.

Prima di lui, scrive Polibio, gli Achei avevano mantenuto un tal qual grado di uguaglianza nel trattare coi Romani; ma come l'audace Callicrate tornò da Roma raccomandato come esemplare agli Achei, la lega cominciò a decadere (1). Già correva voce che i legati Romani avrebbero convocato l'assemblea per accusare Licorta, Arcone e Polibio, ma non fu nulla; giacchè questi nei pubblici uffizii si governavano con tal prudenza, che nium reato loro si poteva apporre (2).

Come poi scoppiò la guerra de' Romani contro a Perseo, i primarii personaggi nelle Greche città si distinguevano, al dir di Livio, in tre generi. L'uno parteggiava per li Romani, l'altro teneva per li Macedoni, *tertium medium, utrique generi adversum, libertatem et leges tuebatur. His, ut maior apud suos caritas, ita minor apud externos gratia erat* (3). A tal genere medio apparteneva la parte Achea, guidata da Licorta, Arcone e Polibio. Essi consapevoli d'esser poco graditi ai Romani vollero con una proposta solenne e legale dar loro un attestato di fedeltà. I legati di Roma non avevano in sulle prime domandato agli Achei se non mille uomini a fine di presidiare Calcide (4); poco di poi nell'esercito di Marcio vediamo soli mille Achei, armati alla foggia Cretese (5). Arcone, giudicando che maggiori forze tornerebbero utili ai Romani per conquidere Perseo, propose e vinse un decreto, col quale la lega ordinava la leva di tutte le sue truppe [*παυδημεῖ*] per portarle nella Tessalia in aiuto dei Romani. Il console Marcio, quando dalle mani di Polibio ricevette tal decreto, lodò la spontaneità degli Achei che si sobbarcavano ad una spesa di 120 talenti, ma li ringraziò dicendo che per terminare la guerra non gli occorreva bisogno delle truppe degli alleati. Che anzi lo stesso console, come seppe che il collega Appio Centone aveva richiesto gli Achei gli mandassero nell' Epiro un rinforzo di cinque mila uomini, proibì a Polibio di mandarglieli. E Polibio soggiunge: *Se tal divieto di Marcio si debba attribuire alla sua benevolenza verso gli Achei, oppure a volontà di privare il collega delle forze necessarie per operare militarmente, non saprei decidere* (6). Io per me direi che i Romani diffidavano degli Achei,

(1) Polibio XXVI. 3
(2) Polibio XXVIII. 3.
(3) Livio XLV. 31.
(4) Livio XLII. 44.
(5) Livio XLII. 55.
(6) Polibio XXVIII. 10. sg.

e, mentre per cortesia accettavano un migliaio d'uomini, ne ricusavano un maggior numero, affinchè l'esito d'una battaglia non dipendesse dalla loro dubbia cooperazione. A diffidare erano indotti dalla fede Greca proverbiale, poi dalle assidue calunnie di Callicrate, che malignamente travisava le intenzioni della parte Achea; inoltre la gioia, che mostravano molti Achei all'annunzio di qualche sconfitta toccata dai Romani, li doveva insospettire. Di questa diffidenza dissimulata da Polibio avremo più innanzi maggiori prove.

Vinto Perseo, il Senato mandò nella Grecia dieci legati per riconoscere coloro che avessero favorito i Macedoni, e tosto Callicrate mosse loro incontro e li circonvenne con ogni maniera d'adulazione in fatti ed in parole. I legati, avendo nelle scritture di Perseo trovato molte lettere di Greci suoi fautori, li chiamavano a sè e li inviavano a Roma ad essere giudicati; ma di lettere d'Achei non ne trovarono neppur una. A tal mancanza supplì prontamente Callicrate, denunziando meglio di mille Achei; ma i legati non si attentarono di citarli davanti sè per tema che non si sarebbero rappresentati. Epperò C. Claudio e Cn. Domizio, due dei legati, scesero nell'Acaia, anche per proteggere colla loro presenza il delatore Callicrate, che correva gran pericolo per la generale indegnazione (1). Tutti i mille e più denunziati da Callicrate, frai quali Polibio lo storico, furono deportati a Roma, e distribuiti anche nelle città dell'Etruria.

(*g*) La parte Romana ognora più servile.

Callicrate, poichè ebbe cacciato in bando dall'Acaia i primarii personaggi di parte Achea, e quelli di parte Macedone, suoi rivali, dominava protetto dai Romani, ma cordialmente odiato da tutti. Il suo nome in pubblico era accolto con fischi inesprimibili, tutti ricusavano d'entrare nel bagno nel quale egli si fosse lavato, e gli stessi ragazzi tornando dalla scuola gli gettavano in volto la mala voce di traditore (2). Ma egli si consolava coll'esercizio dell'ambito potere, facendone anche mercato. Venne da Roma Sulpicio Gallo (3) per terminare una contesa tra i Lacedemoni e gli Argivi, relativa ai loro confini, e dopo avere con orgogliosi modi schernito i

(1) Polibio XXX. 10, Livio XLV. 31, Pausania VII. 10.

(2) Polibio XXX. 20.

(3) Nell'anno 164 av. Cr., vedi Clinton *Fasti Hellenici* ed. Oxford, tom. II. p. 416. c.

contendenti commise il giudizio all'arbitrio di Callicrate (1). Poco dipoi lo Stratego Menalcida, corrotto con dieci talenti dagli Oropii, affinchè movesse coll'esercito in loro aiuto, giudicò di non poter ottenere tal decreto dalla lega, senza essersi procacciato il voto favorevole di Callicrate, e questi gli promise di fargli spalla nell'assemblea mediante la metà dei promessi talenti. Terminata la spedizione, Menalcida ricusava di mantenere la data fede, e Callicrate ne sparlava; il patto si divulgò, e per le bocche di tutti correvano alcuni versi, che parlavano di due lupi, de' quali il più perfido corbellò il più scellerato. Allora Callicrate punto nel suo onore spudorato, e leso nella borsa, accusò l'avversario di tal crime capitale, che probabilmente non era una calunnia inventata; e questi ricorse ad un terzo lupo. Dico suo successore nella Strategia mediante tre talenti numerati liberò Menalcida dall'accusa a malgrado degli Achei sdegnati di tali notissimi mercimonii; poi per liberar sè dalla pubblica maldicenza divagò la nazione inducendola ad accattare una fiera e lunga briga coi Lacedemoni (2). Tal era la genia degli Strategi, che in que' tempi reggevano la somma delle cose Achee.

La storia dei 22 anni, che dall'esilio de' mille Achei trascorsero sino alla morte di Callicrate, ci offre il doloroso quadro di arroganza verso i membri della lega, e di servilità verso il Senato Romano mista a sotterfugii degni di sofistici legulei. Venivano i Cretesi, venivano i Rodii per implorare soccorso dalla lega, e Callicrate troncava ogni discussione, avvertendo che senza la permissione di Roma non si poteva nè muover guerra, nè concedere aiuto ad alcuno (3). Sorgeva forse tra due popoli della lega una gara municipale? Gli Strategi intervenivano arroganti e parziali, più oppressori che giudici. Gli oppressi ricorrevano al Senato Romano, e questo deputava legati. Al loro arrivo ricominciava la servile adulazione ed ubbidienza, ma talora si studiava qualche bindolo per appellare da essi al Senato, poi dal Senato mal informato al Senato meglio istrutto.

(*h*) La parte Achea estrema prevale; è sconfitta dai Romani. Fine della lega.

Ma dopo la morte di Callicrate, avvenuta nell'anno 149 av. Cr. (4)

(1) Pausania VII. 11.
(2) Pausania VII. 11 e 12.
(3) Polibio XXXIII. 25.
(4) Pausania VII. 12.

occuparono il potere Dieo, Damocrito e Critolao di parte Achea, ma superlativa e forsennata. Costoro disfogando contro ai Lacedemoni l'antico odio nazionale col muover loro un'accanita guerra, non posavano le armi benchè i Romani ne li pregassero; pretendevano d'aver piena autorità su Sparta, mentre gli Spartani pretendevano d'essere stati dal Senato prosciolti dalla lega, od almeno di non dovere piatire davanti lei per li delitti capitali (1). Allora il Senato risolutamente si appigliò al partito già da lui iniziato di disciogliere la lega Achea. Sin dall'anno 164 av. Cr. i Padri Coscritti avevano concednto ai cittadini di Pleurone nell'Etolia di separarsi dalla federazione, ed avevano ad un tempo significato al legato Sulpicio Gallo di staccare dalla lega quante città più potesse; e Sulpicio, scrive Pausania (2), già eseguiva lo smembramento. Ma ossia perchè Sulpicio dovesse recarsi in Asia per eseguire altri mandati, ossia perchè, partito lui, i magistrati Achei avessero colla forza fatti rientrare nella lega i popoli prosciolti, lo smembramento allora fu appena iniziato. Come poi, morto Callicrate, la parte Achea superlativa, arrivata al governo, poneva in non cale i consigli dei legati e gli ordini del Senato, allora [anno 147 av. Cr.] i Padri Coscritti mandarono nell'Acaia Aurelio Oreste. Questi, avendo convocato in Corinto i magistrati Achei e primo di tutti lo Stratego Dieo, manifestò loro la deliberazione del Senato, che staccava dalla lega i Lacedemoni, Corinto, Argo, Eraclea presso l'Eta, ed Orcomeno dell'Arcadia. All'udire tal annunzio i magistrati, senza aspettare il fine del discorso del legato, uscirono nel foro e sommossero la plebe; questa sguinzagliata agguanta quanti Spartani stavano in Corinto, nè risparmia quelli che si erano rifuggiti nella casa di Oreste. Oreste rimostra, ammonisce e prega, ma indarno; egli stesso riceve insulti e corre pericolo della vita (3). Nuovi legati dovevano giungere da Roma, e Critolao, successore di Dieo nella Strategia, va ad incontrarli in Tegea, promette loro di convocar l'assemblea della nazione per comunicarle la deliberazione del Senato, ed infatti scrive e mostra ai legati le lettere di convocazione, poi manda ordini secreti alle città di non intervenire. Giunto il dì dell'assemblea, Critolao solo è presente, oltre ai Lacedemoni suoi avversarii. Sdegnati per questo grossolano inganno i legati domandano una seconda

(1) Pausania VII. 12.
(2) Pausania VII. 11.
(3) Polibio XXXVIII. 1.

convocazione, ma Critolao risponde, non poter legalmente radunar la nazione se non quindi a sei mesi, aspettassero. I legati partono vie più inaspriti (1).

Critolao ardente di desiderio di romper guerra percorre le città, predica l'odio contro a Roma, e per cattivarsi la plebe, sola ausiliaria nelle rivoluzioni, ordina che ogni azione per debiti ed ogni pagamento rimanga sospeso sino al fine della guerra (2); e guerra grida la plebe adescata dall'util presente. Nell'assemblea convocata a Corinto vengono alcuni Romani consigliando senno, moderazione e pace; ma la plebe bellicosa schiamazza, fischia e caccia codesti mal capitati oratori, mentre Critolao la rinfiamma con un'arringa veemente contro ai Romani, piena di sfide e di minacce contro agli Achei moderati, e lusinghiera per le speranze di esteri soccorsi da lui sognati. Già l'esercito è raccolto, e muove contra Eraclea prosciolta dalla federazione, quando Critolao, sentendo che Metello colle legioni si accosta, lo affronta, è sconfitto, fugge, e niuno più seppe darne lingua od indizio veruno (3).

A Critolao nella Strategia sottentra legalmente Dieo suo immediato predecessore. Questi, demagogo più scapestrato, ordina a tutte le città di affrancare una designata qualità di schiavi, impone ai più ricchi cittadini una grossa tassa in danaro, e chiama alle armi tutti che fossero nell'età militare. Per tali ordini le città si riempiono di lamenti e di confusione; gli schiavi liberati insolentiscono, gli altri per ottener libertà tumultuano; dei cittadini gli uni si addossano scambievoli accuse, gli altri fuggono o si riparano presso i Romani; di guisa che l'Acaia, al dir di Polibio, avrebbe mosso a pietà gli stessi nemici. Giunto il tempo dell'assemblea ordinaria, Dieo è nominato Stratego dalla plebe e dai libertini riconoscenti, e dai cittadini atterriti. A lui si rappresentano Andronida e Lagio, Achei mandati da Metello a portar consigli di pace, vi propendeva pure Sosicrate già Vice-Stratego, ma Dieo li denunzia tutti alla plebe quali fautori de'Romani; e la plebe mette a morte Sosicrate, dopo averlo barbaramente straziato. Andronida e Lagio si salvarono pagando a Dieo una larga somma di danaro. Anche Filino Corinzio era sospetto di tener secreti trattati coi Romani, è però intrapreso colla prole; ed il padre

(1) Polibio XXXVIII. 3.
(2) Polibio ivi.
(3) Pausania VII. 14. 3. sg.

e i figliuoli alla vista gli uni degli altri sono battuti con verghe, e martoriati sino a morte. Così Dieo, Damocrito e gli altri caporioni della plebe, consapevoli delle loro scelleratezze, e disperati d'ogni perdono, governavano col terrore, ed avrebbero precipitato la nazione in un baratro di sciagure, seppur non giungeva in buon punto la necessità di combattere. Già Mummio si avanzava alla testa di 23 mila fanti e di 3500 cavalli. Gli Achei però, dopo aver fatto la massa in Corinto, dove tra ingenui e liberti convennero da 14 mila bipedi armati, oltre a 600 cavalli, accozzaglia di gente denominata esercito, escono a raffrontare le legioni Romane, ma sono sbarattati, fuggono; e Dieo, anzichè raccogliere le reliquie delle truppe in Corinto, e farvi testa, dà volta frai primi, corre diviato a Megalopoli, vi uccide di propria mano la moglie, poi beve il veleno e muore. Quindi a pochi giorni l'incendio di Corinto illuminò il giorno estremo della Grecia, ed ebbe termine la lega Achea. I dieci legati Romani non tardarono a convertire l'Acaia in provincia Romana; poi partendo diedero a Polibio il carico di percorrere singole le città, a fine di giudicarne le controversie insino a che si fossero avvezzate al nuovo ordinamento ed alle nuove leggi. E Polibio fedelmente eseguì il mandato, procacciando che gli Achei docilmente si accomodassero al nuovo governo, e non insorgesse alcuna difficoltà o privata o pubblica (1).

15.° Sparta non mai si era sinceramente acquietata alla lega.

Alla storia della lega sinquì da me esposta debbo aggiungere l'esame d'un fatto particolare. Polibio celebrando i vanti della federazione Achea scrive che *dei popoli del Peloponneso gli uni la abbracciarono spontanei, altri vi si accostarono per ragionata persuasione, ed altri, che per forza vi furono costretti, non tardarono a rimanerne contenti* (2). Più sopra io già ammisi la spontaneità degli uni, e la ragionata persuasione degli altri, avvertendo che codesti erano gli Stati menomi, i quali o per riconoscenza verso Arato che li aveva liberati dai tiranni, o perchè non si credevano bastanti a reggersi soli in quel moto universale, diedero più o meno spontanei il loro nome alla lega. Tuttavia io non posso a meno

(1) Polibio XL. 10.
(2) Polibio II. 38.

di escludere Mantinea. Questa città, dopo avere in sulle prime accettata la federazione, la abbandonò per accostarsi agli Etoli, poi si diede a Sparta, ma fu poco stante riconquistata dagli Achei; e, sebbene questi l'avessero benignamente trattata, tuttavia nuovamente si aderì ai Lacedemoni, trucidando perfidamente il presidio Acheo. Arato allora la investe, la espugna, mette a morte i primarii personaggi, e ridnce in servitù altri cittadini (1). Mantinea per certo non entra in niuna delle tre categorie distinte da Polibio.

Ma che i popoli stati dalla forza costretti ad entrare nella lega vi si sieno dopo breve tempo e cordialmente acquietati, questo io nego recisamente, opponendo Polibio lo storico a Polibio encomiatore municipale. Egli evidentemente volle alludere ai Lacedemoni ed ai Messenii stati dalla forza tratti nella lega; or bene io brevemente discorrerò con ordine cronologico le relazioni di Sparta coll'Acaia, poi dirò dei Messenii.

Cleomene re di Sparta non potendo soffrire che le fosse tolto il primato del Peloponneso investì l'Acaia con guerra così vigorosa, che Arato disperatosi d'ogni altro mezzo buttò sè e l'Acaia in balia de'Macedoni. Sconfitto Cleomene, Sparta, anzichè ascriversi alla lega Achea, sopportò le tirannidi di Macanida e di Nabi. Ma, come Nabi cadde in battaglia morto dagli Etoli, Filopemene colse l'opportunità, recossi a Sparta, ed avendola trovata confusa e dissidente nella scelta del nuovo governo, egli persuase gli uni e costrinse gli altri ad aggregarsi agli Achei (2). Tal adesione cadde nell'anno 192 av. Cr.

Anno 191 av. Cr. Era appena trascorso un anno, dacchè gli Spartani avevano dato il loro nome alla federazione, che pentiti già disegnavano d'innovare; quindi lo Stratego Diofane volendo prevenire la defezione scese ostilmente nella Laconia. Ma Filopemene lo precorse, e venuto a Sparta impedì che Diofane vi entrasse, poi pacificò i cittadini, e *li ristabilì nella lega come prima* (3).

Anno 188 av. Cr. L'apparente riconciliazione durò appena tre anni, e gli Spartani, rinnegata l'unione, si danno *in fidem ditionemque populi Romani* (4). Gli Achei sdegnati per tal defezione già corrono alle armi,

(1) Polibio II. 57. 58, Plutarco *Aratus* 36. 39. 45.
(2) Livio XXXV. 37, Plutarco *Philopoemen* 15, Pausania VII. 8. 3, VIII. 51. 1.
(3) Plutarco *Philop.* 16, Pausania VIII. 51. 1.
(4) Livio XXXVIII. 31.

ma Fulvio fa sospendere le ostilità e li consiglia a commettere nel Senato il giudizio della contesa. Oratori dell'Acaia ed oratori di Sparta vanno a piatire a Roma dove si lacerano con iscambievoli accuse. La risposta del Senato fu talmente ambigua, *ut et Achaei sibi de Lacedaemone permissum acciperent, et Lacedaemonii non omnia concessa iis interpretarentur. Hac potestate immodice Achaei ac superbe usi sunt* (1). Infatti Filopemene mosse contra Sparta, mise a morte secondo Polibio ottanta, e secondo Aristocrate 350 Spartani, ne spianò le mura, tolse loro una parte del territorio per darla a Megalopoli, trasferì nell'Acaia molti cittadini, e ne vendè all'asta altri tre mila; da ultimo per colmo d'ignominia abolì le instituzioni di Licurgo (2).

Anno 187 av. Cr. Il Senato disapprovò cotanta barbarie, ma non annullò alcuno dei decreti Achei (3).

Anno 185 av. Cr. Q. Cecilio consiglia gli Achei a ristorare i danni fatti a Sparta, ma essi ricusano (4). Oratori Lacedemoni partono per accusare nel Senato gli Achei, ed oratori Achei si avviano a Roma per difendersi; il Senato risponde che manderà in Grecia legati (5).

Anno 184 av. Cr. Appio Claudio legato con altri scende nel Peloponneso, rimprovera gli Achei pel duro governo che fecero di Sparta, li esorta ad ubbidire di buon grado ai Romani, per non esservi poi costretti. *Haec vox audita quidem cum omnium gemitu est, sed metum iniecit imperata recusandi. Id modo (Achaei) petierunt, ut Romani quae viderentur de Lacedaemoniis mutarent, nec Achaeos religione obstringerent irrita ea, quae iureiurando sanxissent, faciendi* (6).

Anno 183 av. Cr. Dacchè gli Achei ricusando di ritrattar i fatti decreti avevano rimesso nel Senato la sorte di Sparta, oratori di Lacedemone vennero a Roma, chiedendo d'essere prosciolti dall'unione, ma il Senato decise che vi rimarrebbero, e quanto alle altre differenze Q. Marcio andrebbe legato in Grecia (7).

Anno 182 av. Cr. Tornato Q. Marcio dalla legazione di Grecia riferì

---

(1) Livio XXXVIII. 32.
(2) Plutarco *Philop.* 16.
(3) Polibio XXIII. 7.
(4) Polibio XXIII. 10.
(5) Polibio XXIII. 11. 12.
(6) Livio XXXIX. 36. 37.
(7) Livio XXXIX. 48, Polibio XXIV, 4. Pausania VII. 9. 3.

che gli Achei orgogliosi tutto volevano amministrare da sè, senza dipendere dal Senato. Disse che, se il Senato pubblicamente disapprovasse tal loro condotta, avverrebbe che Sparta si unirebbe coi Messenii, ed allora gli Achei per difendersi contro ai due popoli sarebbero costretti a gettarsi nelle braccia de' Romani. Il Senato seguendo tal consiglio significò agli Achei, che, se i Lacedemoni, od i Corinzii, o gli Argivi si staccherebbero dalla lega, ciò punto non ragguarderebbe Roma (1). Così il Senato vieppiù incoraggiava la pertinace opposizione di Sparta contro gli Achei, e la invitava a rompere l'unione.

Anno 181 av. Cr. Mentre si maneggiavano queste cose, Licorta Stratego vendicando l'uccisione di Filopemene assale, conquide i Messenii, e li ristabilisce nella lega. Sparta non trovando più un appoggio ne' Messenii si acconcia con gli Achei, ed è ristabilita la colonna federale dell'unione (2).

Anno 180–149 av. Cr. Si erano forse riconciliati i due popoli? No. Le tranquille relazioni, che tra Sparta e l'Acaia succederono per anni trenta al primo ostinato contrasto, si debbono ripetere da ben altra causa. Dopo la morte di Filopemene si levò e crebbe ogni dì più vigorosa la parte di Callicrate devoto ai Romani e protettore de' Lacedemoni. Egli mandato a Roma per contraddire alle domande di Sparta tradì il mandato, mosse acerbe accuse contra gli Achei, patrocinò la causa di Sparta ottenendole quanto domandava, e ritornò nell'Acaia con lettere del Senato, che lo proponevano come specchiato esemplare che tutti imitare dovessero. D'allora in poi, scrive Polibio, i Romani presero ad abbassare quelli della parte Achea ed a favorire gli avversarii, e per l'audacia di Callicrate cominciò a decadere la lega Achea (3). Poco stante Callicrate denunziò e cacciò in esilio meglio di mille suoi avversarii, fra i quali Polibio stesso, che non furono rivocati dal bando se non dopo sedici anni. In questo intervallo regnava Callicrate, e con lui regnavano i Lacedemoni da oppressi divenuti oppressori.

Anno 150–146. Morto Callicrate, la riazione sollevò al governo della lega Dieo, Damocrito e Critolao, forsennati nemici di Roma, e tosto ricominciarono le contese tra essi e Sparta. Questa voleva mantenere i suoi privilegii e le esenzioni che aveva ottenuto da Roma, e gli Achei

(1) Polibio XXIV. 10.
(2) Polibio XXV. 1. sg.
(3) Polibio XXVI 3.

intendevano che fosse soggetta al diritto comune (1). Per l'una e per l'altra parte si mandarono oratori a Roma, e si ricorse pure alle armi; ma i Padri Coscritti posero fine alle gare sciogliendo i Lacedemoni dalla lega. A tal decisione contrastando Critolao intimò guerra a Sparta, ma fu sconfitto da Metello; gli succedette nel comando Dieo che fu vinto da Mummio. Poco stante Corinto fu incendiata.

Adunque Sparta, aggregata per forza all'unione, primieramente contrastò agli Achei con defezioni, colle armi e con incessanti accuse, poi quietò perchè protetta e privilegiata dal Senato, perchè favorita da Callicrate, perchè con lui dominava sino ad ottenere la carica di Stratego (2); morto Callicrate, tornò alle accuse, alle armi, ed ottenne d'essere sciolta dalla lega. Tal fu la spontaneità di Sparta nell'aderire all'unione.

16.° Neppur la Messenia si acquietò. Errore di Polibio.

Aggiungerò poche parole sull' instabilità della Messenia.

I Messenii, infestati dagli Etoli strinsero dapprima alleanza [συμμαχία] con gli Achei (3), più tardi verso l'anno 216 av. Cr. si aggregarono alla lega (4). Ma nell'anno 191 av. Cr. già ne li vediamo separati, *Messene concilii Achaeorum recusabat esse . . . . . extra concilium Achaicum erat;* epperò lo Stratego Diofane andò per sottometterla colle armi, ma essa per mezzo de' suoi oratori mandati a T. Quinzio si diede ai Romani. Quinzio ordinò a Diofane di ritirare le sue truppe, ed a Messene di mantenersi fedele alla lega, *Messeniis imperavit ut . . . . . Achaeorum concilii essent* (5). Se non che verso l'anno 184 av. Cr. Dinocrate Messenio, nemico di Filopemene, nuovamente staccò la sua patria dagli Achei (6); vi accorse Filopemene per punire i rivoltosi, ma egli fu preso e miserabilmente ucciso. Licorta allora volendo vendicare la morte dell'amico ruppe guerra ai Messenii, li sottomise e li ristabilì nella lega (7). Nel

(1) Pausania VII. 12. 2. sg.

(2) Lo Stratego Menalcida era Spartano, e fu poi accusato d'aver tenuto pratiche per separare i Lacedemoni dalla lega, Pausania VII. 12. 1.

(3) Polibio IV. 9. 15. sg., Pausania IV. 29. 2.

(4) Pausania IV. 29. 3.

(5) Livio XXXVI. 31.

(6) Livio XXXIX. 48, Plutarco *Philop.* 18.

(7) Polibio XXV. 1, Pausania IV. 29. 5

periodo Romano Messene parteggiando per Roma cooperò al decadimento della lega. Adunque anche la piccola Messene rifuggiva dall'essere assorbita nella unione Achea.

Tornando ora a quanto Polibio affermò dei popoli del Peloponneso, che anche quelli, i quali furono forzatamente aggregati alla federazione, non tardarono di acquietarvisi e di rimanerne contenti, dico che, siccome i soli Lacedemoni ed i Messenii furono costretti ad entrare nella lega, però di questi popoli Polibio avrebbe predicata la cordiale adesione. Ma, come vedemmo, nulla v'ha di più contrario alla storica verità. Sparta e Messene allora solamente si rassegnarono all'unione, quando Callicrate reggeva la somma delle cose; ma l'inno encomiastico di Polibio non si riferisce per certo a questo periodo di tempo, che egli stesso chiamò inizio del decadimento della lega. Rimane pertanto che Polibio sedotto dal patrio amore abbia trasmodato in questa lode, siccome lo vedremo eccedere in altre.

17.° Giudizio sulla lega Achea.

Ho esposte sinquì le notizie di fatto, che ci debbono guidare a pronunziar un giudizio sulla lega Achea, ora vengo al giudizio medesimo.

Arato aveva concepito il disegno di cacciar dalla penisola i Macedoni, di purgarla dai tiranni, e di unirla in un governo federativo mediante uno statuto di perfetta uguaglianza e di vera libertà. Tal disegno era bello come l'indipendenza, lodevole come la carità di patria. Si accinse ad eseguirlo. Già i tiranni erano scomparsi, già le separate città ed i piccoli Stati avevano dato il loro nome alla lega, già i Macedoni avevano sgombrato l'Acro-Corinto, ed Arato tutto ciò aveva eseguito esercitando una piccola guerra di agguati e di sorprese, quando gli si attraversò una difficoltà. I maggiori Stati vicini, gli Etoli ed i Lacedemoni, gelosi di quella nuova potenza nascente, la assalirono. A questo contrasto il fondatore della lega non era preparato. Ai Lacedemoni, veri soldati agguerriti e capitanati dal valente Cleomene, egli non poteva opporre se non masnadieri, sforniti di buone armi, quasi privi di cavalleria, e guidati da lui inesperto capitano. Arato co' suoi partigiani non resse in campo aperto, perdette le fatte conquiste, e la lega sarebbe perita se non richiamava i cacciati Macedoni. Dalla prima soggezione ai Macedoni conseguitò la seconda più servile ai Romani, e da questa l'ultima catastrofe del Peloponneso; la lega adunque, non potendo bastare a sè, si salvò allora e di poi si conservò al carissimo

prezzo della sua indipendenza, che è il primo e massimo bene d'una nazione. Per li Peloponnesii meglio valeva rimaner separati, ma indipendenti, liberi e Greci, che non confederarsi per divenir poi vassalli e quindi veri sudditi dello straniero. Arato invitando lo straniero fu più Acheo, che Greco, anzi fu Sicionio ed egoista ambizioso di mantenersi nel comando; al fratello Lacedemone preferì il barbaro Macedone, anzi che cedere a Sparta il primato della lega da lui creata, tradì il suo disegno, tradì la nazione, vendette la sua e l'altrui indipendenza; morì avvelenato da Filippo.

Chiamando i Macedoni aveva egli voluto far getto dell'indipendenza nazionale? Quando nel calore d'un impegno municipale si invita lo straniero, non si bada mai alla probabilità di perdere l'indipendenza; si spunti anzi tutto l'impegno, così si dice, e si allontani il pericolo presente, al futuro si provvederà e l'indipendenza sarà conservata. Così ragionava Arato; così ragionavano Spartani, Ateniesi, Beoti, Argivi ed i Greci tutti, quando a gara invitavano il re Persiano ad intervenire nelle loro gare; e così ragionarono tutti gli Stati e le città d'Italia, e lo stesso Dante, quando invocavano gli uni contra gli altri Cesare, Francia e Spagna. Niuno intendeva di rinunziare all'indipendenza, tutti speravano che la salverebbero. Quando poi è perduta, si confessa almeno l'errore? Oibò, vedremo fra breve che Polibio, ammiratore d'Arato, gettava ogni colpa sulle due fazioni a lui contrarie.

Filopemene, che raccolse l'eredità d'Arato, volle educare alla milizia gli Achei, ma l'ottimo suo divisamento non trovò riscontro se non nelle anime generose, che sono sempre poche; gli Achei, come scrive Plutarco, già si erano avvezzati a farsi salvare dagli altri. Come militare, Filopemene rese eminenti servigii alla patria. Come politico, fu capo di quella parte Achea, che voleva trattar da uguale con Roma, obbligandola a rispettare lo Statuto Acheo ed i decreti dell'assemblea. Come continuatore del disegno d'Arato, aggregò per forza Sparta alla lega, così con un decreto unì i due popoli i più incompatibili, i più antipatici fra loro, antichi e sfidati nemici reciproci. I Lacedemoni non tardarono a ribellarsi contro alla forza che non obbliga, ed egli irritabile, severo ed Acheo rabbioso li maltrattò negli averi, nelle persone, nel territorio e nell'onore; così nel seno della lega introdusse un nemico irreconciliabile, che fu un vero dissolvente tanto più efficace, quanto più protetto dai Romani. Sparta accusatrice assidua degli Achei presso il Senato fu una delle cause principali che rovinarono la lega.

Licorta fu più prudente. Vindice dell'assassinio di Filopemene soggiogò i Messenii, punì pochi caporioni, ma non maltrattò la nazione.

Di Callicrate e di Critolao, cioè delle due fazioni estreme, sorte per l'intervento dello straniero, parlerò fra breve.

Conchiudo questa parte dicendo, che la lega Achea ristretta entro moderati limiti avrebbe potuto felicemente formarsi e durare, ma estesa all'intero Peloponneso incontrò due opposizioni, quella degli Stati vicini gelosi e minacciati, e quella dei Messenii e massimamente dei Lacedemoni ripugnanti alla fusione. Per superare le due opposizioni era necessaria la forza, ma l'Acaia ne era sfornita; ricorse però allo straniero, e lo straniero la rese suddita.

Inoltre al compimento del disegno d'Arato ostava la qualità del suo governo. Imperocchè nel condurre una vasta impresa di conquiste e di riforme passa una gran differenza tra una monarchia ereditaria od un corpo aristocratico permanente, e tra un governo individuale massime se democratico. Infatti il monarca che tramanda nella sua dinastia un regno temperato, il corpo conservatore che intero non muore mai, avendo davanti sè secoli e secoli di vita, procedono rispettivi, aspettano le opportunità ed i benefizii del tempo, lasciano che una conquista od una riforma si radichi prima di passare ad un'altra. Così il Senato Romano in sei secoli conquistò l'orbe, così le odierne dinastie di Francia, di Spagna, d'Inghilterra formarono per lente ma continue conquiste Stati amplissimi, e cangiarono gli ordini del medio evo. Laddove un individuo, non avendo che pochi lustri di vita e niun certo successore dopo di sè, non dà tempo al tempo, tutto precipita, troppe cose inizia, poche ne compie, niuna ne assoda, irrequieto travolge sè di moto in moto, e dopo avere con ardor febbrile logorato sè ed i popoli muore. Ad Arato chi succederà? Nè il foro, nè la Sinclelo della federazione, non erano corpi conservatori, perchè amendue affatto popolari; epperò gli eredi d'Arato altri essere non potevano che i suoi amici politici. Ma questi nuovamente erano individui, poi, quel che è peggio, uguali fra loro, epperò facili a dividersi o per ambiziosa rivalità nell'occupare il potere, o per varianti nel dirigere il comune sistema politico. Infatti, morto Arato, la parte Acheo-Macedone si mantenne nella Strategia, ma divisa in moderata e veemente, poi si separò rimanendo l'una Macedone e l'altra propendendo verso Roma. Questa ebbe il sopravvento, ed allora si suddivise in Acheo-Romana e Romana pura. I soprusi di Callicrate ligio ai Romani ricondussero per riazione al

governo la parte pura Achea, ma forsennata come sempre nelle riazioni, e la lega però. Il governo instituito da Arato era sommamente democratico, dominato da lui, senza un corpo conservatore delle massime e continuatore delle imprese; Arato però fu un avventuriere, una meteora.

Parimente quali furono i successori di Pericle? Niun governo si potrà mai citare più maraviglioso di quello di Pericle, che, al dir di Tucidide, fu monarca in un popolo libero. Ma per giungere alla monarchia atterrò in Cimone ed in Tucidide la parte aristocratica, ridusse l'Areopago alle sillabe d'un nome glorioso, allargò la democrazia concentrando nel popolo i tre poteri, ma egli autore della tirannide popolare, egli colla potente sua mano frenava e guidava il popolo, e regnava nel foro come l'Olimpio frai turbini. Morì il monarca, e, l'Areopago giacendo esautorato, i successori altri esser non potevano che individui, e questi, sono parole gravissime di Tucidide (1), *uguali fra loro* ma tutti aspiranti alla monarchia; furono però Eucrate, Callia, Cleone, Cleofonte, Iperbolo (2) e simili demagogi che rovinarono lo Stato.

Quando per mancanza d'un corpo conservatore e direttore lo Stato è governato non da massime, ma da individui privi di credi necessarii, allora tutto è variabile secondo le contingenze sì interne dei cervelli dei varii guidatori, delle loro rivalità e delle sette, e sì esterne degli altri Stati solleciti a fomentare le discordie per usufruirne. In tanta instabilità non è possibile di condurre a fine e di assodare una grande impresa, che richieda perseverante costanza, prudenza e tempo. Tal era la condizione dello Stato costituito da Arato.

18.° Confutazione del giudizio di Polibio. Chi fu Polibio.

Dal giudizio da me sinora dedotto dai fatti discorda quello di Polibio: *Nei passati tempi*, egli dice, *molti avevano tentato di unir fra loro i Peloponnesii, ma niuno ne era venuto a capo, perchè tutti miravano assai più ad accrescere il proprio Stato, che non a stabilire una libertà comune. Ma ai tempi nostri questa unione fece tali progressi ed ebbe tale compimento, che i Peloponnesii nelle loro relazioni non solamente ebbero consorzio d'alleanza e di amicizia, ma ancora uniformità di leggi, di*

(1) Tucidide II. 65.

(2) Scoliaste d'Aristofane *Ranae* 693. *Equites* 1301.

pesi, di misure, di monete, come pure di magistrati, di consiglieri e di giudici; di guisa che all'intero Peloponneso per formare una sola città mancò solamente che una stessa cerchia ne cingesse tutti gli abitanti. Tutto il restante sì nel governo comune, e sì nelle singole città era uniforme e lo stesso ..... L'Acaia ragguagliata agli Arcadi ed ai Laconi era pure inferiore per popolazione e per territorio, ora come mai avvenne che questi popoli e gli altri del Peloponneso si reputavano ben avventurati di partecipare al governo ed al nome degli Achei? ..... La causa, per mio avviso, fu il sistema e l'instituzione sincera di uguaglianza, di libertà e di vera democrazia, che regnava presso gli Achei. Dei Peloponnesii gli uni abbracciarono spontanei questo sistema, altri vi si accostarono per ragionata persuasione, ed altri, che per forza vi furono costretti, non tardarono a rimanerne contenti. Imperocchè, siccome i fondatori non si erano riservato alcun privilegio, ma accomunavano ogni cosa a coloro che a mano a mano vi si aggregavano, il sistema mediante l'uguaglianza e la filantropia raggiunse il suo scopo..... Tal sistema di concordia fu iniziato da Arato Sicionio, fu promosso e compiuto da Filopemene Megalopolitano, fu confermato e mantenuto ancora per qualche tempo da Licorta e da' suoi amici politici (1). Altrove poi Polibio venendo alle cause del decadimento scrive: *Sinchè Filopemene e Licorta governarono la somma delle cose, la lega Achea trattava in qualche modo* [κατὰ ποσὸν] *da uguale gli affari con Roma e prendeva incremento; ma l'audacia di Callicrate iniziò il decadimento. Imperocchè i Romani, essendo umanissimi, magnanimi e di oneste intenzioni, commiserano tutti che sieno caduti, e si adoperano per sollevare chiunque ad essi ricorra; se alcuno poi, osservando fede, li faccia avvertiti che offesero gli altrui diritti, tosto si ravvedono, e per lo più correggono a lor potere se medesimi.* E prosegue a dire che Callicrate adulatore dei Romani contrastando a Filopemene anteponeva i loro voleri all'osservanza dello statuto e delle leggi. Da ultimo Polibio accusando Dieo, Damocrito e Critolao, autori degli insulti contro all'onore ed alla vita dei legati Romani, narra che dalla mitissima Roma venne legato Aurelio col mandato di fare blande rimostranze agli Achei, e di esortarli con benevole parole a non lasciarsi traviare da consiglieri scapestrati. Dopo Aurelio venne Sesto Cesare, ed in Egio tenne tal moderatissimo discorso, quale

(1) Polibio II 37-40.

appena avrebbe tenuto il più benigno degli Achei. Ma Dieo, Critolao e compagni, uomini pessimi, esosi agli Dei, peste della nazione, governanti inetti e pravi prendevano colla sinistra quanto i Romani lealmente offerivano colla destra; tutto interpretavano alla peggio nei furibondi loro discorsi, e terminarono per romper a Roma una guerra scellerata. Costoro consapevoli dei loro delitti neppur immaginar potevano che ne avrebbero ottenuto il perdono dalla generosità Romana; e come mai in altri avrebbero supposto una virtù, che essi non conobbero mai? Alla demenza ed al furore di questi governanti si oppose ingegnosamente la fortuna propizia; gli Achei nella prima battaglia furono sconfitti, e così felicemente salvati (1).

Tal è il giudizio, che Polibio portava della lega Achea. Io tralascio l'uniformità di pesi, di misure, di monete e di magistrati, tutti segni d'un'unità esterna, e dico che tra i Lacedemoni e gli Achei, per tacere dei Messenii, l'unità interna ossia la concordia [ὁμόνοια] vantata da Polibio non esistè giammai siccome consta dalla storia, nè esistere poteva tra due popoli, che le instituzioni, il tempo e la storia avevano formato divergenti nelle idee, nei sentimenti, nei costumi, nelle abitudini e negli interessi. Non è vero che i Lacedemoni, stati dalla forza costretti ad inscriversi nella lega, sieno poi rimasti contenti; al contrario essi sempre sotto l'unità apparente covarono l'astio e la vendetta, che scoppiò prima in ribellione, poi in una pertinace opposizione presso il Senato Romano. Epperò quando Polibio, accennando all'aggregazione della Laconia, scrive che Filopemene *promosse e compì* il sistema di concordia, dobbiamo dire che Polibio si contentasse dell'unità materiale, giacchè la morale non esisteva, anzi la Laconia fu uno dei dissolventi della lega.

Venendo poi alla principale causa del decadimento della federazione Achea, Polibio la attribuisce a Callicrate, poi a Dieo e Critolao. L'accagionare un solo uomo d'una gran mutazione politica è un metodo assai comodo, ma è sempre falso. Imperocchè quell'uomo non è che il principale rappresentante di altri uomini, che formati dalle medesime circostanze si indussero a professare la stessa opinione politica, e formavano così la forza di lui, che solo non bastava ad innovare. Ora chi mai formò Callicrate adulatore dei Romani? Furono i Romani, che volevano fra gli Achei formarsi partigiani, e ne trovarono non uno, ma molti, perchè d'uomini ambiziosi e cupidi, ligii al potere dominante, niuna nazione non

(1) Polibio XXXVIII 1. 2. 4. 5. XL. 4. 5.

ebbe mai difetto. Il primo più audace si chiamava Callicrate, ma gli adulatori subalterni furono tanti quanti nelle assemblee generali votavano in favore di Callicrate contro a Filopemene e Licorta. Parimente chi mai formò Dieo e Critolao? La riazione contro a Callicrate ed ai Romani, e le riazioni sono tanto necessarie quanto il riflusso dopo il flusso. Se adunque Callicrate, Dieo e Critolao furono formati dai Romani, ossia dall'intervento straniero, perchè mai Polibio non risalì a questa causa prima? Perchè la approvava. Infatti mentre Plutarco sì nella vita d'Arato e sì in quella di Cleomene con acerbe parole vitupera Arato per aver invitati i Macedoni, Polibio narrando per filo i negoziati d'Arato con Antigono, ed il suo destreggiarsi con gli Achei, ne ammira la felice accortezza, ma non ha parola non sillaba alcuna di biasimo contro al suo corifeo politico. Egli poi per più ragioni approvava la chiamata de' Macedoni e quella consecutiva de' Romani. Ammiratore di Arato e di Filopemene e figlio di Licorta venerava i loro consigli e fatti politici. Svisceratamente addetto alla parte Achea professava riconoscenza allo straniero, che aveva sorretto la cadente lega, e per lunghi anni aveva lasciato che la parte Achea dominasse nello Stato; laddove Callicrate fu quegli, che la esautorò e ne bandì ben mille dei caporioni. Bensì Roma talora trattava gli Achei come inferiori, tuttavia non impediva che la lega estendesse il suo dominio su nuove contrade e segnatamente sulla rivale Laconia; poi Roma, al dir di Polibio, magnanima e leale così da ritrattarsi all'uopo, permetteva di esser trattata quasi da uguale [κατὰ ποσὸν] dalla lega, e la quasi uguaglianza bastava alla parte Achea, purchè ella dominasse. Dovecchè Callicrate fu quegli che assoggettava l'Acaia a Roma, patrocinava gli odiati Lacedemoni, tutelava i Messenii ed accusava in Roma la parte di Filopemene e di Licorta. Quindi le ire di Polibio contra Callicrate. Quando poi Polibio scriveva la sua storia dopo l'incendio di Corinto, egli era sinceramente devoto ai Romani. La sua devozione cominciò stando esule in Roma, crebbe per l'amicizia con Scipione, e fu coronata dai dieci legati Romani, che avendo ridotto l'Acaia a provincia Romana lo deputarono ispettore generale (1).

Per tutti questi motivi egli doveva approvare l'intervento de' Macedoni, ed a miglior ragione quello de' Romani; doveva allontanare da questi ogni sospetto di conquista, anzi lodarli come benevoli alla lega, e lunganimi nel tollerare il demagogo Critolao, insino a che, dopo aver esaurito i mezzi

(1) Polibio XL. 10

per far rinsavire la plebe da lui sedotta, furono costretti a ricorrere alle armi. Pertanto Polibio scrivendo la sua storia, preoccupato dalla sua venerazione verso Arato, Filopemene e Licorta, poi dallo spirito della sua parte Achea, non che dalla devozione verso i Romani, quando venne ad assegnare la causa del decadimento della lega, non poteva scrivere altrimenti che dicendo: Sinchè la nostra parte tenne la somma delle cose la lega crebbe e prosperò, ma quando le due parti nostre avversarie ebbero l'una dopo l'altra il sopravvento, allora tutto andò in rovina. Callicrate adulatore de' Romani li ingannò, sebbene ottimi e magnanimi alleati, e Critolao talmente sedusse la plebe, che la rendette sorda alle conciliatrici proposte de' magnanimi Romani.

Così Polibio fedele nel riferire i fatti che narrava a' suoi contemporanei, doveva errare ed errò nel giudicarli e nell'assegnarne le cause. Acheo sviscerato inserì tal elogio della lega, che è un ditirambo smentito dalla storia, ma che ripeteranno sempre coloro, i quali per non darsi briga tolgono di peso gli altrui giudizii.

19.° Considerazioni generali sui tre governi federativi della Grecia.

Dopo avere esposti e giudicati partitamente i governi federativi della Beozia, dell'Arcadia e dell'Acaia, soggiungerò alcune osservazioni in gran parte comuni a tutti e tre.

Niun governo è così difficile ad ordinarsi come il federativo. Imperocchè due sovranità, la centrale e la particolare d'ogni Stato, si debbono mettere a fronte l'una dell'altra, e farle operare in due sfere, che comunque distinte non possono a meno d'incontrarsi con pericolo di collisioni. La sovranità dell'unione difficilmente si costituisce dotata della forza necessaria, perchè ogni Stato depone nel centro quanto meno può di sua sovranità particolare. Così il primo patto dell'Unione Americana sancito nel 1781 conferì così scarsa autorità al governo centrale, che questo dopo sei anni protestò di non poter governare, e chiese poteri maggiori. Inoltre la stessa sovranità difficilmente si conserva, perchè essere astratto ed opera di arte sta a fronte della sovranità d'ogni Stato, che cade tutto dì sotto i sensi, ed è naturale. Anche difficilmente può operare, giacchè debbe porre in moto una macchina composta di molte parti sovrane, e di molti congegni tutti liberi. Il sistema celeste è retto da due forze con giusta

misura librate da Dio; Dio le conserva, e le forze siccome prive di libertà non possono trasmodare. Laddove nel sistema federativo di Stati, che come astri girino nelle loro orbite distinte attorno al centro federale, la dovuta misura di forze è difficile a trovarsi, e vieppiù difficile a conservarsi, perchè le parti godono di libertà prevaricatrice, e vanno soggette alle incalcolabili contingenze del tempo novatore. Tuttavia il sistema, sebbene difficile, è possibile, e noi ne abbiamo esempii nella confederazione Svizzera, e nella Americana. Ma queste due unioni nacquero come frutto indigeno e si conservano grazie alle condizioni interne ed esterne delle due contrade. Laddove alle tre confederazioni Greche mancarono le une o le altre delle condizioni interne, e le esterne loro furono costantemente avverse.

Prima condizione interna si è la libera adesione delle città a confederarsi. Questa nella lega Beota mancava affatto, perchè comandata da Tebe e contrastata sempre dalle minori città. Mancava pure nella lega Arcadica iniziata da una fazione di Mantinea, che la impose a Tegea colle armi, col sangue e coll'esilio; ad essa i borghi aderirono per necessità, come le provincie tengono dietro alle capitali. L'unione Achea fu liberamente in sulle prime accettata, ma quando si volle colla forza imporre ai Messenii ed ai Lacedemoni, allora questi la turbarono e contribuirono a discioglierla. Affinchè poi le città spontanee aderiscano ad una federazione fa d'uopo che questa sia un bisogno generalmente provato, ed il bisogno si prova allorchè nell'unirsi grandi sieno i vantaggi, e piccola la perdita d'indipendenza. Come l'uomo nell'entrar in società vuol conservare quanto più può la libertà individuale, così gli Stati nel confederarsi vogliono ritenere la maggior ampiezza possibile d'indipendenza. Ma nella Beozia l'autonomia era nominale. Nell'Arcadia si violò l'indipendenza dei borghi obbligati ad emigrare, poi a rimanere mal loro grado in Megalopoli; inoltre le due fazioni rivali di Tegea e di Mantinea stabilirono fra loro una lotta, che teneva i borghi dipendenti da quella che a volta a volta occupava il comando. Nella sola Acaia l'autonomia regnava, e regnava pure l'uguaglianza, così che nel costituire il potere federale e nell'influire sulle deliberazioni dell'assemblea generale niuna città godeva di privilegii.

Quanto ai vantaggi promessi dalla federazione dico che debbono essere così sensibili che sieno facilmente intesi dalle moltitudini, e si possono comprendere nel maggior svolgimento delle arti di pace, donde nasce il ben essere, la tranquillità e la fiducia nell'avvenire. L'indipendenza da

tiranni o dallo straniero ha forza se essi opprimano i popoli sino a privarli d'una ragguardevole parte de'beni materiali; altrimenti è tal motivo astratto, che inteso dalle sole anime generose od ambiziose le spinge ad eccitare sommosse imprudenti, ma le moltitudini o poco vi partecipano, od alla lunga si stancano. Tal fu dell'Arcadia, dove quando l'una parte e quando l'altra rientrava sotto il primato politico di Sparta. Tal fu pure d'Argo. Era questa città caduta sotto tiranni, ed Arato dal suo odio teorico contro alla tirannia calcolando quello degli Argivi si mosse ed ingaggiò battaglia contra Aristippo sotto le mura della città, sperando che questa si moverebbe, ma i cittadini, scrive Plutarco, quasi non si combattesse per la loro libertà, stavano seduti tranquilli spettatori della pugna, perchè già avvezzi a servire volontariamente (1).

Insomma le tre leghe furono frutti artificiali e non naturali. Quella Beota fu un artifizio di Tebe per assoggettarsi la Beozia. Nell'Arcadia e nell'Acaia furono un sistema concepito da individui, e non nato spontaneamente dalle circostanze interne, epperò radicato nelle moltitudini. Cessato il primo entusiasmo destato con arte dai promotori, venne meno il concorso dei popoli a sostener la guerra.

Quanto alla medesimezza d'origine e di lingua, condizioni proclamate da' nostri ideologi come primi vincoli d'unione, io non solamente le escludo, ma volentieri le riporrei fra gli ostacoli; la Grecia intera e l'Italia ci provano il contrario. Il derivare l'unione degli animi dalle medesime qualità del sangue è già proposizione discretamente ridicola, ma cresce l'ilarità quando oggidì si vuol trovare il sangue o Giapetico, o Semitico, puramente disceso in noi per molte miriadi d'intemerate Penelopi. Inoltre perchè il sì ed il no escono da mille bocche articolati collo stesso suono, il pretendere che quei mille abbiano da concedere e da negare le stesse proposizioni, quasi che il suono articolato influisca sulle idee, ciò confina col delirio. Tebe e Platea, Tegea e Mantinea, Egio e Sparta, e diciamo pure Firenze e Pisa, Milano e Pavia, tanto più ferocemente combattevano in campo, quanto meglio fratelli per origine si erano collo stesso dialetto avventate calunnie, contumelie e villanie nel foro.

Prescindo dalle ragioni estetiche d'unione, solamente proprie dei romanzieri politici in versi ed in prosa. Quando Isocrate in Olimpia declamò il suo Panegirico per riconciliare i Greci fra loro, e confederarli

(1) Plutarco *Aratus* 25. 27.

contro al barbaro, l'uditorio lodò i tropi e le figure, il cozzar de' tribrachi coi lenti spondei, e la musica de' periodi sonanti, poi, finita la melodia, ritornarono tutti a lacerarsi meglio di prima. Il Panegirico rimase solamente nella storia dell'arte come un modello plastico, non altrimenti che il celebre sonetto all' Italia del Petrarca; egli tuttavia ebbe cura di riparare la riputazione del suo senno politico sotto quelle parole *benchè il parlar sia indarno.*

Venendo ora alle condizioni esterne io vedo durare la confederazione Svizzera, perchè gli Stati vicini la vogliono, e dichiararono neutrale la contrada. Vedo l'Unione Americana mantenersi, perchè, scrive il Tocqueville *placée au centre d'un continent immense, où l'industrie humaine peut s'étendre sans bornes, l'Union est presque aussi isolée du monde que si elle se trouvait resserrée de tous côtés par l'Océan . . . Le grand bonheur des États-Unis est . . . d'être tellement situés, qu'il n'y a pas pour eux à craindre de grandes guerres. Nul ne saurait apprécier plus que moi les avantages du système fédératif . . . mais je me refuse à croire que de peuples confédérés puissent lutter long temps, à égalité de forces, contre une nation où la puissance gouvernementale serait centralisée* (1). La divisione della sovranità che governa ed amministra, mentre è la condizione principale d'un governo federativo, è pure la causa potissima della sua debolezza in guerra. Infatti la guerra richiede poteri concentrati in pochi ed anche in un dittatore, li vuole sommi per provvedere ai bisogni urgenti ed impreveduti, dai cittadini poi esige obbedienza straordinaria e sacrifizii delle persone e degli averi; così che la guerra, se vuol riuscire a buon fine, dee sospendere i principali benefizii del sistema federativo. Èpperò l'iniziare una federazione collo scopo d'intraprendere una lunga guerra è un errore, perchè si dee tosto sospendere ciò che si era iniziato. Città, che sieno veramente oppresse dalla metropoli o dallo straniero, si uniscono spontanee a guerra con un'alleanza unicamente militare; ottenuta poi la vittoria, allora solo pensano a combinare l'intricato meccanismo federativo, e ne scrivono lo statuto. Così avvenne nella Svizzera e nell' Unione Americana.

Laddove gli Stati Greci commisero l'errore di creare patti federativi appunto per fare lunghe guerre. La Beozia, l'Arcadia e l'Acaia, collocate fra vicini gelosi di vederle levarsi a potenza per mezzo di federazioni,

(1) Tocqueville *Démocratie en Amérique* t. II. pag. 28 sq. edit. Bruxelles.

sempre furono da essi osteggiate con doppia guerra, con quella dell'armi, e con quella della discordia interna; in amendue rimasero perdenti. Nella prima perchè erano deboli in grazia del governo non concentrato in un vigoroso potere, quindi per reggersi sempre ricorsero allo straniero. Nella seconda furono travagliate da ogni maniera di dissensioni interne, che i vicini facilmente suscitavano in quei molti consigli particolari delle città e generali dello Stato. Per vincere in questa seconda guerra Tebe ricorse al terrore, rovinando Platea e smantellando Tespie; vi ricorse pure Arato mettendo a morte quei Sicionii, che tenevano secrete intelligenze con Cleomene. Ma quando Arato già si accingeva a purificare collo stesso mezzo Corinto, allora la città si ammutinò, lo costrinse a fuggire, e si diede al nemico. Parimente la barbara maniera, colla quale Filopemene trattò Sparta, si volse a danno della federazione.

Il sistema federativo ottimo a riunire in un centro molte città ritrose a perdere la loro autonomia, è il peggiore de'sistemi che si possa immaginare per condurre a buon fine una guerra massime se lunga. Ottimo per isvolgere le arti di pace e principalmente il commercio è pessimo per amministrare una guerra con vigore, ed offre al nemico molti mezzi per seminare discordie fralle città federate (1). La guerra poi è inevitabile, se gli Stati vicini non aderiscano alla federazione.

Dallo scopo di guerra, che si proposero i tre governi federativi, nacque, come vizio necessario, la confusione dei poteri militari con quelli civili, che distinti per loro natura richiedevano pure distinte persone. Presidente della lega Achea era lo Stratego, ossia il capitano supremo, ma Arato quanto più era destro ne'maneggi politici, tanto peggio capitanava un esercito in ordinata battaglia. All'incontro Filopemene, egregio ordinatore della milizia e valente capitano in campo, era per la sua natura pervicace, contenziosa e collerica (2) mal adatto a trattare le cose civili. La congiunzione del potere civile col militare nella prima persona dello Stato appartiene a que'tempi antichi, ne'quali tutti i cittadini militavano, e l'arte strategica vagiva bambina; epperò anche a Roma i Consoli ne'primi secoli guidavano l'esercito contro ai vicini. Ma quando i Romani ebbero a lottare con Annibale, con Cartagine e con altre nazioni progredite nelle cose

(1) Non si può capire come il Montesquieu *Esprit* IX. 1 chiami la repubblica federativa *une constitution, qui a tous les avantages intérieurs du gouvernement républicain, et la force extérieure du monarchique.*

(2) Plutarco *Comparatio T. Flaminii et Philop.*

militari provvidero altrimenti. Taccio che ne' casi supremi Roma ricorreva ad un dittatore. Dovecchè gli Achei dovendo far oste contro ai Macedoni ed agli Spartani prestanti nelle cose di guerra stabilirono che Arato fosse un capitano; poi dovendo destreggiarsi coi Romani deliberarono che Filopemene fosse un uomo politico. Avvenne però che or le cose militari ed or le civili andassero alla peggio.

L'ultima osservazione mi viene suggerita da queste gravi parole di Pausania: *Al tempo de' Romani la Grecia corrotta nelle sue parti era caduta in una totale debolezza ..... Quando a stento la lega Achea germogliava dalla Grecia quasi ramo da albero viziato, anche questa lega fu dalla malvagità de' suoi Strategi troncata mentre cresceva* (1). Il ramo pareva sano e promettente, ma l'albero era viziato, la Grecia in tutte le sue parti era corrotta. Mancavano gli antichi sentimenti religiosi, perchè la teogonia dell'Olimpo era stata confutata dalla filosofia e dalla civiltà progredita. Mancavano i sentimenti morali, perchè erano stati contraddetti in teorica dai sofisti ed in pratica dalla politica terrena intenta alla sola prosperità materiale, ossia all'utile. Mancava l'operoso amor di patria, ed i mercenarii erano sottentrati invece dei cittadini dediti al lusso ed ai godimenti della vita. Il solo governo possibile era od il democratico spinto all'assoluto potere del popolo, ovvero il tirannico. Imperocchè le fazioni cittadine nel lungo lottare fra loro si erano a gara servite del popolo eccitandolo a sommosse, ed il popolo volendo essere ricompensato aveva ottenuto sempre più ampii poteri, insino a che tutti li concentrò, come già gran tempo prima in Atene. Se non che in alcune città qualche demagogo più scaltro degli altri, levandosi sulle spalle del popolo, usurpò il comando, ed infatti Argo, Sicione, Ermione, Fliasia, Megalopoli ed altre prima di Arato ubbidivano a tiranni. La solita ricompensa poi che il popolo desiderava era quella dell'abolizione dei debiti e della distribuzione dei terreni, ed infatti la Laconia la ottenne da Cleomene, e l'Acaia impetrò la sospensione dei debiti dal demagogo Critolao (2). In tali governi a qual partito si appigliava la parte sana e moderata dei cittadini? Riputandosi incapace a correggere la presente condizione delle cose si asteneva dal foro e dai pubblici uffizii, e si iniziava all'indifferenza suggerita dalla stanchezza prodotta dalle continue rivolture. Disperata di

(1) Pausania VII. 17. 1.
(2) Polibio XXXVIII. 3.

ottenere uno stato migliore di cose si abbandonava a godersi la vita, pronta ad accettare anche lo straniero, purchè frenasse o l'anarchia popolare od i tiranni.

Così, spento ogni benigno lume del cielo e della morale, intiepidita la carità di patria, caduta la milizia, stabilita l'anarchia popolare o la tirannia del governo, ed allontanata dal maneggio degli affari la parte moderata divenuta indifferente, uno Stato è profondamente corrotto. In tal depravazione universale sorge bensì qualche anima intemerata, come quella di Arato, per tacere degli ambiziosi e degli ideologi, ma per attuare i suoi generosi concetti le manca un appoggio. Arato, che si fondava sul popolo, dovette adularlo nella sua corruzione, e chiamare poi lo straniero a salvare il popolo, che ricusava di salvarsi da sè. Filopemene, che tentò di correggere il popolo obbligandolo a farsi soldato, non vi riuscì, e per la sua sgradita severità raramente fu nominato Stratego. I soli demagogi Dico, Damocrito e Critolao poterono governare, concedendo alla plebe quanto desiderava, ma trassero a rovina lo Stato. Anche Roma negli ultimi anni della repubblica era corrotta per ogni altro rispetto, ma possedeva ancora una buona milizia; per questa conservò la sua indipendenza, anzi ampliò lo Stato. Quando poi Roma non ebbe più milizia propria, allora l'impero fu invaso via via dagli stranieri. Ma la milizia mancava alla Grecia, giacchè gli eserciti, composti in gran parte di mercenarii, non uscivano se non accompagnati da mimi, da prestigiatori, da cantatrici, da saltatrici dissoluti ed insolenti (1). La Grecia corrotta, perchè priva della forza morale e militare, tanto meno doveva cercare nel sistema federativo uno schermo a' suoi mali, quanto più tal sistema richiedeva virtù per mantenersi nell'interno, e richiedeva poderosa milizia per reggersi nelle guerre contro ai vicini; la Grecia doveva cadere ed infatti cadde sotto la dominazione straniera.

---

(1) Plutarco *Cleomenes* 12.

INDICE

1. Annunzio e circoscrizione dell'argomento. Modo di trattarlo ..... pag. 75

PARTE PRIMA

LA FEDERAZIONE TEBANA

2. Statuto della federazione ..... » 77
3. Storia della federazione ..... » 80
4. Deduzioni. Lo statuto inventato da Tebe, non acconsentito dalle città Beote. Scopo di Tebe ..... » 85
5. Giudizio sullo statuto, e considerazioni sulla federazione ..... » 86

PARTE SECONDA

LA FEDERAZIONE ARCADICA

6. Origine della federazione, e suo statuto, sotto la protezione de' Tebani » 88
7. La federazione vuol fare da sè ..... » 91
8. Divisioni intestine ..... » 95
9. Considerazioni ..... » 96

PARTE TERZA

LA LEGA ACHEA

10. L'Acaia e la sua storia ..... » 98
11. Origine della lega ..... » 100
12. Statuto ..... » 101
13. Giudizio sullo statuto ..... » 115
14. Storia della lega ..... » 116
(*a*) La lega fa da sè ..... » ivi
(*b*) Arato richiama i Macedoni già da lui cacciati. Giudizio di Plutarco » 117
(*c*) I Macedoni dominano la lega. Chi fu Arato ..... » 120
(*d*) Chi fu Filopemene. Ammirato ma non secondato dagli Achei . » 123
(*e*) La lega fa alleanza coi Romani, e si divide in due parti, Achea e Romana ..... » 125
(*f*) La parte Romana guidata da Callicrate prevale, e caccia in esilio mille della parte Achea ..... » 127
(*g*) La parte Romana ognora più servile ..... » 129
(*h*) La parte Achea estrema prevale, è sconfitta dai Romani. Fine della lega ..... » 130
15. Sparta non mai si era sinceramente acquietata alla lega ..... » 133
16. Neppur la Messenia. Errore di Polibio ..... » 137
17 Giudizio sulla lega Achea ..... » 138
18. Confutazione del giudizio di Polibio. Chi fu Polibio ..... » 141
19. Considerazioni generali sui tre governi federativi della Grecia ..... » 145

SCHIARIMENTI

ALLA

FILOSOFIA CARTESIANA

DEL PROFESSORE

GIOANNI MARIA BERTINI

Memoria approvata nell'adunanza del 6 giugno 1858.

Scopo della presente scrittura è di chiarire alcuni punti della dottrina Cartesiana, e mostrare in essa i germi del sistema panteistico di Benedetto Spinoza. A tale effetto m'è d'uopo innanzi tutto di delineare per sommi capi il processo della speculazione di Cartesio.

Dalla moltiplice erudizione può nascere in due maniere il bisogno di filosofare, cioè 1.° in quanto che le molte e varie conoscenze che si posseggono, comparandosi e coagitandosi per così dire nella mente, la conducono a formarsi certi concetti, a ricercare certi principii comuni, a proporsi certe questioni universalissime, la cui soluzione appartiene alla filosofia. 2.° In quanto che dalla moltiplicità e divergenza delle dottrine, dalle parti dubbie e controverse che in ciascuna di esse si trovano, suol nascere lo scetticismo, dal quale lo spirito umano non si può liberare in altro modo che col filosofare. Cartesio, come egli racconta nel suo discorso sul metodo, fu condotto alla filosofia in questa seconda maniera. Tutta la sua propedeutica alla filosofia si riduce a questi due punti: dubbio, o per dir meglio, ignoranza metodica riguardo a tutto il sapere antecedentemente appreso; – fede provvisoria in alcune verità di questa scienza medesima, la qual fede è una condizione indispensabile per continuare a vivere filosofando. Coloro che diedero taccia a Cartesio di aver rotto il filo del sapere tradizionale con questa sua propedeutica,

non considerarono che questa è inevitabile e non è propria soltanto della filosofia, ma comune a tutte le altre scienze. Ogni uomo, che imprende lo studio di una scienza, riguarda come ignorate ed incerte, od almeno lascia in dimenticanza tutte le cose che egli o per senso comune, o per una imperfetta istruzione precedente già conosceva di quella scienza. Si può dire perciò che egli professa intorno a quelle un dubbio, od una ignoranza metodica, in quanto che ogni certezza ed ogni sapere è una dubbiezza ed una ignoranza, quando lo si considera in relazione con una certezza ed un sapere di grado superiore, circa il medesimo oggetto. Ma frattanto, siccome ogni uomo, mentre studia una scienza qualsiasi, non può in quell'unico studio restringere tutta la sua vita, ma convien pure ch'egli viva, operi e senta umanamente, e ciò non può fare, se non considerando praticamente come vere molte notizie la cui verità non gli è ancora dimostrata teoricamente, è facile comprendere come la fede provvisoria sia condizione indispensabile allo studio di ogni scienza.

Dichiarerò il mio pensiero con qualche esempio. Prima di accingersi a studiare la geometria ordinatamente e per principii, lo studioso già possiede per lo più molte notizie geometriche acquistate o per una cotale intuizione, o per via d'esperienza, o per via di tradizione. Egli saprà per es. che la perpendicolare è più breve d'ogni obliqua ad una stessa retta, e in molti casi pratici si sarà governato secondo questo teorema. Se è un artigiano, conoscerà ancora probabilmente la soluzione di varii problemi di geometria. Ma potrebbe egli mai assumere alcuna di queste notizie anticipate, come principio logico, come punto di partenza nello studio regolare ed esatto ch'egli intende fare della scienza? No certamente. Egli anzi le dimenticherà, o le riguarderà come incerte, finchè dalla serie delle dimostrazioni non verrà condotto a riconoscerle vere. Ma frattanto dovrà egli trascurarle nella pratica, e dovendo, per eseguire qualche lavoro dell'arte sua, inscrivere per es. un esagono regolare in un circolo, vorrà egli determinarne il lato ad arbitrio, sotto il pretesto che non gli si è ancora dimostrato che questo lato è eguale al raggio del circolo circoscritto? No certamente. Ecco adunque come il dubbio metodico e la fede provvisoria possano aver luogo anche nello studio della geometria, e come queste due disposizioni di spirito, che sembrano escludersi come contraddittorie, s'acconcino insieme ottimamente nell'animo d'uno stesso uomo. La meccanica, la logica, la morale ci potrebbero somministrare molti altri esempi in conferma di questo medesimo vero.

La ragion principale per cui Cartesio mise in dubbio tutto quel complesso di credenze che costituiscono la coscienza volgare fu che un tale complesso non è già il prodotto della ragione pura, ma di innumerevoli cause esterne ed interne, che influiscono nella nostra educazione intellettuale. *Quoniam infantes nati sumus et varia de rebus sensibilibus iudicia prius tulimus, quam integrum nostrae rationis usum haberemus, multis praeiudiciis a veri cognitione avertimur, quibus non aliter videmur posse liberari, quam si semel in vita de iis omnibus studeamus dubitare, in quibus vel minimam incertitudinis suspicionem reperiemus (Princ. phil. p. I. n.° 1. cf. Discours de la méthode, p. 2. init.).* Le fonti da cui Cartesio derivò i suoi argomenti per dubitare d'ogni credenza sono: 1.° la fallacia dei sensi. 2.° Gli errori in cui s'incorre talvolta anche ragionando intorno a cose evidentissime. 3.° L'impossibilità di trovare un criterio valevole a discernere lo stato di veglia e di mente sana dallo stato di sogno e di delirio. 4.° L'onnipotenza di Dio, la quale pare estendersi fino a poter creare uno spirito destinato ad avvolgersi in una cerchia fatale d'illusioni.

Rivolgendo questi argomenti contro lo scibile umano, Cartesio trovò un solo punto che reggesse inconcusso ad ogni sforzo dello scetticismo, e questo è la proposizione *io penso*. Affermando il mio pensiero non posso ingannarmi, poichè lo stesso ingannarsi è una maniera particolare di pensare. Dal fatto del pensiero egli argomenta quello della propria esistenza mediante il noto entimema: *cogito, ergo sum*. A questo proposito si obbiettò a Cartesio che nell'argomentare in tal guisa egli presupponeva il principio generale: *quidquid cogitat existit*, e mancava così al suo proponimento, di stabilire tutto lo scibile umano sulla certezza di fatto del *cogito*. Poco felice, a dir vero, si mostrò il filosofo nel risolvere questa difficoltà. *Neque etiam*, rispondeva egli (Resp. ad 2.as obb. p. 74), *cum quis dicit: ego cogito, ergo sum sive existo, existentiam ex cogitatione per syllogismum deducit, sed tamquam rem per se notam simplici mentis intuitu agnoscit, ut patet ex eo quod si eam per syllogismum deduceret, novisse prius debuisset istam maiorem: illud omne quod cogitat est, sive existit: atqui profecto ipsam potius discit ex eo, quod apud se experiatur fieri non posse ut cogitet, nisi existat.* Ma se l'esistenza del soggetto pensante è una verità d'intuizione più che di raziocinio, perchè tanto affaticarsi a stabilirla sul fatto del pensiero? perchè incominciare la filosofia dal *cogito*, e non piuttosto dal *sum*? E che

altro può significare la congiunzione *ergo*, che unisce le due proposizioni, se non una connessione logica fra l'una e l'altra? E come è possibile una connessione logica fra due proposizioni particolari, senza un principio generale? Ma non è pregio dell'opera l'insistere su questa critica; le parole testè citate sono una di quelle tante incoerenze che s'incontrano negli scritti del nostro filosofo. Il vero pensiero di Cartesio, pensiero che egli mai non giunse a padroneggiare e ad esprimere compiutamente, ma che traluce da varii passi, e si connette con altri principii del suo sistema, è piuttosto il seguente: l'illazione *existo* non è l'affermazione dell'esistenza di un soggetto, il quale, fra le altre proprietà di cui gode, fra le altre attività che egli esercita, abbia pur quella di pensare, ma è l'affermazione di un soggetto di cui tutta l'essenza sta nel pensiero. *Intellexi*, dic'egli (De meth. p. 29), *me esse rem quamdam sive substantiam, cuius tota natura sive essentia in eo tantum consistit ut cogitem.* E più chiaramente nella Medit. 2.ª *Cogitatio est, haec sola a me divelli nequit; ego existo, certum est. Quamdiu autem? Nempe quamdiu cogito. Nam forte etiam fieri posset, si cessarem ab omni cogitatione, ut illico totus esse desinerem (cf. Princip. phil. p. I. § 7).* La restrizione che egli appone all'*existo* dicendo *nempe quamdiu cogito*, ci mostra chiaro di quale esistenza voglia parlare: egli intende una esistenza, che tutta finisce nel pensiero, un'esistenza che non è altro che il pensiero sostanziato in se stesso. Quindi il suo famoso entimema era una tautologia, poichè non volea dir altro che *io penso, dunque esisto come pensante.* Che se lo si voglia trasformare in sillogismo coll'aggiungergli la maggiore sottintesa, questa maggiore non sarà già il principio universale: *ciò che pensa esiste*, ma piuttosto quest'altro: *pensare è esistere;* principio che Cartesio poteva ammettere senza punto violare la legge che egli, come dubitante, si era imposta. Infatti con un tale principio non si afferma già una sintesi fra l'attività del pensare e quella dell'esistere, come se fossero due attività diverse (affermazione che sarebbe un giudizio sintetico *a priori*, a pronunziare il quale il dubitante non ha ancora alcun diritto), ma si riduce ogni attività, ogni esistenza a quella del pensiero.

Con questo intendimento di Cartesio si connette strettamente la sua dottrina sulla essenza dell'anima. L'essenza dell'anima, secondo lui, sta nel pensiero. Anche questo suo pronunziato suscitò molte obbiezioni e diè luogo ad una discussione fra lui ed i suoi avversarii, la quale procedette molto intralciata ed oscura. Sarebbe però stato facile abbreviarla,

e rischiararla di molto, quando si fosse ridutta in forma logica rigorosa la dottrina Cartesiana intorno a questo soggetto. Questo è ciò che io mi sono studiato di fare, collo scopo di porre subito in chiaro il lato debole di sì speciosa dottrina. Essa si riduce in sostanza alla seguente argomentazione.

L'essenza di un ente è quella attività, senza di cui quell'ente non può nè esistere nè concepirsi, e posta la quale è posto tutto quanto è necessario perchè quell'ente esista.

Ora il pensiero è l'attività senza la quale l'*Io* pensante (che per Cartesio equivale ad *anima*) non può nè esistere nè esser pensato, e posta la quale nessun'altra attività più si richiede perchè il pensante esista.

Dunque il pensiero costituisce l'essenza dell'anima.

Il lato debole di questo sillogismo sta nella minore, e specialmente nella seconda parte di questa minore, cioè nella proposizione in cui si dice che posto il pensiero, nessun'altra attività più si richieda perchè il pensante (anima) esista, onde si deduce poi la conclusione che il pensiero, e nient'altro che il pensiero, costituisce tutta l'essenza dell'anima. Cartesio si accorse, ma oscuramente, che lì stava il debole della sua teoria, ed ha cercato in varii luoghi, indirettamente, di dimostrare quella proposizione. Qual valore abbiano le prove che egli ne adduce, apparirà più chiaro se noi le riduciamo in forma sillogistica, nel modo seguente:

Se un'attività diversa dal pensiero è necessaria all'esistenza del pensiero stesso, non può esservi necessaria se non in quanto quella attività sarebbe oggetto del pensiero; così per es. quella attività che dicesi estensione non potrebb'essere necessaria all'esistenza del pensiero dell'estensione, se non in quanto l'estensione sarebbe oggetto del pensiero, e si supporrebbe che il pensiero non potesse esistere senza la realità oggettiva ed estrinseca del suo oggetto.

Ma ogni tale supposizione è falsa, poichè l'esistenza del pensiero è indipendente dalla esistenza estrinseca ed oggettiva di tutti i suoi oggetti: così per es. il pensiero che ho del sole potrebbe esistere nella mia mente, quand'anche il sole non esistesse in *rerum natura*.

Dunque l'attività del pensiero è una attività assolutamente primitiva, sufficiente a se stessa, e bastevole a costituire tutta l'essenza dell'anima (1).

Il lato debole di questo sillogismo sta nella sua maggiore. Certo, quando

(1) Questo raziocinio trovasi in forma entimematica nella parte I dei Princip. §§ 7 e 8.

io rifletto sul mio pensiero, non veggo come esso derivi e dipenda da funzioni corporee: ma questo mio *non vedere* è forse una ragione bastevole per negare la sua derivazione e dipendenza dal corpo? Quando io rifletto sul me pensante, non vi trovo altro che il pensiero, ma è forse questa una buona ragione per affermare che non vi sia altro? – Questa difficoltà fu intraveduta da Cartesio: *Non sum compages illa membrorum, quae corpus humanum appellatur; non sum etiam tenuis aliquis aër istis membris infusus, non ventus, non ignis, non vapor, non halitus, non quidquid mihi fingo: supposui enim ista nihil esse: manet positio, nihilominus tamen ego aliquid sum. Fortassis vero contingit, ut haec ipsa, quae suppono nihil esse, quia mihi sunt ignota, tamen in rei veritate non differant ab eo me quem novi* (1). Ma a questo dubbio egli non risponde che con un *nescio, de hac re iam non disputo.*

Insomma il raziocinio Cartesiano riducesi a dire: io posso negare, cioè distruggere col pensiero ogni reale estrinseco ed oggettivo, e tuttavia il mio pensiero continuerà ad esistere; il mio pensiero è di tal natura che quando nega tutto, quando nega perfino se stesso, in quest'atto medesimo pone se stesso: dunque la sua esistenza è indipendente da ogni altra cosa e basta a costituire una essenza. – Dove si vede che l'errore sta nel confondere il *distruggere in pensiero*, col *distruggere in effetto*. Cartesio ragionò in modo analogo a quello di chi dicesse: io posso col pensiero supporre annientata l'aria che mi circonda: dunque posso vivere senza bisogno dell'aria.

L'error generale poi sta nel metodo. Gran matematico qual era Cartesio, desideroso di costruire il suo sistema filosofico sopra idee chiare e distinte, recò nella trattazione delle materie metafisiche le norme e le abitudini della geometria. Gli oggetti di questa scienza sono essenze astratte, perfettamente chiare e determinate, appunto perchè astratte. Per conseguire eguale chiarezza e precisione nella metafisica, Cartesio pose delle essenze astratte in luogo delle cose reali in cui la metafisica deve occuparsi: egli recise per es. dal pensiero ogni altra cosa, ne fece una essenza pura ed astratta, e la considerò come sostanziata in se stessa, cioè come compiuta, e sufficiente a costituire un essere. Lo stesso lavoro egli fece sulla estensione. Di guisa che il suo sistema riuscì un complesso di fantasie, che nulla ha di comune col mondo reale. Le sostanze che

(1) Medit. 2.ª

compongono il mondo reale sono forze varie, moltilateri, fornite ciascuna di una attività sua propria, di una fecondità inesauribile, connesse fra di loro in mille maniere. Nel mondo Cartesiano la cosa corre diversamente: le sostanze che lo compongono non sono altro che essenze semplici, astratte, ciascuna delle quali è sostanziata in se stessa, ed esiste indipendente e separata dalle altre. Non avvi fra loro alcun vincolo di efficienza reciproca ed immediata. Di qui derivavano due conseguenze: 1.° Che Dio è la sola vera causa efficiente di ogni mutazione che avvenga tanto nel regno degli spiriti, quanto in quello dei corpi. 2.° Che le cose finite non essendo altro che vane astrazioni che si considerano come sostanziate in se stesse, ne viene che esse sono affatto prive di propria ed intima energia, di vera vita, ed abbisognano in ciascun istante della loro esistenza di un atto creativo di Dio; onde era facile il conchiudere che come Dio è la sola vera causa, così è la sola vera sostanza.

Ma prima di mostrare come queste due conseguenze conosciute sotto il nome di dottrina delle cause occasionali, e della creazione continua, siano state svolte nella scuola di Cartesio, mi conviene far cenno delle sue idee sul criterio della certezza, le quali si connettono intimamente colle cose precedenti, e portano pure l'impronta dello spirito che governa tutto il sistema.

La dottrina Cartesiana sul criterio della certezza pare a primo aspetto varia ed incostante, e come tale fu acerbamente ripresa da alcuni suoi critici, e massimamente da Vincenzo Gioberti. Talvolta egli pone come criterio, e tipo e fondamento d'ogni certezza quel pronunziato che regge inconcusso ad ogni argomento scettico, cioè il *cogito*. Talvolta egli pone invece la percezione chiara e distinta: talvolta finalmente stabilisce la credibilità di questa stessa percezione sul dogma della veracità divina. Questa incoerenza è più apparente che reale: fra questi varii pronunziati avvi una connessione intima, che io mi studierò di porre in chiaro. A tale intento mi è d'uopo mettere ne' suoi veri termini la questione del criterio della certezza.

Il vocabolo *criterio* significa *mezzo per discernere*. Ora il mezzo per discernere le cose di un certo ordine da quelle dell'ordine contrario non può essere altro che un' idea, la quale si trovi realizzata nelle prime e non nelle seconde. Criterio della certezza, cioè mezzo per discernere i giudizii certi dagli incerti, è secondo Cartesio l'indubitabilità assoluta del giudizio, o per dir meglio, l' impossibilità di negarlo, senza affermarlo colla stessa

negazione. Per ritrovare un giudizio che sia fornito di un tale carattere, e che si possa prendere come tipo e fondamento d'ogni certezza, Cartesio procede per via di esclusione. I giudizii con cui si afferma l'esistenza oggettiva dei corpi, l'esistenza di Dio, non hanno questo carattere. In generale non può averlo nessun giudizio nel quale l'atto del pensiero si riferisca a cosa distinta dal pensiero. Il solo che ne sia fornito è il giudizio espresso col *cogito*. Questo è per Cartesio il punto che domandava Archimede col suo celebre *da mihi quo sistam*.

Il *cogito*, benchè sia un giudizio singolare, e non un assioma astratto e generico, può tuttavia servir di criterio universale, a quel modo che un pezzo di metallo, il quale con piena certezza fosse riconosciuto per oro, potrebbe servir di criterio a discernere universalmente il vero oro dal falso. Tutti i giudizii che riuniscono in sè i caratteri del *cogito*, o che si trovano con questo in tale connessione, che non si potrebbe negarli senza negare il *cogito*, si possono avere per certi. Ora tali sono appunto i giudizii che versano intorno ad idee chiare e distinte. Quindi derivava a Cartesio un nuovo criterio, cioè la percezione chiara e distinta. *Iam videor pro regula generali posse statuere, illud omne esse verum, quod valde clare et distincte percipio* (Medit. III, p. 15).

Ma anche la percezione chiara e distinta potrebbe essere fallace, nella supposizione che la nostra intelligenza fosse creata e dominata da un genio maligno, o dal capriccio del caso. Per liberare l'animo da questa apprensione fa d'uopo elevarsi alla conoscenza del principio supremo del nostro essere: *Mens . . . videt . . . se nullam habere posse certam scientiam, priusquam suae authorem originis agnoverit* (Princip. p. I, n.° 13). Nè il *cogito* adunque, nè la percezione chiara e distinta possono essere l'ultimo inconcusso fondamento d'ogni certezza: questo non può trovarsi se non nella cognizione dell'esistenza e della natura di Dio. Questa sola può legittimare la percezione chiara e distinta, che essendo un prodotto immediato e spontaneo della nostra natura, potrà aversi per verace e credibile solo allorquando sarà provato che l'Autore della natura non è un Ente fallace, ma un Dio fornito di una potenza e di una sapienza e di una bontà infinita.

Così Cartesio usciva dall'idealismo soggettivo in cui si era rinchiuso, e ritornando a quelle speculazioni ontologiche degli scolastici, a cui, per mantenersi fedele al suo metodo, avrebbe dovuto rinunziare per sempre, ricominciava di bel nuovo a meditare sulla esistenza e sulla

natura di Dio. Nelle dimostrazioni che egli ne dà ritroviamo molte reminiscenze scolastiche. I suoi argomenti si riducono a due: il primo è fondato sul principio di causalità applicato alle idee, le quali vengono considerate come altrettanti effetti della realtà a cui corrispondono. Ogni idea si può considerare sotto due rispetti, cioè 1.° come un modo dell'attività cogitativa del soggetto: 2.° come rappresentativa di una cosa fornita di un certo grado di entità. Sotto il primo rispetto tutte le idee sono eguali, non essendo altro che modificazioni del soggetto pensante: ma sotto il secondo rispetto avvi certamente disparità fra le idee « poichè, dice Cartesio (Medit. 3. p. 18), senza dubbio quelle idee che mi rappresentano sostanze, sono qualche cosa di più, e per così esprimermi, contengono più di realità oggettiva, che quelle le quali rappresentano soltanto modi od accidenti. » Ora questa realità contenuta nell'idea deve avere la sua causa in una realtà esistente fuori del mio pensiero, ed in sè. Non vi può essere nelle mie idee più di perfezione, più di entità di quanto se ne trovi nella realtà oggettiva, poichè le mie idee non sono altro che l'espressione e il risultato della realtà oggettiva. — Stabilito questo principio, ecco come ragiona Cartesio. Se fra le mie idee se ne trova una, in cui l'entità rappresentata sia tanto grande, che io sia certo che tanta entità non si trovi in me in alcun modo, e che per conseguenza io non possa essere la causa di quella idea, ne seguirà necessariamente, che io non sono più solo nel mondo, ma esiste qualche altra cosa, la quale sia causa di tale idea (Medit. III. p. 19). Rimane a sapere se una tale idea io la possegga veramente. Ora è un fatto che io trovo in me molte imperfezioni, tra le quali quelle che io sento più dolorosamente sono l'ignoranza ed il dubbio. Per giudicare imperfetto il mio essere è necessario che io abbia l'idea del perfetto essere, cioè di Dio. Dunque io ho questa idea, e posso esprimerla in una definizione, quale è per es. la seguente: « pel vocabolo Dio io intendo una sostanza infinita, indipendente, di somma intelligenza e potenza, e dalla quale io stesso, ed ogni altra cosa è creata (Medit. III. p. 21). » Quest'idea non può essere una mia creazione, poichè quantunque io possa ricavare l'idea di sostanza da me stesso, in quanto io stesso sono una sostanza, tuttavia non potrei mai ricavare da me l'idea di sostanza infinita, essendo io finito (ib.). Nè già si potrebbe dire che io non apprenda l'infinito per mezzo d'una vera e positiva idea, ma soltanto per mezzo della negazione del finito, come percepisco la quiete e le tenebre per mezzo della

negazione del moto e della luce, poichè anzi io vedo manifestamente esservi più di realità nella sostanza infinita che nella finita, e perciò essere in qualche modo anteriore in me la percezione dell'infinito a quella del finito (ib.). Quest'idea di Dio è sommamente vera e positiva, esclude da sè ogni sospizione di falsità, come quella che è affatto chiara e distinta (Medit. III). Egli è ben vero che io non comprendo l'infinito, e che sono in Dio altre cose innumerevoli, che io non potrò mai comprendere, nè forse mai raggiungere col pensiero, poichè è dell'essenza dell'infinito di non poter essere compreso da me che sono finito: ma basta che io intenda questo e giudichi che tutte quelle cose che io percepisco chiaramente, e so importare qualche perfezione, ed anche altre innumerevoli ch'io ignoro, sono in Dio o formalmente, od eminentemente, perchè l'idea che io ho di esso sia fra tutte quelle che sono in me, la più vera, la più chiara, e la più distinta (ib.). L'idea che abbiamo dell'infinito non rappresenta solo una parte di esso, ma tutto l'infinito, in quel modo che deve rappresentarlo un'idea umana, benchè certamente l'idea che Dio ha di se stesso, e quella che ne può avere una intelligenza più perfetta della nostra, sia molto più perfetta, più accurata e più distinta; a quel modo che un uomo ignaro di geometria ha idea di tutto il triangolo, quando intende che esso è una figura compresa da tre rette, benchè dai geometri molte altre cose possano essere conosciute intorno al triangolo, che da quello sono ignorate (Resp. ad V, pag. 66).

Stabilito il fatto che io posseggo l'idea di Dio, rimane a cercare in che modo io l'abbia acquistata: non è una mia produzione: non mi è venuta dai sensi: ciò è evidente e non abbisogna di prova. *Superest*, così conchiude Cartesio, *ut mihi sit innata, quemadmodum etiam mihi est innata idea mei ipsius. Et sane non mirum est Deum me creando ideam illam mihi indidisse, ut esset tamquam nota artificis operi suo impressa: nec etiam opus est ut nota illa sit aliqua res ab opere ipso diversa, sed ex hoc uno quod Deus me creavit, valde credibile est me quodammodo ad imaginem et similitudinem eius factum esse, illamque similitudinem in qua Dei idea continetur, a me percipi per eandem facultatem per quam ego ipse a me percipior, hoc est dum in meipsum mentis aciem converto, non modo intelligo me esse rem incompletam, et ab alio dependentem, remque ad maiora et maiora, sive meliora indefinite aspirantem, sed simul etiam intelligo illum a quo pendeo, maiora ista omnia non indefinite, et*

potentia tantum, sed reipsa infinite in se habere, atque ita Deum esse (Medit. III, p. 24).

L'esistenza in me dell'idea di Dio prova l'esistenza di Dio in sè, come l'effetto prova la causa. Tutto il raziocinio Cartesiano si riduce a dire: Io penso Dio, dunque o io sono Dio, o Dio esiste fuori di me, poichè se non esistesse e non si affacciasse al mio pensiero, in tal caso io avrei la potenza di pensarlo da me stesso; ora chi ha la potenza di inventar Dio, non avrà forse *a fortiori* la potenza di farsi Dio? Perchè mai, quando io avessi tale potenza, non la eserciterei, e non mi libererei da tutti i limiti, da tutte le infelicità che affliggono la natura umana? Non si può pensar Dio senza esser Lui, o da Lui.

Chi paragona questa speculazione teologica di Cartesio col metodo da lui delineato, col principio di certezza su cui egli avea voluto fondare tutto lo scibile umano, non può a meno di ravvisare fra quella e questi una profonda discrepanza. Ed invero: tutta quella speculazione si fonda sul principio già da me accennato più sopra, che cioè il pensiero è l'espressione e il risultato della realità. Se così è, ne segue che il pensiero presuppone la realità, e da questa dipende. Or chi non vede che questo principio è la negazione del famoso *cogito*, con cui Cartesio avea voluto dar fondamento ad ogni verità, ad ogni certezza? Dopo averci detto, nel cominciamento del suo filosofare, che il pensiero sussiste in se stesso, indipendente dalla realtà dei proprii oggetti, dopo avere annientato in ispirito il mondo materiale, e mostratoci come il mondo intellettuale in cui solo vive la mente nostra non si sia risentito neppur minimamente di tanta ruina, dopo averci insomma parlato il linguaggio del pretto idealismo, Cartesio ricade nel punto di vista della filosofia volgare, e cedendo alle tendenze realistiche e dogmatiche da cui erano dominati gli spiriti del suo tempo, ricomincia egli e la sua scuola a dogmatizzare come in pieno medio evo sull'ente, sulla sostanza, sull' infinito, sull'anima dell'uomo e dei bruti, sull'essenza della materia, sui vortici d'atomi, onde si formano i mondi. Ma questa ricaduta era naturale ed inevitabile.

Rare volte o non mai fu dato ad uno stesso uomo di ideare una rivoluzione, e di compierla nell'ordine delle idee, e molto meno nell'ordine dei fatti; e per quanto un ingegno sia eminente e vigoroso, gli riuscirà pur sempre difficile, per non dire impossibile, di mantenersi costantemente, e per ogni verso al di sopra del proprio secolo.

Oltre all'argomento sovresposto in prova dell'esistenza di Dio, Cartesio

mise in campo quello che suol chiamarsi argomento ontologico. L'invenzione ne viene attribuita comunemente a S. Anselmo, ma se si guarda alla sostanza di questo argomento, anzichè alla sua forma, si troverà che esso è di una origine di gran lunga più antica. Può dirsi in generale che tutti i filosofi i quali considerarono l'oggetto essenziale ed assoluto del pensiero umano non come un concetto vacuo ed astratto, non come una forma puramente soggettiva, ma come Ente reale e sussistente in sè, ragionarono in modo analogo all'argomento ontologico. Così, in virtù d'un simile raziocinio, sottinteso in tutta la loro speculazione, gli antichi filosofi della scuola ionica ammisero l'esistenza del principio primitivo, benchè cercassero di determinarne e concretarne il concetto nella materia: lo stesso può dirsi, con più ragione ancora, della scuola Eleatica, la quale considerava questo concetto come concreto e sostanziato in se stesso, e lo poneva come l'oggetto unico possibile del pensiero umano. Questa stessa dottrina trovasi in Platone, specialmente nel V della Rep. n.° 20, dove si pone l'ente come oggetto essenziale della conoscenza, e l'ente realissimo (*τὸ παντελῶς ὄν*) come oggetto della conoscenza elevata a grado supremo (1). La filosofia antica, da Talete fino agli ultimi neoplatonici, è dominata da queste due vedute fondamentali, che 1.° l'oggetto della conoscenza è un termine distinto dal soggetto conoscente; 2.° l'oggetto della conoscenza è un reale in sè, di guisa che dalla presenza di esso alla mente umana si può inferire immediatamente la sua esistenza oggettiva, nella quale illazione consiste poi in ultimo tutta la sostanza dell'argomento ontologico (2).

S. Anselmo, come ho testè accennato, ridusse egli pel primo questo argomento in forma rigorosa ed elegante nel tempo stesso. Nell'opuscolo che egli intitola *Proslogium, seu fides quaerens intellectum*, egli premette che la fede cristiana considera Dio come un ente di cui non si può

---

(1) *ὁ γιγνώσκων γιγνώσκει τὶ ἢ οὐδέν;*
.....ἀποκρινοῦμαι, ὅτι γιγνώσκει τὶ.
πότερον ὂν ἢ σὺκ ὄν;
Ὄν· πῶς γὰρ ἂν μὴ ὄν γέ τι γνωσθείη;
ἱκανῶς οὖν τοῦτο ἔχομεν, κἂν εἰ πλεοναχῇ σκοποῖμεν, ὅτι τὸ μὲν παντελῶς ὂν, παντελῶς γνωστὸν, μὴ ὂν δὲ μηδαμῇ, πάντῃ ἄγνωστον;
ἱκανώτατα.

(2) Sulla storia dell'argomento ontologico vedasi un articolo del Dott. R. Seydel nella Zeitschrift für philosophie. Nuova serie. 1.° fascicolo del vol. 32. 1858. Halle.

pensare il più grande. Per contrario l'*insipiente* di cui parla la scrittura (salm. 13) dice nel suo cuore che Iddio non è. Ma certamente, così prende ad argomentare S. Anselmo, questo insipiente quando ode parlare di un ente di cui non si può pensare il più grande, egli pensa un tale ente, il che è quanto dire che un tale ente esiste nel suo intelletto.

Ora questo ente non può esistere soltanto nel suo intelletto; conviene di necessità che esista anche nella realtà, poichè, se ciò non fosse, se la sua esistenza fosse limitata al solo intelletto, egli non sarebbe il massimo ente, essendo minore di un altro che esistesse e nell' intelletto e nella realità.

Egli è questo uno di quei raziocinii che mettono lo spirito in imbarazzo, e quasi lo convincono, senza tranquillarlo, nè toglierli ogni dubbio. Per una parte, trattandosi di un dogma così importante come quello dell'esistenza di Dio, si accoglierebbe ben volentieri una dimostrazione tanto semplice, tanto indipendente da ogni principio contestabile, da ogni dato dell'esperienza: ma per altra parte si trova alquanto strano ed incredibile, che dal fatto del pensiero si possa argomentare la realtà della cosa pensata. Lo spirito nostro si trova insomma nella situazione di chi fa un sogno felice, ma sente nascersi un lontano dubbio che quello non sia altro che un sogno. A mettere in chiaro ciò che vi ha di solido in quell'argomento, conviene seguire il consiglio inculcato in simili casi dal Leibnizio, e ridurlo in forma rigorosa e scolastica. Riusciremmo con ciò al seguente sillogismo:

Un essere di cui non si può pensare il più grande, è nel mio intelletto.

Ma un essere di cui non si può pensare il più grande, deve esistere in ogni maniera, e quindi non nella sola sfera dell'intelletto, ma anche in quella della realità.

Dunque l'essere che io penso esiste anche nella realtà.

Facciamo alcune osservazioni su ciascuna delle proposizioni di questo sillogismo. Quanto alla maggiore, si può domandare *se* e *in qual modo sia nel mio intelletto* quell'ente di cui si tratta. O la sua idea è composta di più altre, od è un'idea assolutamente semplice: nel primo caso essa è il prodotto dell'attività sintetica del mio spirito, e si può domandare se questa sintesi abbia un fondamento oggettivo, o non sia piuttosto una mia finzione, una combinazione di elementi contrarii ed escludentisi mutuamente. Nel secondo caso quell'idea o è il prodotto di una sensazione,

come è per es. l'idea semplice del color rosso ecc., o è il prodotto dell'astrazione, e si può domandare se ogni idea semplice, non resolubile, nè riducibile ad altre idee, abbia un fondamento oggettivo. – Quanto alla minore, è già stato osservato dal Kant (1) e dal Rosmini, che si può pensare un ente fornito di tutte le perfezioni possibili, senza ancora affermare che esso esista. Attribuendogli l'esistenza, io non gli aggiungo una nuova perfezione. È falso il dire con S. Anselmo e con Cartesio che di due enti dei quali l'uno esista solo nell'intelletto, e l'altro esista nell'intelletto e nella realtà, il secondo sia più perfetto, ed abbia maggiore entità che il primo. L'esistere e il non esistere sono come i due segni algebrici *più* e *meno*, i quali non mutano il valore intrinseco ed assoluto della quantità che può esserne successivamente affetta, ma mutano solo la situazione di questa quantità rispetto ad altre con cui la si considera. Oltre a ciò che cosa vuol dire *esistere nell'intelletto, ma non nella realtà?* Qui vi è confusione dell'intelletto colla immaginazione. Può bene una cosa esistere solo nella mia immaginazione, ma non nella realtà, come per es. il palazzo di Alcina esiste nella immaginazione di chi lo legge descritto in Ariosto; ma non ha alcun senso il dire che una cosa esiste nell'intelletto e non in sè. Che cosa vuol dire esistere nell'intelletto, se non essere inteso, essere saputo? Ora il vero solo è suscettivo di essere inteso, il vero solo può essere oggetto di scienza, ed il vero esiste certamente in sè. Se adunque l'Ente massimo fra i pensabili esiste nel mio intelletto, esso esiste anche in se stesso. Ma la questione sta appunto qui, se il massimo dei pensabili esista nel mio intelletto, cioè se sia una idea vera, e non piuttosto una concezione immaginaria, come sarebbe quella della comune misura fra il diametro e la circonferenza.

Il *maximum* assoluto del pensabile, è il limite del pensabile: ora a quel modo che il limite della superficie non è più superficie, il limite della linea non è più linea, il limite del moto non è più moto, così pare doversi ammettere che il limite del pensabile non sia più pensabile. Pur nondimeno il pensiero finito ha una cotale apprensione misteriosa del proprio limite, e giunto all'estremo confine della propria sfera, si sente in contatto con qualche cosa che gli resiste immobile, insuperabile. Questa apprensione, questo sentimento che ha la mente umana di ciò che la

(1) Nel suo opuscolo: Der einzig mögliche Beweisgrund zu einer Demonstration des Daseins Gottes. 1763.

trascende è forse il più saldo fondamento che si possa dare alla credenza nella divinità.

Le osservazioni precedenti si applicano egualmente all'argomento ontologico preso in quella forma, in cui lo propose Cartesio. Egli lo riepiloga nel seguente modo. *Quod clare et distincte intelligimus pertinere ad alicuius rei verum et immutabilem naturam, sive essentiam, sive formam, id potest de ea re cum veritate affirmari: sed postquam accurate investigavimus quid sit Deus, clare et distincte intelligimus ad eius veram et immutabilem naturam pertinere ut existat. Ergo tunc cum veritate possumus de Deo affirmare quod existat.* In questo raziocinio Cartesio si appoggia ad un principio che divenne poi capitale e solenne nella sua scuola, che cioè si possa affermare di una cosa tuttociò che è contenuto nella sua idea chiara e distinta. Ma anche questo principio non si può accettare senza qualche restrizione. Affinchè si possa affermare di una cosa ciò che è contenuto nella sua idea chiara e distinta, conviene prima avere la certezza che quella idea si trovi realizzata nella cosa di cui si tratta: così per poter affermare che il volume di un dato corpo, che all'occhio sembra di forma sferica, è eguale alla sua superficie moltiplicata per un terzo del raggio, fa d'uopo esser certi che quel dato corpo sia veramente una sfera.

Per mezzo dell'argomento ontologico Cartesio si credette finalmente arrivato a quel punto a cui aspirava, cioè alla cognizione non solo della esistenza, ma anche della natura dell'assoluto, cognizione dalla quale sola egli aspettava oramai la liberazione da ogni dubbio. *Magna in hoc existentiam Dei probandi modo, per eius scilicet ideam, est praerogativa, quod simul, quisnam sit, quantum naturae nostrae fert infirmitas agnoscamus. Nempe ad eius ideam nobis ingenitam respicientes, videmus illum esse aeternum, omniscium, omnipotentem, omnis bonitatis veritatisque fontem, rerum omnium creatorem, ac denique illa omnia in se habentem, in quibus aliquam perfectionem infinitam, sive nulla imperfectione terminatam clare possumus advertere* (Princ. phil. p. I, n.° 22).

Egli aveva definitivamente abbandonato l'idealismo soggettivo del *cogito*, per cercare e ritrovare in Dio il principio della scienza, come appunto faceva dopo lui Benedetto Spinoza. « Essendo Dio la vera causa di tutte » le cose reali o possibili, è manifesto che noi seguiremo l'ottima via di » filosofare, se ci studieremo di dedurre dalla cognizione di Dio stesso » la spiegazione delle cose create, in modo da acquistare quella che è

» scienza perfettissima, e che consiste nel conoscere gli effetti per mezzo » delle loro cause » (ib. n.° 24).

Onde si vede che Dio è principio della scienza appunto perchè è principio della realtà, ed è principio della realtà perchè esso è vera sostanza nel significato più eminente del vocabolo.

I principii ontologici che dominano nella speculazione Cartesiana sono quelli stessi su cui Spinoza fondò il suo sistema panteistico. La filosofia di N. Malebranche è l'anello intermedio fra quella e questo, ma più vicino a questo che a quella, e tanto vicino, che basterebbe eliminare dalla teoria Malebranchiana ogni elemento eterogeneo, ogni tesi illogica e gratuita, introduttavi da lui per soddisfare alle esigenze della teologia cristiana, e per salvarsi a qualunque costo dal vortice del panteismo a cui si sentiva trascinato, basterebbe dico fare una tale eliminazione per ritrovarsi in pieno panteismo. Il Malebranche escogitò un sistema intermedio fra il teismo Cartesiano, e il panteismo di Spinoza. Secondo lui la verità è questa: Dio è l'archetipo del mondo materiale e del mondo spirituale, cioè egli è la materia intelligibile, sostanza del mondo geometrico, ed è il grande spirito, che contiene in sè tutti gli spiriti. Come esseri ragionevoli, cioè partecipi della verità, noi lo vediamo tale, cioè vediamo Dio, non nella sua essenza assoluta, ma solo in quanto egli è imitabile nelle cose finite, cioè abbiamo l'intuito dell' Essere in universale, e dello spazio infinito, e vediamo in esso tutti i corpi geometrici; di più noi sentiamo l'azione divina, sola cagione d'ogni nostra sensazione. Quantunque poi non ci sia dato di veder Dio come archetipo degli spiriti (poichè se il vedessimo, potremmo costruire *a priori* la psicologia, come si costruisce la geometria), tuttavia sappiamo che Egli lo è. Ma Iddio oltre di *essere* necessariamente quello ch'egli è, *fa* liberamente qualche cosa, cioè crea liberamente un mondo reale, ad imitazione del mondo ideale, e composto di due sostanze affatto distinte, spirito e materia. Di questa creazione la ragione, cioè la filosofia, non sa nulla, e quindi non potrà mai dimostrarla: ma la teologia cristiana ne è edotta per mezzo di una rivelazione positiva, fatta *ab extrinseco*. La filosofia adunque per se stessa è un Panteismo idealistico. Venne Spinoza e disse: L'ordine delle idee si immedesima coll'ordine delle cose, cioè ogni cosa è un'idea, ed ogni idea è una cosa. Se adunque il Panteismo è vero nell'ordine delle idee, è anche vero nell'ordine delle cose. Se Dio è archetipo del mondo spirituale e del mondo materiale, ne segue che le due sostanze

spirito e materia non sono così assolutamente distinte: non sono due sostanze, ma attributi (nel senso Cartesiano) d'una sostanza unica.

Tutta la filosofia di Spinoza consiste nella sua teoria della sostanza: egli poi considerò la sostanza come Dio, a quel modo che gli antichi Ionici davano il nome di Dio a quello che essi ponevano come principio materiale dell'universo. Quindi possiamo distinguere nella filosofia di Spinoza un testo metafisico, ed una traduzione in linguaggio teologico.

Il testo metafisico si riduce ai seguenti principii:

1.° La sostanza è ciò che è in sè e si concepisce per sè, ciò il cui concetto non abbisogna del concetto di altra cosa da cui debba formarsi.

2.° La sostanza esiste realmente. Sostanza meramente possibile è un assurdo. Quali sono le cose che possono esistere e pensarsi come meramente possibili? Sono quelle che si concepiscono in altra cosa, cioè le modificazioni. *Modificationum non existentium veras ideas possumus habere; quandoquidem, quamvis non existant actu extra intellectum, earum tamen essentia ita in alio comprehenditur, ut per idem concipi possint. Verum substantiarum veritas extra intellectum non est nisi in se ipsis, quia per se concipiuntur* (p. I. prop. 8. sch. 2). Perciò sostanza possibile, sostanza creata, cioè passata dalla possibilità all'atto è una contradizione. Che cosa è il possibile? È ciò che può esistere: potere esistere vuol dire potere esser fatto: presuppone adunque una potenza reale in un ente reale. Insomma, il Primo ontologico deve esser reale: ma la sostanza è il Primo ontologico (v. p. I. prop. 1). Dunque la sostanza è reale.

3.° La sostanza è infinita, poichè essa è l'ente puro, senza alcuna mescolanza di non-ente. D'altronde la necessità di esistenza importa universalità di esistenza, cioè infinitudine (v. prop. 8. sch. 1).

4.° Quanto più di realtà (entità) ha una cosa, tanto maggior numero di attributi le compete: infatti, quanto più una cosa ha di realità, tanto più è intelligibile; e siccome ogni ente in tanto è intelligibile, in quanto la sua essenza si concreta in attributi (v. Cartesio, Princ. phil. p. I, n. 52-53. Spinoz. def. 4), ne segue che esso sia tanto più intelligibile, quanto ha più attributi.

5.° Quindi segue che l'infinitudine della sostanza non consiste già in questo, che essa sia vita, intelligenza, amore uno, infinito, ma in questo, che essa consti d'un infinito numero di attributi (prop. XI).

6.° Ciascuno di questi attributi è infinito nel suo genere: poichè

per essere finito nel suo genere converrebbe che fosse terminato da altra cosa della stessa natura (def. 2).

7.° Ciascun attributo della sostanza infinita si concepisce per sè, come costituente l'essenza della sostanza. E questo è il vero che avea veduto Cartesio.

8.° Ma da questo vero non segue che ciascun attributo costituisca un ente, una sostanza: ed in questa conclusione sta l'errore di Cartesio. *Quamvis duo attributa realiter distincta concipiantur, hoc est, unum sine ope alterius, non possumus tamen inde concludere, ipsa duo entia, sive duas diversas substantias constituere. Id enim est de natura substantiae, ut unumquodque eius attributorum per se concipiatur; quandoquidem omnia quae habet attributa simul in ipsa semper fuerunt, nec unum ab alio produci potuit, sed unumquodque realitatem sive esse substantiae exprimit. Longe ergo abest ut absurdum sit, uni substantiae plura attributa tribuere; quin nihil in natura clarius, quam quod unumquodque ens sub aliquo attributo debeat concipi, et quo plus realitatis aut esse habeat, eo plura attributa, quae et necessitatem sive aeternitatem et infinitatem exprimunt, habeat; et consequenter nihil etiam clarius, quam quod ens absolute infinitum necessario sit definiendum . . . ens quod constat infinitis attributis, quorum unumquodque aeternam et infinitam certam essentiam exprimit* (part. I, prop. X, sch.).

9.° Esiste una sola sostanza. Dimostrazione diretta: l'esistenza della sostanza è implicata nella sua essenza: ora l'essenza di una cosa non può implicare l'esistenza di più individui: così l'essenza del triangolo non implica l'esistenza di più triangoli reali. Dunque la sostanza è unica come la sua essenza. Dimostrazione indiretta: supponiamo che oltre la sostanza infinita qualche altra sostanza esista: si possono fare due ipotesi: o quest'altra sostanza ha un attributo, o più attributi affatto diversi da quelli onde consta la sostanza infinita; od ha attributi identici. La prima ipotesi non si può ammettere poichè la sostanza infinita comprende in sè tutti gli attributi possibili: resta la seconda ipotesi, che cioè le due sostanze abbiano attributi identici: ma in questo caso non possono essere distinte l'una dall'altra, se non per le diverse modificazioni di questi attributi: tolte adunque le modificazioni, cessa la distinzione e la pluralità (v. prop. 14).

10.° La sostanza infinita è indivisibile (v. prop. 12 e 13).

11.° La sostanza infinita non può produrre un'altra sostanza. Poichè

non vi possono essere due sostanze. Inoltre *si substantia ab alio posset produci, eius cognitio a cognitione suae causae deberet pendere* (axiom. 4), *adeoque* (def. 3) *non esset substantia* (prop. 6).

12.° Dalla infinita essenza della sostanza conseguono infinite cose in infinite maniere, cioè tutte le cose che possono cadere in un intelletto infinito (prop. 16).

Traduzione del testo metafisico in linguaggio teologico.

1.° La sostanza infinita è Dio.

2.° Dio esiste necessariamente: egli è *causa sui.*

3.° Dio consta d'infiniti attributi.

4.° Dio è ente impersonale, senza intelletto e senza volontà.

5.° Dio non opera per un fine.

6.° La creazione è impossibile.

7.° Dio è causa logica e immanente di tutte le cose, le quali da lui conseguono nello stesso modo che dalla natura del triangolo ab eterno in eterno consegue che i suoi tre angoli eguaglino due retti.

8.° Dio è la sola causa libera, ma per causa libera non si deve intendere altro che una causa la quale per la sola necessità della sua natura esiste, e da se sola viene determinata ad operare. La libertà umana non è punto più reale di quella che avrebbe una pietra, la quale precipitando al basso, acquistasse ad un tratto coscienza di sè, e s'immaginasse di muoversi liberamente e per propria forza.

9.° Essenza, esistenza, potenza, atto sono in Dio un medesimo.

10.° Quindi non providenza, non intervento sopranaturale di Dio nelle cose umane, non popolo eletto, non libri santi, non legge divina, non incarnazione, non profeti, non rivelazione. La vera rivelazione è la ragione, cioè l'idea di Dio presente ad ogni mente, idea in cui troviamo ogni essenza, ogni verità, ogni certezza, e nella cui meditazione si può conseguire quella libertà e pace di spirito a cui come a bene supremo aspira il filosofo.

NOTE

SUR LE PROCÈS DE GALILÉE

PAR

JEAN PLANA

Terra pilae similis, nullo fulcimine nixa,
Aëre subiecto tam grave pendet onus.
Ipsa volubilitas libratum sustinet orbem.
Quique premat partes, angulus omnis abest.

*Fastes d'*OVIDE. *Livre VI. Dist. 135 et 136*

Lue dans la Séance du 9 Novembre 1858.

L'occasion que j'ai eue, en écrivant dernièrement un Mémoire sur la parallaxe annuelle des étoiles, de consulter l'ouvrage de GALILÉE qui a fait le plus de bruit dans le monde, m'a conduit à lire avec une particulière attention, à l'égard *des Dates*, la récente narration publiée par M.r BIOT dans le *Journal des Savans*, depuis le mois de mars de cette année, sur les causes plus ou moins connues, qui, en dehors de la science et du mouvement de la Terre, auraient fait intervenir l'action des passions haineuses, pour influer sur la conduite de ce procès, terminé par la fameuse condamnation de GALILÉE, en présence de la Congrégation du S.t-Office. Mais, à mon avis, une telle explication, essentiellement fondée sur des torts personnels qui auraient été *sciemment* commis par GALILÉE, est tout-à-fait improbable, en pesant bien toute la force du mot sciemment.

L'argumentation de M.r BIOT prouve seulement, qu'en 1632 comme en 1633, le Pape URBAIN VIII en avait agi de la sorte, d'après la persuasion que GALILÉE était coupable envers lui personnellement. Mais elle ne saurait établir, que la postérité, tout en plaignant les malheurs de GALILÉE, est forcée d'avouer que, en écrivant ses Dialogues, il avait, en réalité, eu l'intention de profiter de la fiction du nom de son interlocuteur *Simplicius*, pour faire des allusions offensantes aux argumens mêmes sortis de la bouche du Pape dans les entretiens qu'il eut avec lui en 1624, et par là fournir des preuves d'une culpabilité dont il serait

impossible de l'absoudre, si l'on veut demeurer fidèle à la sévérité de l'histoire.

Les torts imputés à GALILÉE, dont il est ici question, n'auraient pas été commis entre les années 1616 et 1623, mais postérieurement à l'année 1623, envers le Pape même URBAIN VIII; ce qui me paraît en contradiction avec les circonstances inséparables que je vais rapprocher.

S'il était vrai que GALILÉE, en composant ses Dialogues sur le système du monde, avait l'intention malicieuse, en son âme et conscience, d'attribuer le rôle dérisoire de *Simplicius* à Maffeo BARBERINO Cardinal, devenu Pape le 6 août de l'année 1623, il pouvait bien cacher sa pensée à tout le monde; mais il ne pouvait pas manquer de s'avouer tout bas à lui-même, en 1633, que « *hinc prima mali labes* », et se répétant les mots « *Nec tacui demens* », en conclure que de là, et non d'ailleurs, dérivait l'issue du procès intenté contre ses Dialogues. GALILÉE, frappé de la sorte par les inquisiteurs du S.t-Office, aurait senti que la réserve, la circonspection étaient désormais une impérieuse nécessité de sa part. Surtout pendant son espèce de réclusion à *Arcetri*, accordée comme une faveur signalée, moins à lui qu'à l'intercession du Grand-Duc de Toscane. Or, il faudrait supposer GALILÉE capable, dans cet état moral, d'oublier tous les antécédens, et par un excès d'imprudence, consentir en 1638 à la publication de ses *Nouveaux* Dialogues sur la Dynamique intitulés: « *Discorsi e Dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* » sans changer (voici le point le plus important) les noms des trois interlocuteurs; ce qui n'aurait exigé aucun autre changement, absolument aucun autre. Ils sont encore: *Salviati*, *Sagredo*, *Simplicius*.

Cependant la lettre de GALILÉE du 6 mars 1638 au Comte de NOUAILLES, par laquelle son consentement à la publication de ces *Discorsi* est avoué explicitement, respire la crainte plutôt qu'un courage proche de l'audace. « *Confuso e sbigottito dai mal fortunati successi d'altre mie opere* » sont les mots qu'on lit au commencement de cette lettre. Et l'explication de M.r BIOT étant admise, il faut penser aussi que GALILÉE, mieux que personne au monde, devait avoir la persuasion, que cette réapparition de *Simplicius* dans le monde savant, quoique sur un autre terrain, étant associée à un rôle peu ou point brillant, et parfois ridicule, n'aurait pas manqué de faire bientôt cesser les égards jusque là usés envers sa personne, et même susciter, à son détriment, une persécution

beaucoup plus active de la part du Pape (par hypothèse) déjà offensé, et assez vigoureux pour lui survivre.

Si l'on objectait que l'état de crainte, dont je viens de parler, était celui d'un moment de tristesse passagère, je répondrai qu'il était permanent depuis 1633. En effet, dans une de ses lettres au célèbre Peiresc, du 21 février 1635, datée d'*Arcetri*, il s'exprime ainsi: « Ho detto, » illustrissimo mio Signore, che non spero sollevamento alcuno: e questo » perchè non ho commesso delitto nissuno; potrei sperare d'ottener grazia » e perdono, se io avessi errato, chè i falli son la materia sopra la quale » può il Principe esercitar le grazie e gli indulti: dove che sopra uno » innocentemente condannato, convien, per coperta, di avere giuridica- » mente operato, mantenere il rigore: il quale (credami pure Vostra » Signoria Illustrissima anco per sua consolazione) m'affligge meno di » quel ch'altri può credere, perchè due conforti mi assistono perpetua- » mente: l'uno è, che nella lettura di tutte le opere mie, non sarà chi » trovar possa pur minima ombra di cosa che declini dalla pietà e dalla » riverenza di Santa Chiesa: l'altra è la *propria coscienza da me solo* » *pienamente conosciuta in Terra, ed in Cielo da Dio.* »

Ces paroles, ces protestations, écrites à un ami qui était en commerce de lettres avec le Pape Urbain VIII, et duquel lui-même ordonna que son éloge, après sa mort, avenue peu après (24 juin 1637), fût prononcé dans la salle de l'Académie des Humoristes: ces paroles, dis-je, détruisent dans mon esprit tous les doutes, et me forcent à ne point accorder mon adhésion aux torts de Galilée, oralement manifestés à M.r Biot en 1825, dans le palais du Vatican, par le P. Benedetto Maurizio Oliveri, Commissaire Général du S.t-Office.

Il est assez surprenant, du moins pour moi, que M.r Biot déclare au quatrième article de son Mémoire (pages 35 et 36) qu'il ignorait alors les particularités qu'il venait d'entendre de la bouche du P. Oliveri. « C'était, dit-il, réellement le nœud de l'affaire que j'ignorais. » Cependant, quatre années auparavant, en 1821, Venturi avait publié à Modène le second Volume des *Memorie e Lettere inedite finora o disperse di* Galileo Galilei; où on lit aux pages 193 et 194 les circonstances que je vais rapporter bien plus explicites que celles dont parle M.r Biot dans l'article du mois de mars. Les voici:

» ..... Se altre circostanze accessorie ed estrinseche » alla quistione non si fossero combinate a perseguitarlo quanto potevasi

» con rigore. La prima e la più forte è stata da me accennata a piedi » della pag. 146 *, e fu questa lo sdegno e il dispetto che prese » Urbano VIII contro il Galileo, perchè, essendo questi suo concittadino, » ed essendo stato favorito già in ogni maniera da lui, e prima e dopo » d'esser divenuto Papa, avesse poi osato nel suo Dialogo porre in bocca » a Simplicio gli argomenti, che il Pontefice avea a lui recati contro il » sistema di Copernico. Non è già che prima della stampa del Dialogo, » esso Papa spingesse l'impegno fino a pretendere che la quiete della » terra, e il movimento del Sole fossero articolo di fede. Ma quando » vide nel Dialogo i suoi argomenti prodotti da Simplicio e disprezzati, » divampò in una collera estrema; imperocchè egli era sommamente » *ambizioso di dar legge in tutta l'università delle scienze; alla qual* » *gelosia non è bastante qualsivoglia finissima prudenza, ed è forza* » *rovinare.* Così diceva di lui un Cardinale, *che rendè vivendo più illustre* » *la chiarezza de' suoi natali con la letteratura*, ed era forse il Car- » dinal Bentivoglio. Questa fu la ragion principale della avversione ed » escandescenza con la quale Urbano entrò a parlare del Galileo col » Niccolini, e del grave impegno col quale egli più che verun altro lo » perseguitò in tutto il decorso della causa. Ed anche tre anni dopo covava » tuttavia il rancore, persistendo pur nell'idea, che il Galileo nel suo » Dialogo avesse voluto metterlo in canzone. In un esemplare della lettera » a Madama Cristina esistente nella libreria Magliabechiana di Firenze » si trova scritto a penna quanto segue:

» Papa Urbano si piccò col Galileo, perchè aveva in *minoribus* dispu- » tato con lui alcune cose del suo sistema della mobilità della terra, » prima di darlo fuori, le quali questi messe in bocca, divolgandole, di » Simplicio. Di che s'irritò il Papa, e lo fece abjurare, comparendo il » pover uomo con uno straccio di camicia indosso, che faceva com- » passione. I Gesuiti pure vi dettero di mano perchè contradiva al » P. Clavio. »

Je suis las de copier ces passages. Je dirai encore, que Venturi poursuit en narrant le fait de la lettre du 13 mars 1633, écrite par Niccolini, conformément à ce que M.r Biot a exposé dans le second article de son Mémoire. Mais je suis loin de conclure avec lui que *la persona*

* Cette même page est citée par M.r Biot dans son deuxième article p. 14, mais je ne conçois pas son silence à l'égard de la page 193 que je copie ici.

dottissima ed eminentissima était le Pape lui-même. Je préfère l'interprétation de Venturi, qui dit: « *è probabile che quelle difficoltà fossero* » *le comuni dei Peripatetici d'allora* ». D'ailleurs l'idée que M.r Biot exprime à la page 18 par les mots: « Niccolini *qui ne faisait pas ce* » *rapprochement* » était connue avant 1825: Venturi l'a publiée à la page 194, en 1821, où on lit:

« Il Papa medesimo nella sua collera fe' sentire al Niccolini d'aver » già proposte al Galileo tutte le difficoltà, che stanno contro il sistema » Copernicano, ed è probabile che fossero le comuni dei Peripatetici » d'allora. Solamente ricorda ei dopo un suo particolar argomento, che » cioè non bisogni imporre necessità a Dio di fare il mondo in un modo » piuttosto che in un altro; e questo medesimo argomento nella fine dei » Dialoghi adduce in campo Simplicio, e dice di averlo già *appreso da* » *persona dottissima ed eminentissima.* »

Il me paraît nécessaire de faire observer dans cette discussion, que la lettre précitée de Niccolini est terminée par ces mots assez significatifs « *Ma a me non piace l'impressione non punto diminuita in S. Beati-* » *tudine.* » Quoiqu'il soit vrai de dire que Niccolini ne faisait pas le rapprochement dont parle M.r Biot, il est certain que, sur le point en question, le P. Oliveri ne lui disait rien de nouveau en 1825. Sans remonter au 18.ème siècle, à la biographie de Galilée écrite par Nelli, le P. Oliveri renouvelait avec les Mémoires de Venturi l'ancienne imputation sans l'appuyer sur des documens nouveaux. Et je ne vois là aucune raison prépondérante pour en tirer la conclusion que M.r Biot exprime à la page 25 en disant que, Urbain VIII avait été publiquement offensé par Galilée. En cela M.r Biot adopte l'opinion émise, avec moins de savoir et beaucoup d'amertume, dans un opuscule *Galileo e l'Inquisizione*, publié à Rome en 1850, où on lit à la page 107: « Dunque » Urbano VIII sembra essere stato veramente beffeggiato da Galileo * ».

---

* Cet opuscule, qui sans la curiosité attachée au nom de Galilée serait déjà complètement oublié, n'a pas obtenu l'approbation de M.r Biot, et avec raison. Après l'avoir défini comme *un plaidoyer* en faveur du tribunal de l'Inquisition plutôt qu'un livre d'histoire, à la page 35 de son Mémoire il dit, en nommant l'auteur: « que *la Cour Pontificale* devra profondément regretter » de lui en avoir confié la publication. Son livre est une compilation sans ordre ni méthode, » rédigée dans un esprit de polémique ardente, qui, au lieu de persuader et de convaincre par » une exposition fidèle des faits et de leurs causes, s'engage imprudemment dans des récriminations » périlleuses, où la partialité inintelligente de l'écrivain pourrait rendre suspecte la fidélité du récit. »

Néanmoins je pense qu'Urbain VIII n'a pas persisté, après la condamnation de Galilée à se croire lui-même désigné dans *la persona dottissima ed eminentissima*. Car le P. Benedetto Castelli, dans une de ses lettres du 12 juillet 1636, datée de Rome, il lui dit:

» Io son sicuro che V. S. leggerà questa mia con quella franchezza » d'animo, con la quale si è sempre governata ne' suoi travagli. Però » le fo sapere come, dopo aver più volte tentato col Signor Cardin. » Antonio Barberino intorno al suo negozio, e sincerato S. Em. che » V. S. non ha mai avuto pure un minimo pensiero di offendere nè » vilipendere la Santità di N. S. . . . . ; e che l'essere cascato in questo » concetto le premeva più che tutto il resto de' suoi travagli; e che » questa macchina de' suoi nemici l'avea trafitto fino all'anima: avendo » mostrato S. Emin. di restar soddisfatta, ed essendosi mostrata pronta » a sincerare N. S. stesso, come unico e potentissimo mezzo in questo » affare. . . Jeri mattina il Signor Ambasciatore di Francia all'audienza di » S. S. fece la medesima sincerazione a N. S., il quale sebbene mostrò » sentimento che il negozio fosse gravissimo per la cristianità tutta, in » ogni modo parlò di V. S. con dimostrazione di benignità, e disse che » avea sempre amato V. S., e che le avea dato delle pensioni, e che in » questo particolare il Signor Cardin. Antonio avea parlato gagliardamente. » Ed avendo il Signor Ambasciatore rappresentato a S. S. che V. S. era » prontissimo a tollerare qualunque mortificazione che venisse dalla sua » santa mano, ma non poteva patire che i maligni avessero posta in » campo così scellerata macchina, e che non era mai stato suo pensiero » di offendere la S. S.; Nostro Signore disse queste precise parole, *lo* » *crediamo*, *lo crediamo*. Il Signor Ambasciatore giudicò prudentemente » di non andare più oltre; e trattando dopo coll'Emin. Signor Card. » Antonio restò assai consolato, perchè S. Em. gli promise di continuare » gli officii. . . »

Et Galilée, le 26 juillet 1636, écrivait à *Fra* Fulgenzio Micanzio: « Di Roma intendo che l'Eminentissimo Cardinal Antonio, e l'Ambasciatore di Francia han parlato a Sua Santità, cercando di sincerarla, » come io mai non ho avuto pensiero di fare opera sì iniqua di vilipendere la persona sua, come gli scellerati miei nimici le avevano » persuaso che fu il primo motore di tutti i miei travagli, e che finalmente a questa mia discolpa rispose: *lo crediamo*, *lo crediamo*; soggiungendo però che la lettura del mio Dialogo era alla *Cristianità* » perniciosissima. »

Parvenu à ce point, j'abandonne l'hypothèse d'abord par moi admise pour en arguer avec plus de force les conséquences morales, et je crois me rapprocher de la vérité en avançant ici, que Galilée n'a jamais eu l'intention de masquer les opinions scientifiques de Maffeo Barberino, Cardinal ou Pape, en les mettant *sciemment*, par dérision, dans la bouche de *Simplicius* dans ses premiers et plus fameux Dialogues. Les preuves positives et incontestables pour appuyer la véracité des torts manifestés par le P. Oliveri en 1825, je les cherche en vain parmi les documens publiés jusqu'ici. Dans cet état, soit de vérité, soit de probabilité ou d'obscurité, il me semble que rien n'autorise à charger de tels torts la mémoire de Galilée.

La reproduction de *Simplicius* en 1638 me paraît un acte de protestation d'innocence de la part de Galilée.

On ne peut croire aisément qu'après 1623, Galilée ait persisté à se vouloir conduire dans ses débats scientifiques d'une manière semblable à celle de l'année 1616, décrite alors dans une lettre du 4 mars par Pietro Guicciardini, et conforme à l'opinion émise par le Jésuite Tiraboschi un siècle et demi après cette époque.

Je regarde comme très-probable la non existence des torts de Galilée déclarés à M.r Biot par le P. Oliveri. Ils sont démentis, ce me semble, par l'empressement avec lequel il s'est rendu à Rome en 1624 pour complimenter le nouveau Pape élu le 6 août 1623, auquel le 20 octobre suivant il avait dédié son ouvrage *Il Saggiatore*. Je le répète: ils sont démentis par les obligations de gratitude contractées par Galilée envers ce Pape.

Il est certain qu'Urbain VIII ne voulait pas absolument faire révoquer la sentence de 1616 qui condamnait la doctrine de Copernic. Mais cela ne prouve pas que ce refus constant avait pour cause des torts personnels de Galilée. La disgrâce du P. Ricardi pour avoir délivré la permission d'imprimer à Rome, et non à Florence, les Dialogues, est aussi un fait incontestable. Mais tout cela ne prouve pas que Galilée ait eu l'intention d'attribuer à Urbain VIII le rôle de *Simplicius* dans les *Premiers* Dialogues. Et cette circonstance capitale n'étant pas démontrée avec de *nouveaux* documens par le P. Oliveri en 1825, on m'accordera peut-être que l'argumentation de M.r Biot n'est pas à l'abri de toute objection.

Si l'on veut croire, ce qui est très-probable, que le Pape Urbain VIII

en 1632 et en 1633 ait prêté sa croyance à des insinuations malveillantes et perfides, imaginées par les ennemis de GALILÉE, on trouvera en cela la cause de sa conduite contre lui. Mais le fait postérieur de la lettre du 12 juillet 1636 du P. CASTELLI, et celui de 1638 de l'identité des noms des trois interlocuteurs des *Discorsi*, que j'ai exposés plus haut, prouvent que sa bonne foi a été alors surprise par les suggestions des Jésuites. Avec une vue plus perçante dans l'avenir, URBAIN VIII aurait pu s'apercevoir que GALILÉE soutenait avec chaleur une grande vérité qui devait bientôt triompher à travers les nuages que l'ignorance et l'envie pourraient lui opposer. Et les mêmes arguments me prouvent que le P. OLIVERI n'avait pas rapprochés les documens et les dates pour demeurer dans la même croyance en 1825.

S'il m'est permis de hasarder une conjecture sur le fait porté par M.r BIOT à la connaissance des savans 33 années après qu'il a eu lieu ; de sa conversation avec le P. OLIVERI au palais du Vatican, je dirai: que le nouveau Commissaire du S.t-Office a essayé d'atténuer les torts de l'ancien S.t-Tribunal, en profitant de l'heureuse rencontre d'un savant aussi justement célèbre que M.r BIOT, en tâchant de lui insinuer la croyance que le S.t-Office en 1633, excité par URBAIN VIII, n'a pas pu en agir autrement. Car en présence des torts aussi graves commis par GALILÉE envers le Pontife, le S.t-Office était forcé de s'abstenir de tempérer la sentence. Et que sans cette circonstance concomitante, l'affaire en elle-même eût été susceptible d'un dénouement moins sombre: dénouement qui est jugé odieux par la postérité, parcequ'elle ignore la véritable source d'un mal déplorable, qui réside dans le caractère même de GALILÉE. Le P. OLIVERI, prévoyant que sa manifestation qu'il faisait à M.r BIOT serait tôt ou tard publiée, a cru faire une œuvre charitable approuvée dans le fond de sa conscience. Et avec d'autant plus de raison, qu'il disait ce que VENTURI avait déjà publié en 1821, en s'apercevant que le fait important de cette publication n'était pas encore parvenu à la connaissance de M.r BIOT. Du moins je me crois autorisé à faire cette conjecture par l'aveu que vient de faire M.r BIOT dans son premier article. « C'était là (dit-il), humainement parlant, la clef de » l'affaire, à quoi moi, et bien d'autres peut-être n'avions pas fait » jusqu'alors assez d'attention. »

La liberté avec laquelle GALILÉE écrivait à un de ses amis en 1631, en lui disant « La malignità, l'invidia e l'ignoranza sono animali indomiti: »

la liberté avec laquelle il avait parlé, dans ses Dialogues, des sectateurs d'Aristote, tous véritables *Simplicius* déchaînés contre lui: sa conduite parfois fort imprudente, pendant le Pontificat de Paul V, et même quelques-unes des ses lettres datées d'Arcetri, étaient des accessoires propres à laisser au P. Oliveri l'espoir qu'il serait cru sur parole sans un examen (du moins pour le moment) trop approfondi.

Au quart du 19.ème siècle, le P. Oliveri aurait pu se borner à dire à M.r Biot, que Galilée avait été victime de torts *apparents* et non *réels* envers Urbain VIII, et à penser que le tort scientifique de Galilée de n'avoir pas su concevoir le mouvement elliptique de toutes les planètes autour d'*un seul foyer commun*, au lieu des mouvemens circulaires de Copernic autour de leurs centres à la fois *différens* et *vides*, et de n'avoir pas su manier dans ses Dialogues le puissant argument de Kepler fondé sur la proportion radicale entre les distances au Soleil et les temps périodiques des planètes, était, pour sa mémoire, une punition suffisante, s'il le croyait coupable.

Au quart du 19.ème siècle, le P. Oliveri devait penser qu'il est impossible d'atténuer les torts du S.t-Tribunal, même par la *diversion astucieuse*, qu'il avait plutôt condamné l'acte de la désobéissance de Galilée au Décret de 1616, que la doctrine du Mouvement de la Terre. Une telle diversion, si l'on réfléchit que la Sentence porte non-seulement sur l'acte (d'ailleurs très-excusable) de la désobéissance, mais aussi sur le point scientifique, puisqu'on y lit « *Ne autem tuus iste gravis » et perniciosus error ac transgressio remaneat omnino impunitus etc.* », cesse d'être efficace pour détourner l'opinion contraire.

On peut admettre ou repousser cette conjecture de ma part. Je la livre au public avec la défiance qui doit demeurer attachée à toute opinion dénuée de preuves suffisantes pour la consolider avec le temps.

Je ne puis m'empêcher de faire remarquer qu'il fut heureux pour Galilée, que, ses juges, aient méconnu le véritable esprit de sa singulière rétractation, intercalée dans son ouvrage *il Saggiatore*, qu'il s'était empressé de placer sous le patronage d'Urbain VIII, l'année même de son élévation au trône Pontifical.

Là saisissant, avec son grand talent, l'occasion de faire un aveu qu'il jugeait capable d'apaiser les murmures contraires à ses opinions: après avoir démontré l'insussistence des hypothèses de Ptolémée et de Tycho-Brahé, il se tourne vers celle de Copernic, en disant:

« Quanto poi all' ipotesi Copernicana, quando per beneficio di noi » Cattolici, da più sovrana sapienza non fossimo stati tolti d'errore ed » illuminata la nostra cecità, non credo che tal grazia e beneficio si fosse » potuto ottenere dalle ragioni ed esperienze poste da Ticone. »

Il est malheureux (je le dis à regret) que le sentiment du respect que GALILÉE devait à ses propres écrits antérieurs, et même à son siècle, ne l'ait pas empêché de livrer à la connaissance de la postérité une telle période.

Je me suis attaché à l'ordre des dates en écrivant cette Note; et pour en offrir encore une preuve en la terminant, je ferai remarquer: que M.r BIOT, après avoir relevé dans son premier article l'erreur existante dans la lettre de GALILÉE au Prince CESI du 12 mai 1612 (il faut lire 83.° au lieu de 85.° dans la Note de M.r BIOT), il aurait pu ajouter que, plus tard, en 1632, dans le troisième de ses Dialogues, GALILÉE avait reconnu que les taches solaires ne tournent pas précisément *autour des pôles de l'Ecliptique*. Il est possible que cette correction essentielle ait été trouvée par lui-même en observant les taches au mois de juin ou de décembre: époque de leur mouvement rectiligne, par projection, sur le disque du Soleil. Mais le Jésuite SCHEINER l'avait précédé par la publication en 1630 de son ouvrage *Rosa Ursina*, où le point capital de la découverte est fixé en disant que l'inclinaison de l'équateur solaire au plan de l'écliptique est de *sept* degrès. Sur cette détermination, la priorité que GALILÉE paraît vouloir s'attribuer dans sa lettre du 9 février 1636, ne lui sera pas accordée par la postérité toujours juste.

P. S. S'il fallait produire une preuve incontestable, que le P. OLIVERI manifestait à M.r BIOT les particularités mêmes qu'il avait lues dans le *second* Volume de l'ouvrage de VENTURI déjà cité, je la trouve, en faisant remarquer, que l'anecdote du *Sonettino amoroso*, exposée par M.r BIOT dans le *Journal des Savans* (cahier du mois de mars 1838), est précisément celle qu'on lit aux pages 180 et 181 du Volume de VENTURI. Mais on sait aujourd'hui (et même depuis 1848), que la prétendue lettre de GALILÉE au P. Vincenzo RENIERI, datée d'Arcetri vers la fin de 1633, est *apocryphe*. Pour s'en convaincre, il faut lire la Note qui accompagne cette lettre à la page 40 du Vol. VII de la Collection complète des œuvres de GALILÉE, et la Note qu'on lit au bas de la page 449 du Volume IX.

Addition au *Post-Scriptum*.

Pour épargner au Lecteur la pêine de consulter les livres que je viens de citer, voici la copie des points essentiels pour la complète intelligence de cette discussion.

1.° Dans la lettre *apocryphe* on fait GALILÉE auteur de cette période; savoir:

« Dopo la pubblicazione de' miei Dialoghi fui chiamato a Roma » dalla Congregazione del S. Offizio, dove giunto a' 10 di Febbraio 1633, » fui sottomesso alla somma clemenza di quel Tribunale e del Sovrano » Pontefice Urbano VIII, il quale non pertanto mi credeva degno della » sua stima, benchè non sapessi far l'epigramma ed il *Sonettino amoroso*. » Fui arrestato, ecc. »

2.° La Note de la page 40 du Volume VII, publié en 1848, est celle-ci:

« Nacque il dubbio al signor Pietro Giordani che questa lettera, » pubblicata prima dal Tiraboschi, poi dal Gamba, e da molti altri, sempre » col nome di Galileo, non fosse stata veramente scritta da quel Filosofo, » sembrandogli che specialmente alcune espressioni fossero improprie allo » stile di lui. Manifestato questo dubbio a S. A. il nostro Gran Duca, egli » fece subitamente scrivere a Roma affinchè si riscontrasse se veramente » (come si riferiva su tutti gli esemplari, e da tutti gli editori di questa » lettera) esistesse l'autografo nella libreria del Duca Gaetani: dopo molte » ricerche fu trovata la lettera, la quale, ben lontana dall'essere l'originale » di Galileo, portava in fondo una confessione in cui dicevasi essere stata » scritta a bella posta da un Duca Gaetani ad oggetto d'ingannare il » Tiraboschi ».

3.° Dans le *Journal des Savans* (Cahier du mois de Mars 1858) le P. OLIVERI commence par dire à M.r BIOT:

« Nous avons lu ici votre article *Galilée* (publié en 1816) de la » Biographie Universelle. Vous y blâmez le jugement porté contre lui par » le Tribunal du Saint-Office. Mais, en fait, le Tribunal n'a condamné » que ses erreurs, car il en avait commis de très-réelles ».

Après la réponse de M.r Biot à cette singulière sortie, le P. Oliveri répond:

« ..... Mais croyez bien que Galilée eut grand tort de se mettre » mal personnellement avec le Pape, qui lui avait montré autrefois beaucoup d'estime. Il l'avait joué dans ses Dialogues, sous le personnage » de *Simplicius;* et, en faisant allusion à la fantaisie qu'on lui attribuait » de composer des vers, il ne se gênait pas pour dire et pour écrire, » que le Pape aimait à rimer *il Sonettino amoroso.* Soyez convaincu que » ces torts personnels ont puissamment contribué à sa perte ».

DELLE

DOTTRINE FILOSOFICHE SUL DIRITTO

DI ANTONIO GENOVESI

MEMORIA

DEL CAVALIERE

PIETRO LUIGI ALBINI

Letta ed approvata nell'adunanza del 7 aprile 1859.

CAPO PRIMO.

Del carattere degli scritti di Antonio Genovesi in generale e in particolare di quelli riflettenti il diritto naturale.

Antonio Genovesi tiene un luogo distinto nella numerosa schiera d'uomini insigni che illustrarono e onorarono l'Italia nello scorso secolo. Mente vasta ed acuta, ingegno gagliardo e potente, coltivò con ardore varii e disparati rami dello scibile, la teologia, le discipline filosofiche, la morale, il diritto, l'economia sociale, e in tutte queste scienze lasciò un'orma luminosa. Egli seppe valersi della varietà e vastità delle sue cognizioni a chiarire e compiere le une colle altre, per quelle attinenze che hanno fra di loro le verità apparentemente più distanti. Giacchè il vero è uno, e le scienze non sono che forme ed esplicazioni della verità ne'suoi diversi aspetti. Le scienze però nelle quali Antonio Genovesi levò di sè grandissima fama, e per le quali si rendette benemerito anche presso i posteri, sono le discipline metafisiche, in particolare però l'economia sociale, e la filosofia del diritto.

Quantunque egli non abbia avuto lunga vita, giacchè nato il 1.° novembre del 1712, morì il 23 settembre del 1769, 57 anni, essa però fu altrettanto più attiva e laboriosa.

Dotato di fino e sano criterio, perfezionato da forti e severi studii, coi quali rifece, come accadde e accade tuttora a non pochi, la sua educazione scientifica e ne corresse i difetti, avvezzo a salire alle supreme ragioni delle cose nelle scienze metafisiche, e a discendere alle regole pratiche della vita civile, non estraneo all'attrito degli affari, avendo anzi per qualche tempo esercitato l'avvocatura, vide sino d'allora con mirabile perspicacia la necessità e l'importanza degli studii tecnici. Comprese quanto fosse utile alla società, che la massima parte della gioventù invece degli studii puramente letterarii e scientifici, nei quali pochi possono riuscire eccellenti, si applicasse alle arti, al commercio, all'industria.

Lamentava altamente il decadimento delle scuole e la degenerazione degli studii vôlti a tutt'altro che a procurare cognizioni praticamente utili. Metteva in derisione, mi valgo delle sue parole, « i D. Chisciotti della re- » pubblica letteraria, combattenti cogli indestruttibili giganti delle chimere » per la gloria vanissima di sottilissimo ingegno, loro Dulcinea del Toboso, che » salgono in alta stima ed usurpano il premio dovuto al vero sapere » (1). Colla voce dalle cattedre che egli tenne, prima di eloquenza in Salerno, poi in Napoli di scienze metafisiche, di filosofia morale, da ultimo di economia civile, e colla penna nelle diverse sue opere, il Genovesi esercitò non poca influenza, non solo nel suo paese, fecondo di eletti ingegni, ma anche nel resto d'Italia, a dare un salutare indirizzo ai buoni studii. Egli ebbe la ventura di passare la sua carriera letteraria in un periodo di tempo assai propizio ad un ingegno della sua tempra, inclinato, per la perspicacia della sua mente, per la elevatezza del suo sapere, per la generosità dell'animo, a censurare gli abusi inveterati, i difetti e le lacune nelle cose di pubblica amministrazione, a proclamare utili innovazioni. Poichè egli passò la sua gioventù e virilità sotto il regno di Carlo Borbone e durante la minorità di Ferdinando IV suo figlio, in quel tempo cioè in cui la somma delle cose civili del regno di Napoli era principalmente nelle mani di Bernardo Tanucci. Il quale, sebbene secondo il severo giudicio che di lui recò un illustre storico, siasi acquistato fama per la guerra che mosse ai privilegii feudali ed ecclesiastici, anzichè per importanti e vaste riforme

(1) Discorso sul vero fine delle lettere e delle scienze.

che lo chiarissero molto innanzi nella scienza dell'economia politica e della pubblica amministrazione, pur nondimeno non se gli può negare il merito di notevoli miglioramenti negli ordini civili e giudiziarii.

Fu a Bernardo Tanucci che Genovesi dedicò le sue lezioni di commercio e di economia civile, attribuendo a lui l'erezione della cattedra fondata da Bartolomeo Interi. A trent'anni, nel 1742, pubblicò Genovesi i suoi elementi di metafisica dettati in latino per uniformarsi all'uso dominante. L'opera fu accolta con grandissimo favore in Italia e fuori di essa: adottata nelle pubbliche e nelle private scuole, gli procacciò tal fama da essere chiamato padre delle scienze metafisiche. Egli si mostrò caldo fautore e zelante difensore di un'onesta libertà di filosofare, che lamentava mancare all'Italia, della quale egli si valse nell'investigare e proclamare il vero di quella libertà, senza temerità che la faccia travviare, senza superbia per cui si renda intollerante d'ogni legge che la governi, d'ogni limite che l'arresti, d'ogni autorità che la freni. Non avrebbe voluto, che, mentre la ragione si svincolava dalle pastoie della filosofia aristotelica, venisse privata de' suoi diritti sottomettendola all'autorità di Cartesio o di Newton.

Non gli mancarono quindi, come accade ordinariamente a chi si leva sopra il comune livello delle mediocrità e tenta nuovi metodi e nuove vie nelle regioni della scienza, invidiosi molesti, violenti detrattori e acerrimi nemici, che facendolo bersaglio di aspre censure e di critiche inurbane tentarono ogni mezzo per togliere credito ai suoi scritti. Taluni, o per mal talento, o per improvvido zelo religioso, che, quando non è temperato dalla prudenza e dalla tolleranza, e illuminato da soda e profonda scienza, trascorre ad eccessi e s'adombra di ciò che non bene intende, lo misero in voce di scrittore pericoloso, lo accusarono di dottrine sospette o erronee, e non tralasciarono di fare ogni sforzo perchè i suoi scritti metafisici fossero messi all'indice dei libri proibiti. Ma non vi si riuscì. Anzi egli dedicò il primo volume della sua opera *Disciplinarum metaphysicarum* al Sommo Pontefice Benedetto XIV.

In varie prefazioni delle sue opere rammenta le censure e le critiche alle quali era fatto segno, e si lagna de' suoi detrattori e censori, ma senza trascendere i limiti della moderazione, e con quella temperanza e dignità che svela un carattere nobile ed una mente elevata, la quale, conscia, senza insuperbirne, della propria superiorità, avendo per unico scopo il vero e il bene, non isdegna di trar profitto anche dalle censure dei

suoi avversarii, ove qualche cosa di ragionevole scorga in esse. Genovesi dovette spesso metter mano alla penna per difendere le sue dottrine, e ne sono una prova le *lettere filosofiche*. Le frequenti dispute a cui lo obbligavano i suoi contraddittori lo avevano assai disgustato delle dottrine filosofiche.

L'amore però alla scienza potè in lui più che l'ostinazione de' suoi nemici: e vedendo il nesso che congiunge i principii più astratti colle cognizioni pratiche, e la necessità di dare alla gioventù una solida istruzione, verso gli ultimi anni di sua vita avea ideato di pubblicare un corso di scienze filosofiche in lingua italiana. Imperocchè egli diceva: *Finchè le scienze non parleranno che una lingua ignota alle nostre madri e balie, non è da sperare che il nostro gentil paese non si vegga rozzo e squallido, vile e servo degli stranieri* (1).

Aggiungeva, che « le scuole debbono servire a far teste per la repub- » blica, non grammatici, nè disputanti pei caffè: a far uomini pieni del » senso di vera e soda pietà, di giustizia, di onestà, di amicizia, per » istruire l'ignorante moltitudine; e ogni arte dove non è sollevata e » governata dalla scienza delle cose e dei costumi fa uomini rissosi, » accaniti, invidiosi, e con ciò malvagi » (2). A quest'intento egli cominciò a pubblicare *la Logica pei giovanetti;* non perchè, com'egli stesso dichiara, « stimasse si potesse riuscire negli studi dialettici, se non dopo fatti » gli altri, ma per non alterare il costume consacrato dall'uso », poi diede alle stampe il *Trattato di scienze metafisiche*. Ma gli mancò il tempo per colorire il suo disegno. A quest'intento aveva pure scritto la *Diceosina*, della quale non potè pubblicare, vivente, che una parte, cioè il primo libro.

In un brevissimo cenno sulla vita e sulle opere dell'abate Antonio Genovesi, premesso alle sue *Lezioni di commercio* o *di economia civile*, pubblicate nel 1820 a Milano nella *Biblioteca scelta di opere italiane antiche e moderne* trovo fatto cenno di un *Piano delle scuole* tracciato da Genovesi per ordine del marchese Tanucci in occasione dell'espulsione dei Gesuiti dal Regno di Napoli, ma non mi riuscì d'averlo; come pure mi riuscirono infruttuose le ricerche per procurarmi le *Memorie* intorno alla sua vita scritte da lui medesimo, delle quali qualche biografo ha fatto

(1) Prefaz. alla logica.
(2) Ibid.

menzione. Ho creduto di premettere queste poche notizie sulla vita e sulle opere di Genovesi che ho ricavate in parte dai suoi biografi, in parte dai suoi scritti medesimi, sia per rammentare i meriti di questo valente filosofo verso i contemporanei e verso i posteri, sia perchè, sebbene io intenda limitarmi a dare contezza delle sue dottrine filosofiche sul diritto, pure, per conoscerle pienamente ed apprezzarle come si conviene, oltre alla *Diceosina*, ove sono più ordinatamente esposte, è d'uopo consultare anche le altre di lui opere.

I principii fondamentali del diritto naturale di Genovesi, o come ora direbbesi, della filosofia del diritto, trovansi nella quarta parte delle sue Discipline metafisiche, venuta in luce nel 1752, nell'opera *De jure et officiis*, che pubblicò nel 1765 per uso de' suoi discepoli, alla quale vanno aggiunte quattro dissertazioni relative al medesimo soggetto, fra le quali è degna di particolar considerazione la prima che ha per tema la questione: *An jus ex potentia existat eaque definiatur;* per ultimo nella *Diceosina o filosofia del giusto e dell'onesto*, nella quale riassunse e spiegò più chiaramente, più compiutamente e con maggior ordine le dottrine sul diritto naturale. Alcune idee intorno a questa materia, le quali giovano a chiarire e compiere la teorica dell'Autore, s'incontrano anche nelle lezioni di economia civile.

E qui non può a meno di recar meraviglia che Genovesi sia stato affatto dimenticato dagli storici della scienza del diritto naturale. Questa omissione non è difficile a spiegarsi negli stranieri. Non è gran fatto a stupirsi che Stahl nella parte storica della sua filosofia del diritto pubblicata per la prima volta nel 1830, e Rossbach ne' suoi *Periodi della filosofia del diritto* venuti in luce a Regensburg nel 1842, abbiano tralasciato di parlare di Genovesi, poichè essi omisero affatto le teorie di filosofia del diritto degl' Italiani. Solo un breve cenno di Machiavelli ha fatto Stahl (1), sebbene egli appartenga ai filosofi politici, non ai giuristi, e Rossbach ha appena nominato Concina e Finetti, annoverandoli, non senza ragione, fra coloro che avversavano la tendenza che in quel tempo prendeva la scienza del diritto naturale (2). Neppure Warnkœnig, che nel libro 1.° della sua filosofia del diritto offre un sommario della storia di questa scienza, mentre cita altri Autori italiani d'opere sul diritto naturale dello scorso

(1) *Die Philosophie des Rechts.* Einleit. III Buch. 1 abschn. Heidelb, 1830.
(2) Rossbach. *Die Perioden des Rechts-Philos.* 2.° periodo, § 142, pag. 156.

secolo, meno conosciuti e di minor merito scientifico, come Finetti, Concina, Lascaris, Guarini, non fa motto dell'Autore della Diceosina.

Quello però che è più difficile a spiegarsi si è che Genovesi sia stato interamente dimenticato anche da Giovanni Carmignani nella sua *Storia dei progressi della filosofia del diritto*. Egli che ha creduto di ricordare gli scritti sul diritto naturale di Burlamachi e di De-Felice, e di farne un esame critico sebben rapido, non ha neppur fatto parola di Genovesi, il quale per altro nelle dottrine di diritto naturale parmi di un merito superiore ai due Autori sovra indicati. E se ha creduto di ragionare delle opere di Beccaria, di Renazzi, di Filangieri, che pur non trattarono di proposito del diritto naturale, solo perchè le teoriche da essi esposte avevano relazione colla filosofia del diritto, non vedesi ragione per cui non abbia consecrato qualche pagina alla Diceosina.

Nè a giustificare quest'omessione si potrebbe addurre la ragione che la Diceosina sia un trattato di etica anzichè di diritto naturale. Poichè, è bensì vero, come vedremo più innanzi, che Genovesi non ha distinto il diritto naturale in istretto e proprio senso dalla morale, ma questo è un difetto comune a tutti gli scrittori di diritto naturale anteriori a Kant, se si eccettuano Grozio e Cristiano Tomasio. Ma se si pon mente alla massima parte delle dottrine che si contengono nelle quistioni che discute, sarà agevole il convincersi, che la Diceosina è un trattato di diritto naturale, sebbene elementare, in cui i soli sommi principii del diritto razionale sono esposti, come in quelli di Eineccio e di Burlamachi, e non differisce nella sostanza delle materie e nel modo della trattazione dalle opere di Puffendorfio e di Wolfio, e di altri pubblicisti dello scorso secolo sul diritto naturale e delle genti, se non pel minore sviluppo che Genovesi ha dato al suo soggetto.

Egli tratta della genesi dei diritti, dell'eguaglianza giuridica degli uomini, dei diritti connaturali od originarii e degli acquisiti, della collisione dei diritti, dell'origine del dominio delle cose, dell'acquisto originario e dell'acquisto derivativo del medesimo, dei testamenti e della successione ab intestato, e ne indaga il fondamento; discute qual sia la ragione suprema da cui deriva la forza obbligatoria dei contratti, e ne esamina partitamente la natura e le conseguenze giuridiche secondo la ragione. Espone parimenti le obbligazioni nascenti dai fatti illeciti che recano danno agli altri, il fondamento e i limiti della difesa; si fa ad investigare il fondamento del diritto di punire, stabilisce le regole fondamentali dei

giudizii. L'Autore della Diceosina, dopo aver trattato quelle materie che alcuni comprendono sotto la denominazione di diritto individuale, ossia le regole dei rapporti reciproci degli uomini, individualmente considerati, tratta del diritto sociale. Quindi nel libro secondo ragiona dell'origine della società, del matrimonio, come fondamento della civile società, della patria potestà e dei diritti e doveri che vi sono annessi. Passando poscia alla società civile, tratta della natura e del carattere delle diverse forme di politico reggimento, della sovranità e de' suoi diritti interni ed esterni, e per conseguenza non omette di discorrere del diritto di guerra e di pace, delle alleanze e confederazioni, delle ambascerie. Laonde egli viene delineando i principii elementari del diritto internazionale in tempo di pace e in tempo di guerra, toccando alcune delle quistioni più importanti ch'esso presenta.

Tutte queste materie sono quelle appunto che formano il soggetto dei trattati antichi e recenti di diritto naturale.

È bensì vero che nella Diceosina s'incontrano alcune materie estranee alla sfera del diritto razionale preso in istretto senso, come sarebbero i doveri teologici, ossia verso Dio, i doveri verso se stesso, i doveri di pura beneficenza. Ma ciò deriva dal non avere distinto il diritto dalla morale. Per la stessa ragione la trattazione di simiglianti materie si trova in altri trattati di celebrati Autori di diritto naturale del secolo xvii e del xviii, come in quelli di Puffendorfio, di Wolfio, di Burlamachi. Quest'ultimo in particolare ne' suoi *Principii di diritto naturale e politico*, tratta assai diffusamente della virtù, della coscienza, dell'esistenza di Dio e dell'immortalità dell'anima (1), disquisizioni che ora si terrebbero giustamente affatto inopportune in una trattazione dei principii del diritto filosofico. Wolfio, nel suo *Diritto di natura*, tratta pure e più estesamente di Genovesi dei doveri verso Dio e verso noi stessi.

Del resto, che Genovesi ravvisasse una differenza tra i principii di giustizia sociale e le regole puramente etiche, le quali mirano alla perfezione morale dell'individuo, si può ritrarre dal confronto della *Diceosina* coll'altra opera da lui pure dettata sulla *Filosofia morale*, anteriore però a quella.

Egli ha il merito, dopo Gio. Batt. Vico, suo concittadino e contemporaneo, di aver fatto conoscere il nesso che congiunge la metafisica

(1) Principii di diritto natur. Parte 2ª, cap. 1 e 2; cap. 9, 12 e 13.

colla morale, questa colle scienze giuridiche. Non si potrà pertanto contestare, che in alcuni capi della seconda parte delle discipline metafisiche, nell'opera *De jure et officiis* e segnatamente nella Diecosina, abbia espresso non poche idee luminose sui principii razionali del diritto. Anzi la *Diecosina* può a ragione essere considerata come il primo tentativo fattosi in Italia di un'esposizione ordinata di diritto razionale, sebbene vi siano frammiste materie che più propriamente all'etica appartengono. Laonde un distinto Professore dell'Università di Padova in un *Corso di diritto naturale* (1) annovera Genovesi fra i più celebri scrittori di questa materia nel secolo passato, e un nostro illustre collega nella *Storia della legislazione italiana* rendette la dovuta giustizia al merito di questo insigne pubblicista (2).

Genovesi nella quarta parte delle discipline metafisiche fece precedere alla sua teorica un'esposizione storico-critica dei principali sistemi sul diritto naturale più celebri alla metà del secolo XVIII, quali erano quelli di Obbes, Spinoza, Grozio, Puffendorfio, Cumberland, Eineccio, Wollaston, Asley Sickes, Kœler e Wolfio. Non vi si vede fatto cenno del sistema di Cristiano Tomasio, che pure aveva pubblicato i suoi *Fondamenti del diritto di natura e delle genti, dedotti dal senso comune* sino dal principio del secolo; opera che segnò un progresso così importante nella storia della scienza del diritto naturale. Probabilmente il filosofo napoletano non ebbe contezza di tale opera, sebbene qualche citazione di Tomasio dimostri ch'egli conoscesse i suoi scritti anteriori, i quali non avevano molta importanza scientifica almeno nella teorica razionale del diritto. Genovesi dimostrò con molta chiarezza l'erroneità delle dottrine morali e giuridiche di Obbes, e forse pel primo, almeno in Italia, notò ch'egli aveva dedotto la legge regolatrice delle azioni umane dalla natura dell'uomo considerata non ne' suoi istinti primitivi, ma nelle sue tendenze corrotte e degenerate. Svelò il vizio radicale del sistema Obbesiano, di non ammettere principii assoluti di giustizia indipendentemente da ogni legge positiva, la falsità de' suoi principali pronunziati, le funeste conseguenze pratiche che ne discenderebbero, ed osservò, come alcune massime da lui stabilite, giuste in se stesse, mal si connettano co' suoi principii.

Confutando il sistema di Spinoza, dimostrò come il suo panteismo sovverta ogni principio di diritto e di morale.

---

(1) Tolomei, *Corso di diritto naturale*. Tom. I, pag. 111.

(2) Sclopis, *Storia della legislazione ital.* Tom. III, pag. 281.

Per rapporto agli altri sistemi, Genovesi adempie l'ufficio di fedele espositore, anzichè quello di critico. Lo dichiara egli stesso colle seguenti parole: *Nos praecipuorum sententias in medium proferemus, lectoribusque optionem faciemus. Nam etsi in aliam atque aliam doctrinam saepe praeponderamus, agnoscimus tamen, nullam earum, quae enarraturi sumus, sententiarum esse, ex qua commodissime officia hominum derivari nequeant* (1).

Torna qui opportuno il notare a lode di Genovesi, ch'egli seppe cogliere la natura e lo spirito della dottrina di Grozio, cioè che il pubblicista Olandese non aveva per iscopo se non di stabilire un principio da cui dedurre le norme regolatrici dei rapporti degli uomini fra di loro e segnatamente quelle riflettenti i rapporti delle nazioni e dei loro Reggitori; che quindi non dovevasi aspettare un principio di diritto naturale, da cui si avessero a dedurre i doveri verso Dio e verso noi stessi; fa poi osservare giustamente, che il pronunziato di Grozio della sociabilità, come principio supremo del diritto, non solo non esclude siffatti doveri, ma con essi si concilia (2). Notò anzi che il libro di Grozio *De iure belli et pacis* era stato il primo tentativo di una *Diceosina*.

L'opera di Genovesi che porta appunto questo titolo, ossia *Filosofia del giusto e dell'onesto*, è un trattato di diritto naturale preso in senso ampio e generale, come l'intese lo stesso Grozio là dove dice che: *ius naturae non ea tantum respicit quae dictat iustitia, sed aliarum quoque virtutum, ut temperantiae, fortitudinis, prudentiae actus in se continet* (3). Il diritto naturale o razionale, come ora viene inteso dai più accurati scrittori di questa materia, nel senso cioè di legge giuridica razionale, Grozio lo qualifica *ius naturae sociale*, o, *ius proprie et stricte dictum*. Per altro nell'opera or ora citata Genovesi ha riassunto e meglio ordinate e spiegate le dottrine giuridiche razionali che aveva trattate negli scritti metafisici, omettendo o solo compendiando le parti che appartengono propriamente all'etica.

---

(1) *Discipl. metaph.* Part. 4, lib. I, cap. 8, § I.
(2) Discipl. metaph. cit. cap. 8, § 6, Tom. IV, pag. 86.
(3) De I. B. et P. lib. 2, cap. I, § 9.

CAPO SECONDO.

Teorica di Genovesi sul principio fondamentale del diritto naturale e sulla genesi dei diritti.

Genovesi prende le mosse dall'esame della natura dell'uomo considerato sotto l'aspetto fisico e morale, dalle cause motrici della sua volontà e dal suo fine che ripone nella felicità, la quale nella vita presente non può consistere che nella minima somma dei mali e nella speranza del meglio. Osservando che i motori più gagliardi e potenti dell'umana volontà sono l'amor proprio, donde emerge la *forza concentrica*, e l'amor della specie, da cui scaturisce la *forza espansiva*, avverte come la felicità degl'individui e delle nazioni dipenda dal trovare la legge d'equilibrio tra queste due forze, a fine di farle cospirare al medesimo scopo, il minimo possibile dei mali. Ora questa legge d'equilibrio è la seguente: *serbate i diritti di ciascuno, anzi soccorreteli quanto sapete e potete.*

Il principio non era certamente nuovo. Riconosce l'Autore della Diecosina che il pronunziato di dare a ciascheduno il suo diritto era stato e dagli antichi e da alcuni pubblicisti del suo tempo considerato come il fondamento di tutti i doveri. Ma soggiunge che non era stato, nè dagli antichi, nè dai recenti filosofi chiaramente spiegato e dimostrato qual fosse questo diritto che la natura comanda di mantenere illeso, quali siano i diritti che con noi nascono, quali i diritti che dai primitivi derivano e che si possono in altri trasferire (1).

Tutta la trattazione del diritto naturale doveva, secondo Genovesi, prender le mosse dalla questione, se per legge della natura qualche cosa sia in nostra proprietà quando nasciamo. Poichè è diritto, egli dice, tutto ciò che per legge di natura è in proprietà di alcuno, per guisa che ripugni sia di altri, e di cui siamo conscii e liberi dispositori eccettochè la natura o un patto vi si opponga.

« L'uomo è uno degli esseri di questo mondo: dunque ha essenza e proprietà diverse da tutto quello che non è uomo, quantunque abbia

(1) Parum accurate tum veteres, tum receotes Philosophos explicuisse et demonstrasse certus sum, quid hoc sit ius quod incolume servandum natura praecipit, quae nobiscum natura nascuntur, quae ex primaevis deriventur, transferri in alios ab aliis possunt, quae servandorum lex atque sanctio. *Discipl. metaphys.* Part. IV, lib. 1, cap. 15, § 2.

attinenze per le quali è armonicamente collegato con ciò che lo precede, lo segue e lo circonda. Quello pertanto per cui l'uomo è uomo e non altra cosa, è *proprietà generica* dell'uomo. Ma la natura non produce l'uomo in genere, bensì individui: i generi e le specie sono opera della ragione. Dunque ciò che è proprio dell'uomo è proprio dell'individuo o sia della persona, e viceversa, ciò che è proprio della persona è proprio dell'uomo, poichè ogni individuo umano è distinto da ogni altro individuo, come l'uomo genere ossia l'umanità è distinta da qualunque altro ordine di esseri. In ogni persona adunque sono una medesima cosa, purchè non si prendano astrattamente, proprietà di genere e proprietà di persona, ossia ogni uomo è uomo per le proprietà d'uomo, e questo o quell'uomo per le proprietà individuali, e perciò se due persone sono due, non una, le loro proprietà, ancorchè simili, sono così distinte come sono le loro persone » (1).

« Or quali sono queste proprietà? Esse sono di tre sorta. Alcune le portiamo con esso noi nascendo. Tali sono le doti del corpo e dell'animo, la vita, la libertà, un diritto a valersi delle cose esteriori pei nostri bisogni. Siccome poi quello che naturalmente proviene dall'essenza e proprietà di una cosa dee riputarsi sua proprietà, ne segue che quei beni di cui avremo fatto acquisto coll'uso delle nostre facoltà e proprietà, senza togliere o scemare la proprietà di altri uomini, debbono essere considerati nostra proprietà poco dissimili da quelle che portiamo con noi nascendo, non essendo diverso invaderle senza diritto, dal confondere i limiti, le proprietà e l'ordine delle cose ».

« Inoltre gli uomini possono fra di loro per mutuo accordo, cioè per patti e contratti trasferire da uno all'altro certe proprietà separabili dalla loro persona, od alcune modificazioni di queste loro proprietà per reciproco loro vantaggio. Le proprietà acquistate per questo modo non ci apparterranno meno legittimamente di tutte le altre, non altrimenti che gl'innesti delle piante divengono proprietà della pianta sostentatrice ».

« Vi sono adunque tre sorta di proprietà: 1.° quelle che l'uomo porta con sè nascendo e sono da lui inseparabili quanto all'essenza, ancorchè la loro modificazione, il loro uso e governo possa appartenere ai genitori, e alla pubblica potestà pel suo stesso vantaggio; 2.° quelle che l'uomo acquista coll'esercizio ed esplicamento delle prime: a questa categoria appartengono

(1) Discipl. metaphys. Part. IV, lib. 1, cap. 15, § 3-7. Dicensina, lib. 1 cap. 3 § 3, 4 e 5.

le occupazioni ed accessioni d'ogni maniera; 3.° quelle che ogni uomo si procaccia coi patti e contratti senza lesione degli altri » (1).

Ma queste proprietà costituiscono esse altrettanti diritti ossia subietti di diritti?

Genovesi per risolvere questa questione osserva, essere la legge dell'universo, la legge di natura, che attribuisce a ciascuno certe e determinate proprietà e non può averle attribuite se non perchè siano mantenute incolumi e servano al bene e alla felicità di ciascun essere a cui appartengono. Ne segue pertanto che la legge di natura, la quale è la legge di Dio, ed esprime la sua volontà coll'attribuire ad ogni umano individuo delle proprietà per cui si distingue da ogni altro, e pel suo ben essere affinchè raggiunga il suo fine, vieta con ciò stesso a tutti gli altri di usurpare, o di turbare tali proprietà contro la volontà della persona proprietaria, o di renderle inette all'uso pel quale sono destinate, sia che trattisi di proprietà ingenite, o di proprietà acquistate per virtù di quelle, o da altri trasferite. Tali proprietà adunque danno origine ad altrettanti diritti o facoltà morali, e quindi l'uomo ha dei diritti ingeniti primitivi, dei diritti acquistati coll'esercizio dei primitivi, e dei diritti traslatizii. La legge della natura si distingue da questi diritti; essa è la norma regolatrice e la custode di essi (2). Chiama pertanto diritto la facoltà di servirci liberamente di quello che ci appartiene in proprietà (3).

Questa genesi dei diritti dedotti dalla nozione di proprietà, è, per quanto a me sembra, la parte più originale e più notevole della dottrina Genovesiana. Nessuno prima di lui aveva dedotto con maggior precisione e con maggiore solidità di ragionamento stabiliti i diritti connaturali dell'uomo, nè fatto conoscere il nesso tra i diritti connaturali e gli acquisiti. Poichè se i diritti acquisiti non hanno radice in diritti preesistenti, indipendentemente da qualunque fatto volontario, perdono ogni loro valore ed importanza.

Altri prima del giurista filosofo di Napoli, specialmente Cristiano Tomasio, avevano ragionato dei diritti connati dell'uomo, ma non erano

---

(1) Discipl metaph., cit. loc. Diceos., cit. cap. 3, § 5. Lezioni di commercio o di economia, part. 1, cap. 1, § 10 e 11.

(2) Discipl. metaph., cit. cap. 15, § 12-19.

(3) Lezioni di commercio, part. 1, cap. 1, § 10. Diceos., cit. cap. 3, § 9. Osserva però, che: *non è la sola proprietà che fa un diritto, ma una proprietà affidata alla ragione.* Ibid., lib. 1, cap. 5, § 13.

stati con così logico rigore dedotti, molto meno con tanta accuratezza determinati e stabiliti.

Così Tomasio, che è risguardato come il più ardito ed originale giurista filosofo prima di Kant, riduce i diritti connaturali dell'uomo alla comunione primitiva e alla libertà. Ma la comunione primitiva è una supposizione chimerica. Ammettendola per vera, sarebbe stato un diritto connaturale temporario, e quindi contraddittorio, a meno che sotto questa frase voglia intendersi il diritto di spiegare la propria attività sulle cose esteriori, non ancora da alcuno occupate per volgerle a suo vantaggio. Nel qual caso si avrebbe un concetto giusto assai impropriamente espresso. La libertà, se si considera in senso negativo, cioè come esenzione da ostacoli, non sarebbe, a parlare esattamente, un diritto, ma la condizione all'incolume esercizio di qualunque diritto. La libertà intesa in senso positivo, cioè come l'attività dell'uomo spontaneamente esplicantesi pe'suoi legittimi fini, sarebbe l'essenza d'ogni diritto. È noto che Kant, il quale sviluppò molte idee enunziate da Chr. Tomasio, ravvisò nella libertà il diritto originario e primitivo dell'uomo.

La nozione della proprietà, come principio determinatore di tutti gli umani diritti, venne a' giorni nostri ampiamente e con grande acume sviluppata e messa in più chiara luce da Antonio Rosmini nella sua *Filosofia del diritto* (1), come teoria affatto nuova. Quello però che può ravvisarsi di nuovo in essa si è l'aver dimostrato come la proprietà, nel suo vero senso, non sia concepibile che in un essere intelligente, e quindi inchiuda anche il concetto di libertà inseparabile da quello di diritto. Il germe di qualche altra teorica di Rosmini s'incontra pure in Genovesi.

La teorica del filosofo napoletano sulla genesi dei diritti è affatto diversa da quella di Cristiano Wolf suo contemporaneo, anzi procede in senso opposto. Poichè mentre quegli deduce le obbligazioni dai diritti, questi fa discendere i diritti dalle obbligazioni (2). Ciò è vero, primamente nel senso che il diritto soggettivo, come potestà legittima, suppone già la distinzione tra giusto ed ingiusto, e quindi l'esistenza di una legge, la quale diriga l'umana attività e serva a far discernere le azioni lecite dalle illecite. Poichè

(1) Tom. I, pag. 183 e seg.

(2) Wolf, *Ius nat. et gent.*, § 23-26. Ibi. *Ius oritur ex obligatione, obligatio prior est iure, et si nulla esset obligatio, nec ullum ius foret.* — La teorica che il diritto deriva dal dovere, e che Rosmini attribuisce a merito del secolo XIX, venne da questo insigne Filosofo sviluppata, ma in maniera diversa da Wolf e più conforme al vero. V. la sua *Filos. del diritto*, Vol. I, pag. 153.

non si può ammettere diritto, ossia legittima potestà di fare cosa essenzialmente illecita, quantunque per avventura non offenda il diritto di un altro; secondamente nel senso, che ciò che per noi è un dovere, una morale necessità di fare o non fare qualche cosa, assume nei rapporti esteriori coi nostri simili carattere di un diritto, in quanto che abbiamo e sentiamo in noi legittima potestà di non essere molestati o impediti nell'adempimento dei nostri doveri anche puramente morali, e neppure violentati a praticarli. Onde che il diritto nella sua più ampia significazione comprende non solo ciò, che *lecitamente possiamo*, ma anche ciò, che *moralmente dobbiamo* fare. Questo concetto del diritto non è certamente espresso da Genovesi, ma nulla presenta di ripugnante alla sua dottrina. Non è invece esatta la sentenza di Wolf, che ogni diritto si risolva nell'adempimento di un'obbligazione.

Genovesi ha lucidamente stabilito nella prima delle sue dissertazioni *De lege naturali* la distinzione tra il diritto e la forza o il potere, dimostrando come quello sia il regolatore dell'una e dell'altro. *Ius non ex factis hauriendum est, quae saepe discrepant, semper in ambiguo sunt; sed ex iure expendenda sunt facta ..... iure potentia circumscribitur, non potentia figitur ius, estque iniuria quidquid sibi potentia praeter ius adrogat* (1).

Con mirabile precisione ed esattezza ha pure esposta la nozione dell'eguaglianza di diritto, conciliandola colle disuguaglianze di fatto. Egli rimprovera giustamente coloro che si ridono dell'egualità naturale degli uomini e dell'unità della specie, senza ammettere la quale, per verità, mal potrebbesi stabilire anche l'eguaglianza giuridica.

Siccome pertanto i diritti connati sono tutti nella loro essenza eguali in ogni umano individuo ed è in ciascuno di essi la natura umana, ne emerge l'eguaglianza di diritto tra uomo e uomo. Poichè, come osserva il nostro A., saranno disuguali le quantità delle proprietà, ma non la natura di queste proprietà. Dunque, il diritto generale di uno non sarà più diritto di quello di un altro (2). La distinzione tra il diritto e il suo oggetto rende più chiara quest'importante e cardinale dottrina. Giacchè possono variare gli oggetti nelle loro differenze e quantità, ma non varia

(1) De lego natur. Dissert. I, § 12 e 15.

(2) Diceosina, lib. I. cap. 3, § 7 e 8. Veggasi specialmente il § 19 e il § 8 del capo 9, ove fa osservare che, « se tutti gli uomini sono di natura eguali o simili, seguita che abbiano eguali o » simili diritti ingeniti; dunque sono eguali le reciproche ingenite obbligazioni ».

il diritto nella sua essenza, non essendo maggiore, nè più inviolabile il diritto di proprietà del ricco che possiede vasti poderi e ampii palagi, di quello del povero che possiede un campicello e un meschino abituro. La teoria di Romagnosi sull'eguaglianza di diritto esposta nel *Primo assunto sul diritto naturale* (§ 22 e 23), non è in sostanza che l'esplicamento delle idee emunziate da Genovesi su questo soggetto, e la sua formola per indicare l'eguaglianza giuridica, che gli uomini nascono con *diritti simili ed egualmente inviolabili*, non è che l'espressione più chiara e più esplicita del concetto di Genovesi. Il quale osserva che, nell'inegualità fisica delle persone, delle famiglie, degli stati, può esservi un'egualità « di simi- » litudine di proprietà e perciò di diritto, e che perciò sia così una » ingiustizia quella di violare le maggiori proprietà, come quella di violare » le minori ». Conseguenza dell'eguaglianza di diritto è il pronunziato degno di nota pel tempo in cui fu messo innanzi, cioè che secondo il gius di natura tutte le arti sono liberali, e se qualche distinzione è a farsi, è quella tra le arti utili e le nocevoli, le quali per altro sarebbero contro la legge di natura (1).

Il filosofo napoletano pertanto, dalla distinzione degli esseri di cui si compone l'universo, deduce la distinzione delle proprietà loro rispettive, vale a dire di ciò che è proprio di una cosa, in guisa che non potrebbe convenire ad un'altra, senza confondere la diversità delle sostanze e delle essenze. Data l'esistenza di queste proprietà egli viene determinando i diritti di Dio e degli uomini e risale alla legge naturale espressa colla formola sovra riferita, moderatrice e custode di questi diritti. « Poichè se abbiamo queste proprietà, siccome nostra essenza, e le abbiamo per l'ordine dell'universo e le sentiamo e ne siamo gelosissimi, ne segue, che, ci sono, com'egli s'esprime, per la legge del mondo raccomandate ed assicurate. Sarebbe invero contraddittorio, che l'ordine del mondo e la legge universale ci desse queste proprietà per cui siamo quel che siamo, che ce le facesse sentire e amare, ci facesse conoscere, che col conservarle si conserva l'ordine, senza volercele intanto assicurare, non potendo la legge dell'ordine non essere garante dell'ordine e di ciò che lo costituisce » (2).

---

(1) Diceos., lib. I, cap. 19, § 23. Egli distingue le arti in *primitive* o *creatrici*, quali sono la caccia, la pesca, la pastorizia, l'agricoltura, la metallurgia, e le *miglioratrici*, quelle cioè che migliorano i materiali apprestati dalle prime. Ibid. § 24.

(2) Diceos., lib. I, cap. 3, § 9.

Viene poi mostrando, come oltre al diritto di esser sicuri delle nostre proprietà, diritto perfetto a cui corrisponde un dovere negativo, che è sempre in poter d'ognuno di adempiere, v'ha un diritto di soccorso sebbene imperfetto, al quale risponde un dovere positivo non assoluto nè sempre in poter nostro. Deduce l'esistenza di questo diritto dalla somiglianza di natura reciprocamente bisognosa, dalla simpatia, dall'utilità derivante in tutti dal vicendevole soccorso.

Per tal modo stabilisce Genovesi i due membri della sua formola, con cui esprime il principio del diritto naturale, cardine della sua teorica.

Questa legge, che comanda di serbare i diritti di Dio, i diritti nostri, i diritti degli altri a noi per natura eguali, conchiude Genovesi, è vera, perchè fondata sulla natura; è chiara, perchè sentita dalla coscienza di tutti, viva e ripugnante alle offese, inquieta dei mali altrui; è certa, perchè non si può dubitare, se noi siamo, se siamo quel che siamo, se sentiamo quel che sentiamo; è obbligatoria, perchè infelice chi non l'osserva (1).

Non si può contestare, che questa parte cardinale della teorica di Genovesi sia splendida per molta luce di vero, massime fatta ragione dei tempi in cui egli scriveva.

Ma il primo e principale difetto di questa teorica si è, come ho già avvertito, di non avere segnata la distinzione tra la morale e il diritto.

Secondamente, il principio fondamentale della teorica Genovesiana non è nè sufficiente, nè esatto per costituire la base della morale. Imperocchè posti i diritti, se ne deducono i doveri corrispondenti. Ma nella morale il concetto predominante è quello del dovere. La nozione del diritto come potestà conforme alla ragione, che è in arbitrio dell'individuo di esercitare o no, racchiude in sè quella del dovere, come fu già osservato.

Egli è ben vero che il principio di Genovesi è espresso con una formola imperativa, che indica perciò una necessità morale, il dovere: *serbate i diritti ecc.* Ma la legge morale, della quale si volle enunciare colla succennata formola il vero supremo, il sommo dei doveri che tutti gli altri in sè riassume, mira al bene assoluto, ed esige ben più che il rispetto ai diritti e il soccorso ai bisogni altrui. La formola non indica l'essenza dell'atto morale, che consiste nel fare il bene per se stesso.

---

(1) Diceos., ibid., § 15.

L'imperfezione del principio di Genovesi si manifesta principalmente nella deduzione dei doveri verso Dio, ove, per attenersi al medesimo, è condotto ad ammettere in Dio, come nell'uomo, dei diritti ingeniti e dei diritti acquisiti. Arrogesi, che il concetto di diritto per significare gli attributi e la podestà divina non è nè proprio nè esatto.

La prima parte della formola di Genovesi servirebbe meno incompletamente ad esprimere la legge giuridica, la quale può, meglio della morale, essere considerata la legge regolatrice e protettrice dei diritti. Infatti la legge giuridica, purchè siano effettivamente rispettati i diritti altrui, o attivamente o passivamente secondo la natura di essi, non bada all'intenzione dell'agente; ad essa basta che il bene oggetto del diritto rimanga intatto. Laddove la morale è la legge dei doveri e non si tien paga del rispetto esteriore dei diritti. E se essa estende la sua azione anche sull'esercizio dei diritti, egli è perchè non v'è atto libero dell'uomo il quale sfugga al suo impero. Perciò la morale tempera e modera l'esercizio dei diritti in quanto lo esige il bene assoluto, il perfezionamento morale dell'uomo e l'ultima sua destinazione.

L'altra parte della formola si riferisce al soccorrere i diritti altrui. Ma il diritto di soccorso, come lo chiama Genovesi, il diritto d'avere l'aiuto altrui, quando ce ne occorra il bisogno, che perciò meglio chiamerebbesi diritto al soccorso, essendo imperfetto, non ammettendo cioè coazione, non ha propriamente carattere di vero diritto.

La seconda parte della formola non bene si connette colla prima. Giacchè questa comprende un dovere giuridico negativo, assoluto, l'altra un dovere morale positivo. Inoltre il diritto di soccorso più difficilmente si potrebbe connettere col principio di proprietà, da cui Genovesi dedusse i diritti dell'uomo. Poichè col negare il soccorso di cui altri abbisogni, non gli si toglie nulla che sia in sua proprietà.

Egli è vero, che il dovere morale di soccorrere il nostro simile a fronte di tutti gli altri assume il carattere di un diritto connaturale, il cui esercizio non ci può essere da alcuno legittimamente impedito. Ma l'eguaglianza giuridica tra uomo e uomo nei rapporti puramente individuali esige, che si lasci a ciascheduno l'esercitare questo diritto se, come e quando lo giudichi.

Dico *nei rapporti puramente individuali*, cioè tra pari e pari. Poichè nei rapporti sociali la cosa procede altrimenti.

La legge giuridica non può attuarsi pienamente che in società, per

la stessa natura sociale dell'uomo. La società politica è la forma dell'umano consorzio destinata all'attuazione del diritto. E siccome il concetto di società inchiude cooperazione ad un bene comune, il diritto sociale non mira soltanto a far sì che siano rispettati i diritti di tutti, ma mira inoltre a far cooperare i socii tanto all'incolumità dei diritti, quanto al loro esplicamento e coordinamento al bene comune. Quindi avviene che il dovere puramente morale di soccorrere altrui, di coadiuvare al bene degli altri, diventa giuridico entro certi limiti nel civile consorzio. Ma allora non è l'individuo che astringa il proprio simile a prestargli soccorso. È l'autorità sociale, che, come interprete ed esplicatrice del diritto, lo viene attuando nel suo ufficio negativo di mantenere incolumi i diritti, e nel suo ufficio positivo di far cooperare i socii alla tutela e al bene comune.

Un'altra menda che si può ravvisare nella teorica di Genovesi si è di dedurre la forza obbligatoria della legge naturale dai beni e dai mali che possono, anzi debbono necessariamente conseguitare dall'osservanza o dall'inosservanza della medesima, provengano questi beni o mali dall'ordine stesso naturale provvidenziale, ovvero da legge positiva divina od umana che stabilisca pene o ricompense.

La forza obbligatoria della legge, sia morale, sia giuridica, sta propriamente nella stessa essenza del bene o del male, del giusto o dell'ingiusto in quanto è conosciuto dall'intelligenza, la quale apprende con ciò stesso la morale necessità che spinge la volontà ad uniformarsi al comando della legge estrinsecando co'suoi atti il riconoscimento interno del bene e della giustizia, evitando il male e l'ingiustizia, fatta astrazione dalle conseguenze utili o dannose, piacevoli o dolorose. Ma a rendere efficace la legge è mestieri un impulso alla volontà. Quest'impulso è dato dall'attrattiva dei beni che accompagnano l'obbedienza alla legge, dal timore dei mali che tengono dietro alla disobbedienza alla medesima. Sono questi beni e questi mali la sanzione della legge. È dessa che rende efficace la sua autorità intrinseca. Laonde Genovesi avrebbe confuso la forza obbligatoria della legge colla sua sanzione. Certo non è concepibile una legge senza sanzione, perchè ogni legge essendo destinata all'effettuazione di un ordine, la deviazione da essa dee necessariamente produrre un disordine fisico, morale o sociale e quindi un male, secondo la natura della legge e dell'ordine a cui essa si riferisce. Certo è pure, che l'osservanza esatta e compiuta della legge regolatrice dell'umana libertà, dee condur l'uomo a quella felicità, a cui per propria natura aspira, ma che non è

ottenibile in questa vita; e che l'osservanza della legge giuridica dee avere per risultamento, anzi è l'unico mezzo per conseguire nel consorzio civile la tranquillità, il ben essere, la prosperità comune. Ma questi sono gli effetti dell'osservanza della legge morale e della giuridica; i quali palesano l'intimo nesso tra il bene morale e il bene sensibile od eudemonologico, tra la giustizia e l'utilità individuale e sociale.

Dall'avere però Genovesi confuso la forza obbligatoria della legge naturale colla sua sanzione, dall'avere dedotta la necessità morale di uniformare le nostre azioni a questa legge, dalla felicità che l'obbedienza a'suoi precetti arreca, e dall'infelicità che dalla violazione dei medesimi ne deriva, non vuolsi inferire che Genovesi debbasi classificare tra quei filosofi, i quali l'utile col giusto identificano, sistema in generale divenuto dominante nello scorso secolo in Francia, non però in Italia, la quale ebbe ingegni troppo potenti, gagliardi e indipendenti per farsi discepoli della filosofia superficiale e leggiera prevalente allora presso i nostri vicini al di là delle alpi. Una tale censura sarebbe affatto ingiusta e manifestamente smentita dallo spirito generale e da molti luoghi degli scritti metafisici e morali del filosofo napoletano. Egli vide l'intima e strettissima connessione ed armonia tra la giustizia, la virtù, e l'utilità, la felicità. Si studiò bensì di dimostrare col ragionamento e coi documenti della storia, che l'osservanza della legge naturale può sola formare la vera nostra felicità, costituire il nostro vero utile, che senza giustizia non vi è vera utilità per gl'individui, nè prosperità per le famiglie e per le nazioni. Ma vide e proclamò senza ambagi l'intrinseca ed essenzial distinzione tra il concetto della virtù e quello della felicità, tra la giustizia e l'utilità (1).

Infatti, dopo avere notato l'accordo provvidenziale tra la virtù e la felicità, tra la giustizia e l'utilità, fa la seguente riflessione: « Potrebbe » taluno qui dire: val tanto regolar la vita colla massima dell'utile: *se* » *piace e' lice;* che del giusto: *serba i diritti.* Rispondo che no: perchè » la massima *serba i diritti,* non è in teoria soggetta a veruna incertezza, » dubbio, falsità, per essere essa semplicissima, dove non si prenda per

(1) V. p. es. *Discipl. metaph.*, part. 4, lib. 2, cap. 15, § 52 e 56, ivi: *Lex norma sit necesse est, non sensus, non utilitas, non cupiditas. Ecce malorum scatebra.* V. De lege natur. diss. 1, § 9, 10 e 11. Parimenti dice in altro luogo: *Ogni politica, ogni economia che non è fondata sulla giustizia, sulla virtù, sull'onore, distrugge se stessa.* Diceos., lib. 1, cap. 10, § 8.

» diritto che quel che è in proprietà di ciascuno . . . . . cosicchè se vi è » qualche oscurità o confusione, è in sul fatto e nella collisione dei doveri, » non sulla regola. Ma l'utile è sempre per noi un'idea complessa della » vera e della falsa utilità composta di tanti rapporti e soggetta a tante » alterazioni per riguardo delle nostre passioni e della moltiplicità dei » particolari interessi, che non potrebbe essere una regola costante e » sicura » (1).

Questi pensieri sono abbastanza chiari ed espliciti e basterebbero a far conoscere come Genovesi non appartenga alla schiera degli *utilitarii*. Il suo sistema di diritto filosofico, quantunque misto di morale, vuol essere collocato fra i sistemi razionali, fra quelli cioè coi quali si cercò dedurre la regola suprema delle umane azioni dalla ragione, e di fermarla in un vero assoluto ed irrepugnabile. Onde che anche per questo rispetto la teorica di Genovesi merita una particolare considerazione.

CAPO TERZO.

Esame della teoria di Genovesi sul diritto di proprietà, sulla trasmissione dei diritti e sulla podestà di punire.

Togliendo ora ad esporre la dottrina di Genovesi intorno ai diritti in particolare e sulla loro trasmissione, tralascierò di far cenno di quelle parti, le quali appartengono esclusivamente alla morale, e mi restringerò a toccare i punti più importanti della sua filosofia giuridica, affine di farne conoscere il carattere.

La teoria del diritto di proprietà individuale è una delle più importanti e cardinali in un sistema di diritto razionale. Fu detto con ragione da un insigne economista de' nostri giorni, che il diritto di proprietà individuale è nell'ordine economico, e si potrebbe affermare anche dell'ordine giuridico, ciò che è il sole nel nostro sistema mondiale (2). Tant'è vero, che i socialisti e i comunisti, sopprimendo totalmente o parzialmente la proprietà individuale, sono inevitabilmente condotti a sconvolgere da

(1) Diceos , lib. 1, cap. 3, § 19.
(2) Baudrillard.

rapo a fondo tutto l'ordine sociale nei rapporti privati come nei rapporti pubblici, ad alterare affatto lo stesso ufficio della sovranità politica.

Genovesi parte dal supposto erroneo, o per lo meno dall'inesatto concetto generalmente ammesso dai pubblicisti del suo tempo, della comunione primitiva dei beni anteriore alle individuali appropriazioni. Ma si scosta dalla dottrina allora dominante, che fondava il diritto della proprietà privata sopra una convenzione tacita od espressa, o la derivava dalla legge positiva. Egli considera questo diritto come naturale, avente un'esistenza indipendente dalle convenzioni e dalle leggi umane, cioè come il risultamento dell'esercizio del diritto inerente ad ogni uomo di valersi delle cose esterne appartenenti a nessuno, ma destinate a beneficio di tutti gli uomini per provvedere ai loro bisogni. È questo il fatto legittimo che dà origine alla proprietà acquisita (1).

Veramente il fondamento razionale del diritto di proprietà non è stabilito con sufficiente precisione ed esattezza. Giacchè Genovesi viene affermando che, *il diritto di proprietà nasce dal bisogno* (2). Massima erronea e pericolosa. *Erronea*, perchè il bisogno è lo stimolo dell'umana attività ad esplicarsi sulle cose esterne che hanno per essa ragion di mezzo a'suoi legittimi fini, ma non è la ragione che la giustifichi. *Pericolosa*, perchè potrebbe facilmente essere tratta a legittimare le usurpazioni dei poveri contro i ricchi. Ciò che era affatto alieno dall'intendimento dell'Autore.

La ragione del diritto di proprietà individuale sta nella relazione di mezzo che hanno per l'uomo le cose esterne e nell'esplicamento della sua libertà sulle medesime senza offesa della giustizia in quanto o si tratta di cose che appartengono a nessuno, o avvi l'assenso del proprietario per quelle che già soggiacquero ad un'appropriazione.

Parlando però dell'occupazione come modo originario d'acquisto della proprietà, è d'uopo riconoscere che Genovesi vide ciò, che i più illustri filosofi moderni chiaramente spiegarono, non sorgere l'appropriazione dal fatto puro e semplice dell'occupazione, ma dal lavoro, pel quale avviene una tal quale comunicazione della personalità alla cosa, la congiunzione fisico-morale di questa con quella. Anzi questo concetto, che

(1) Diceos., lib. 1, cap. 10, § 1, 5. Nell'Opera *De iure et officiis*, lib. 1, cap. 12, § 4, pare avesse adottato la comune opinione dell'origine convenzionale delle private proprietà

(2) Diceos., lib. 1, cap. 10 § 6

riassume i dettati della moderna filosofia sopra questo tema, scorgesi già non oscuramente espresso dal filosofo napoletano. Giacchè spiegando le condizioni della legittimità dell'occupazione, *essa richiede*, dic'egli, *che vi si fatichi, perchè vi passi qualche cosa del diritto ingenito, che la renda nostra quasi come accessione alla nostra natura* (1).

Genovesi volle fissare un limite razionale alla proprietà dei beni esterni. Ma per riuscirvi enunciò una massima che farà meraviglia d'incontrare in un Autore così grave ed assennato, massima, che i socialisti moderati non sarebbero alieni dall'accogliere. Se si fosse tenuto pago a stabilire che, l'acquisto per mezzo dell'occupazione, modo originario d'acquistare la proprietà, secondo il diritto razionale, non possa estendersi al di là del bisogno dell'occupante e di ciò da cui egli colla propria attività personale o col mezzo de' suoi dipendenti o della sua famiglia valga a trarne effettivamente profitto, nulla vi sarebbe a ridire.

Ma egli intende determinare il limite razionale degli acquisti in generale, « *La misura*, ecco le sue parole, *è il bisogno composto de' bisogni* » *della natura, della persona, della famiglia, presenti e futuri rispetto* » *alla probabile durata della vita di ciascuno e di quelli dello stato ed* » *ordine civile, calcolati a tenore dei patti civili e de' bisogni della società,* » *finalmente degli accidenti fortuiti.* Chiamisi il bisogno della persona a, » quello delle famiglie b, dello stato civile c, degli accidenti d, la regola » degli acquisiti sarà: $a+b+c+d=x$. E la ragione è che il diritto di » proprietà non nasce che dal bisogno. Come adunque si oltrepassa questa » misura facendo che gli acquisti sieno $aa+bb+cc+dd=x$, dove non » si tenga il di più in deposito pei primi veguenti bisognosi, venendosi » a togliere il sostegno di molti nati col medesimo diritto, e nella me- » desima comunione universale, si diventa ingiusto per la legge di na- » tura e per la legge evangelica, che non ci accorda che *un pane* » *quotidiano e che ci basti*, avendo il di più come rapina di malvagia » cupidità (2). »

Proseguendo a spiegare il suo pensiero prevede che molti avrebbero riso di questa regola, tenendola per dottrina di anime vili e basse. « Di- » ranno, continua il filosofo, che finchè non si rubi, sia a ciascuno

---

(1) Diceos., lib. 1, cap. 10, § 16.
(2) Ibid., § 6 e nella nota

» permesso e giusto far valere la sua diligenza e fatica ed arricchir sempre? » Rispondo che: per sostenere la conseguenza di questo raziocinio bisogna » o negare i principii della naturale giustizia e dire che non vi è nè » divinità, nè legge di natura, negare che gli uomini sono figli della » terra, nè nascono con altro diritto che con quello della forza, nè sotto » altra legge se non quella *se piace e' lice*: o mettere certi uomini nella » classe degli uomini dèi, tutti gli altri in quella delle bestie destinate » al piacere e al comodo degli uomini dèi » (1).

Tant'è vero che Genovesi intende stabilire un limite non solo agli acquisti originarii, ma eziandio ai derivativi, e negare assolutamente il diritto d'acquistare al di là d'una certa misura, che ritorna a ragionarne, e si studia di determinarla, ove tratta delle regole dei contratti di permuta. Risolve anzi l'obiezione, la quale non poteva sfuggire alla sua perspicacia, cioè che una tale limitazione agli acquisti rallenterebbe e indebolirebbe l'industria, molla principale d'ogni Stato. Che farebbero, soggiunge egli stesso non dissimulando tutta la forza dell'obiezione, gl'Inglesi, gli Olandesi, i Veneziani, i Genovesi, gli Spagnuoli, i Portoghesi, se pensassero a questo modo? Risponde: « Per quanto apparisccnte sia questa opposizione, » non dee movere chi professa di vivere, non già sotto la tirannide delle » passioni, ma nel giusto imperio della ragione. Questa regola, soggiunge, » non estingue l'industria, ma la regge e la governa, affinchè giovi più » alle persone e allo Stato. È egli estinguere il fuoco che anima alla » fatica il dire alle persone: *studiatevi di acquistare fin dove vi permette* » *la regola de' bisogni personali + domestici + politici + fortuiti? Dove* » *questa norma termina, non avete più diritto d'acquistare, nascendo questo* » *diritto dal bisogno che voi non avete più: voi dunque furate l'altrui,* » *e siete reo di distruzione de' vostri simili* » (2).

Viene quindi accennando i danni dei soverchi acquisti e della troppa disuguaglianza delle ricchezze, e additando i mezzi posti in opera dai legislatori per ovviare a questo inconveniente. Fra gli esempi di siffatti provvedimenti citando le leggi agrarie dei Romani, fa palese com'egli mal conoscesse il carattere di queste leggi, le quali non miravano a mettere un limite all'accrescimento dei patrimonii privati, ma all'equa distribuzione

(1) Diccos., § 7 e 8.
(2) Ibid cap. 16, § 19, 21 e 22

dell'agro pubblico, cioè dei terreni conquistati che erano proprietà della repubblica.

Nelle lezioni di economia civile il nostro A. ritorna su questo soggetto, ov'è notevole il seguente brano. « È una legge di natura » (pongasi mente, che nel linguaggio di Genovesi la legge di natura è il diritto naturale nel suo più ampio significato, cioè la legge morale), « che niuno » debba delle cose comuni prendere tanto che a lui sia soverchio e venga » a mancare a molti altri, i quali hanno i medesimi diritti primitivi, » il necessario. Ma poichè ciò è avvenuto quasi da per tutto, non vi » ha che tre modi di soddisfare alla legge: o di mettere di nuovo tutta » la proprietà in comune, e poi dividerla in porzioni eguali, come fece » Licurgo: o distribuire il soverchio delle rendite ai poveri, come comanda » la legge cristiana: o di spenderlo in cose poco necessarie, con che » si vengano ad alimentare le famiglie, le quali non hanno altro fondo » che le braccia, e far girare i fondi. La natura sembra raccomandare » il primo. L'evangelio precetta il secondo. Il politico non dee ardire che » sul terzo metodo » (1).

Chi non direbbe che Genovesi pone lo stesso principio da cui prendon le mosse i socialisti e i comunisti? È vero che Genovesi viene a conseguenze ben diverse da quelle dei socialisti e comunisti, segna anzi con somma esattezza l'ufficio della politica e il limite che il savio legislatore non dee trascendere. Ma ciò sembra doversi attribuire alla sagacità, alla rettitudine del giudizio di lui, alla profonda sua cognizione delle leggi economiche che gl'impedirono d'essere rigorosamente logico per non cadere nel falso.

Imperocchè se si pone per principio, che secondo la legge di natura, cioè secondo la legge morale o il diritto naturale, ogni uomo dee avere una proprietà corrispondente o proporzionata a' bisogni suoi individuali e della sua famiglia, che accrescere il patrimonio oltre a questa misura è un'ingiustizia, un'usurpazione a danno degli altri, per essere coerenti non si può a meno di riconoscere nel legislatore, il cui ufficio è di recare in atto i principii della giustizia e di promovere il bene comune, non che il diritto, il dovere di mantenere nei privati patrimonii tale misura.

Ma come si potrebbe applicare praticamente la regola sul limite degli acquisti posta da Genovesi? Come si potrebbero accertare per ciascuna

(1) Lezioni di econ. civ. part. I, cap. 10 in not., vol. I, pag. 181 dell'ediz. di Milano 1850.

famiglia, o per ciascun individuo i bisogni a cui egli accenna, nella molteplice loro varietà? Chi non vede a quali e quanti inconvenienti si aprirebbe l'adito se sulla qualità e misura di siffatti bisogni dovesse giudicare la pubblica autorità?

Una dottrina sociale o giuridica che non ammette pratica applicazione si chiarisce per ciò solo erronea od esagerata.

Sotto l'aspetto poi filosofico il difetto di questa dottrina intorno al limite degli acquisti deriva primamente dal vizio radicale del sistema di non aver distinto la morale dal diritto. Secondo il diritto razionale ogni acquisto fatto col legittimo esercizio delle proprie facoltà, dei proprii diritti, e quindi senza offesa della proprietà d'altri, è giusto.

Spetta alla morale il moderare gli acquisti, il frenare la cupidigia dell'avere che mai non si sazia, e il regolare l'uso illuminato e caritatevole della ricchezza. Spetta al legislatore il fare quei provvedimenti, che, mentre non inceppano la libertà economica e non ledono i diritti di alcuno, impediscono la soverchia disuguaglianza delle ricchezze e la loro diffusione.

Secondamente un altro errore, su cui poggia la preaccennata dottrina, si è l'aver posto per titolo del diritto di proprietà esterna il bisogno, come fu già poc'anzi avvertito.

Non sarà fuor di proposito il notar qui una coincidenza tra la teorica di Genovesi sul limite della proprietà acquisita e quella propugnata ai nostri giorni dall'Ahrens nel suo corso di *Diritto naturale o di filosofia del diritto*. Infatti questo A. così ragiona: *Les limites du droit propre sont aussi les limites de la propriété, et comme le droit propre de chacun se borne à l'ensemble des conditions nécessaires à son développement rationel tant physique que spirituel, chacun, d'après le droit naturel, ne peut prétendre qu'à une propriété suffisante pour les besoins qui résultent de la nécessité de ce développement. Le titre de propriété est ainsi costitué pour chacun par ses besoins rationels; lorsque ces besoins sont satisfaits, et en tant qu'ils sont satisfaits, le titre s'éteint en droit naturel* (1). Da queste premesse Ahrens fu condotto a conseguenze pratiche, le quali sanno di socialismo. Lo stesso non avvenne a Genovesi, il quale se ha enunciato un principio astratto, che può ravvisarsi favorevole alle utopie dei socialisti e dei comunisti, si palesa apertamente avverso a queste. Giacchè egli confuta le due dottrine estreme di Obbes

(1) Cours de droit nat., part. spec. 1. div. ch. 2, pag. 212, Bruxelles, 1850.

e di Rousseau, le quali pur coinciderebbero nel non riconoscere il diritto della proprietà individuale, come inviolabile e anteriore ad ogni legge positiva, e mette in chiara luce l'irragionevolezza del comunismo proclamato a' suoi tempi dall'Autore del *Code de la nature*. I provvedimenti ch'egli propone all'oggetto di prevenire o di rimediare al concentramento eccessivo delle ricchezze, specialmente stabili, p. es. la protezione della libertà delle classi inferiori dai soprusi dei facoltosi, l'accrescimento del commercio e dell'industria, la libertà del traffico, l'abolizione dei vincoli che inceppano la commerciabilità degli stabili, dimostrano, come la generosità di alcuni intendimenti e l'astrattezza di qualche principio non bene chiarito era in lui temperata e ridotta al suo giusto valore dal criterio pratico e dalla scienza delle leggi della produzione e distribuzione delle ricchezze.

Analizzando il diritto di proprietà, Genovesi ravvisa un diritto naturale da esso derivante in quello di donare per atto tra vivi, non però il diritto di donare *mortis causa* o di disporre per testamento. Nell'investigare la ragione suprema delle disposizioni per atto d'ultima volontà, abbandonando il concetto più conforme al vero enunciato dal padre della scienza del diritto naturale, e propugnato poi da molti altri, egli riprodusse l'opinione espressa da Puffendorfio, Gundlingio, Barbeiracio, e più tardi in generale dalla scuola Kantiana, che la facoltà di disporre per testamento, non è un diritto naturale, ma deriva dalla legge positiva, o dal reciproco consenso dei sopravviventi ripete ogni suo valore giuridico (1).

In questa quistione, di maggiore importanza di quello che sembri a prima giunta, il filosofo napoletano non mostra alcuna originalità di concetto, adducendo per ragione principale del suo assunto quella più speciosa che solida, allegata già da altri prima di lui, che il diritto di proprietà non può protrarsi oltre la vita del proprietario. Scorgesi nella dottrina di Genovesi sui testamenti un corollario dell'erroneo postulato, che i primi

(1) Egli pare che Genovesi abbia nella Diceosina modificata, o più chiaramente espressa l'opinione che su questo punto aveva manifestata nell'opera *De iure et off.*, lib. 1, cap. XIV, § 8-11, ove scostandosi e dall'opinione di coloro che risguardavano come un diritto primitivo quello di testare, e dalla sentenza di chi lo risguardava un mero portato del diritto civile, tenendo un sistema medio, lo derivava da un tal qual patto tacito o consenso universale, e lo fondava quindi sul diritto delle genti. *Ego igitur sic censeo*, così conchiudeva, *non iure naturae primaevo ac simpliciter, nec iure quod est ex sola lege civili, testamenta obtinere, sed alio antiquiori, quod saepe gentium dixi, tacitis nempe pactis populorum, nec adversante natura;* cit. loc., § 11

uomini abbiano vissuto in comunione di beni, la divisione dei quali non siasi fatta che per convenzioni tacite od espresse. Donde si trasse l'altra conseguenza, che morendo il proprietario, i suoi beni ritornerebbero al patrimonio comune, senza un patto contrario o senza l'autorità della legge che altrimenti stabilisse (1).

Nello stesso modo, cioè colla supposizione affatto gratuita di un patto tacito od espresso, Genovesi rende ragione della successione naturale, ossia ab intestato, in quanto che, com'egli viene affermando, le famiglie primitive non si poterono insieme unire senza questi patti espressi o taciti:

1.° Che i beni delle famiglie dovessero servire a sostegno di tutti i membri onde si compongono;

2.° Che mancando questi membri, appartenessero alle famiglie derivate dal medesimo ceppo, siccome formanti una famiglia più ampia;

3.° Che in mancanza di congiunti, i beni appartenessero al villaggio nel quale fossero situati;

4.° Che, spento questo, spettassero ai più vicini.

Ma senza ricorrere all'ipotesi di patti immaginarii, il principio dell'unità della famiglia, i rapporti giuridico-morali che ne discendono, la destinazione dei beni alla sussistenza della famiglia, combinati colla necessità sociale della trasmissione dei beni dalla generazione che passa a quella che le succede, ci porgono la ragione su cui si fonda la successione ab intestato, e il germe delle norme razionali che la debbono governare. Se non che in questa materia, come in altre, la scienza del diritto razionale non può che additare dei principii generali che nella loro attuazione ed applicazione possono, anzi debbono essere modificati da altri principii.

Non tralascia pure l'A. di accennare il fondamento delle donazioni e dei legati per cause pie, ponendolo nella necessità sociale della religione, e per conseguenza di ministri sacri, e le norme che debbono regolare questo modo dell'esercizio del diritto di proprietà, norme però le quali appartengono più alla ragion politica ed economica che al diritto razionale propriamente detto; p. es. che il numero dei ministri sacri debba essere in proporzione col corpo politico, che i beni loro assegnati debbano del pari essere in proporzione colle terre, colle rendite dello Stato ecc. (2).

---

(1) Diceos., lib. 1, cap. 12.

(2) Diceos , lib. 1, cap. 12, § 9-14.

Ma quali sono i diritti, quali i doveri che sorgono dalla proprietà privata?

Anche di questi tratta Genovesi in relazione agl'individui e al corpo sociale. Ragiona dell'inviolabilità del diritto di proprietà, dei mezzi di tutelarla, delle conseguenze giuridiche della lesione e dell'usurpazione del medesimo. Segna con esattezza l'ufficio del potere politico per rapporto a questo diritto, accennando come esso debba vegliare alla sua incolumità e moderarne l'esercizio nell'interesse comune. Donde si derivano i limiti del diritto dei privati nell'acquistare, nel disporre, nel godere. Sul qual punto però l'A. si restringe a poche e incomplete indicazioni (1). Ha omesso p. es. di trattare del fondamento razionale delle servitù reali, che abbracciano le più importanti modificazioni e limitazioni del diritto di privata proprietà, richieste dalle esigenze della società civile. Accenna alla ragione dell'espropriazione per causa di pubblica utilità; ma la fonda erroneamente sopra una supposta cessione di diritti fatta nei patti sociali.

Nella teorica delle convenzioni giuridiche ripete con Grozio la forza obbligatoria delle medesime dalla loro efficacia a trasferire in altri dei diritti (2).

Nell'esposizione delle regole fondamentali delle contrattazioni, che è la parte relativamente più diffusa della Diceosina, si manifesta precipuamente la scienza dell'economista. Così, a cagion d'esempio, dopo aver accennato che i prezzi delle cose e delle fatiche come dei metalli, e del denaro in particolare, sono in ragion composta diretta dei bisogni, reciproca delle quantità, viene a conchiudere che la voce pubblica è il più sicuro indizio e la regola dei prezzi. Determina con accuratezza il carattere dell'usura nel senso di prezzo dell'uso del danaro come di qualunque altra merce, e lo distingue dall'interesse, come compenso del lucro cessante e del danno emergente. Nell'economia civile però, sotto il nome d'interesse del danaro, comprende l'uno e l'altro compenso e propende all'opinione che debba essere regolato dalla legge (3).

Ragionando del modo di adempiere le obbligazioni nascenti dai delitti, Genovesi toglie a discutere la gravissima quistione del fondamento del diritto di punire (4).

---

(1) Diceos. lib. 1, cap. 11, § 9; cap. 13, § 2.

(2) Ibid., cap. 14, § 5

(3) Econ. civ., part. 2, cap. 13.

(4) Per verità non era questo il luogo opportuno per trattare una siffatta questione. Non era

Egli lo deduce dallo stesso principio che è il cardine di tutta la sua teoria giuridica. Posto cioè, che secondo la legge di natura ogni uomo ha delle proprietà ingenite od acquisite, le quali costituiscono altrettanti diritti e danno origine a correlative obbligazioni di rispettarli, e in ciò sta la giustizia, chi viola alcuno di questi diritti incorre issofatto nel *taglione*, val quanto dire che perde un diritto corrispondente a quello violato, il quale trapassa per conseguenza nella parte offesa a fine d'essere reintegrata nel diritto di cui fu privata. Onde che la pena consisterebbe nel togliere all'offensore il diritto da lui perduto per aver violato quello di un altro. La forza o la potenza non è che l'esecutrice della pena, e quindi della giustizia (1).

Egli è d'uopo osservare in primo luogo che questa dottrina porge una nozione poco esatta del delitto, ponendolo nella violazione di un diritto, la quale è bensì un elemento per costituire il delitto, ma per sè solo non basta alla nozione del medesimo. L'essenza del delitto sta propriamente nell'abuso della forza individuale che colla violenza o colla frode reca tale offesa ai diritti altrui che la privata prudenza è incapace a prevenire, i mezzi giudiziarii di ragion civile sono insufficienti a riparare. Allora l'offesa non è puramente individuale, ma assume eziandio il carattere di offesa sociale a motivo della forza morale malefica inerente a siffatto abuso della forza individuale, la quale per ingiusto scopo supera ogni ritegno morale e sociale, e desta quindi un'apprensione più o meno grave in tutti. Tant'è vero doversi ravvisare l'essenza del delitto nell'abuso della forza individuale, che tutte le legislazioni dei popoli civili reprimono come delitto la violenza adoperata da un privato anche per l'esercizio di un proprio diritto, fuori del caso della difesa personale.

L'inesattezza delle idee del pubblicista napoletano su questo punto si renderà più manifesta ove si rifletta, che egli non solo ravvisa carattere delittuoso nel negare ciò che ad altri sia dovuto per patto, ma benanche nel ricusare il premio a chi siasi renduto benemerito della patria con

---

cioè trattando dei rapporti giuridici tra individuo e individuo che si doveva e si poteva razionalmente investigare il fondamento della podestà di punire, la quale non è concepibile tra pari, ma unicamente nei rapporti che nel civile consorzio sorgono tra l'autorità destinata a dirigerlo al suo vicino ed a recare in atto il diritto, e gl'individui. Quindi è che Genovesi dopo avere disputato sul diritto di punire ragionando delle obbligazioni tra privato e privato, dovette ritornare su questo tema trattando della sovranità. Diceos., lib. 2, cap. 7, § 13-23.

(1) Diceos., lib. 1, cap. 19, § 3-6.

fatti egregii. *I politici e i moralisti*, ecco le sue parole, *i quali hanno scritto che, il non premiare coloro, i quali hanno faticato pel ben pubblico in pace o in guerra, non sia un delitto o un'offesa della giustizia commutatrice, ma un vizio della prudenza distributrice, hanno detto uno sproposito* (1). La qual sentenza parrebbe altresì difficile a conciliarsi col concetto di proprietà, come principio determinatore dei diritti.

In secondo luogo, Genovesi non distingue chiaramente, tende anzi a confondere due concetti giuridici fra di loro diversi: cioè la riparazione dell'offesa, ossia la reintegrazione del bene per essa tolto o manomesso, la quale ha luogo anche tra pari e pari, e la pena propriamente detta, che suppone un superiore e un giudizio, e non è quindi concepibile che nella società. La pena inoltre si differenzia per la sua natura e pel suo scopo dalla semplice riparazione dell'offesa. Tant'è vero, che la pena s'infligge quantunque la lesione giuridica sia interamente riparata, anzi talvolta anche quando il bene oggetto del diritto sia rimasto illeso, come accade nel delitto tentato o mancato.

Il taglione presso i popoli ancora rozzi esprime confusamente e imperfettamente il principio di giustizia, che il male dee riscuoter male; esprime pure confusamente il rapporto di proporzione tra il male morale e materiale di chi offende la giustizia, e il male sensibile a cui egli dee soggiacere.

Alcuni filosofi si studiarono di chiarire ed elevare a formola scientifica questo concetto confuso e questo sentimento popolare. Ma il principio assoluto di giustizia non basta per se solo a stabilire sopra solida base la podestà di punire nella società politica, e il taglione è guida mal sicura e imperfetta per la determinazione e classificazione delle pene.

Il diritto o piuttosto la podestà di punire non si fonda solo sul principio di giustizia, che il male dee riscuoter male, nè solo sul principio di utilità sociale, ma sopra entrambi. Il principio di giustizia è la ragion prima e remota della pena. L'utilità sociale ne è la ragion prossima e immediata. E per verità, se la pena non recasse alcun vantaggio alla società, se non avesse alcuna efficacia di prevenire altre offese, sia colla minaccia, sia colla effettiva sua esecuzione, non vi sarebbe ragione per cui la società punisse i malvagi. Ma poichè il male della pena è un freno più o meno efficace pel delinquente stesso e per gli altri, i quali abbiano

(1) Ibid., § 7.

le stesse disposizioni, e la giustizia esige che il male riscuota male, egli è evidente che la suprema autorità sociale destinata ad attuare il diritto, adempie il suo ufficio colla sanzione penale positiva come mezzo legittimo per ottenere il suo fine.

Genovesi, dopo aver posto per fondamento del diritto di punire la perdita che fa l'offensore di un diritto pari e dello stesso genere di quello da lui violato, spiegando ed applicando questo principio, viene ad aggiungervi tali dichiarazioni e modificazioni da togliergli ciò che di aspro e d'impraticabile moralmente e giuridicamente presenta nella sua generica enunciazione.

La quantità del diritto offeso, così egli ragiona, vuol essere calcolata secondo la varietà delle condizioni delle persone, delle famiglie, dei corpi politici, dei costumi, delle occasioni, delle conseguenze in relazione ad altri diritti, che la punizione troppo mite o troppo severa potrebbe offendere. Così, a cagion d'esempio, siccome l'eccesso del rigore nelle pene offenderebbe i diritti dell'umanità, ne deduce la massima della mitezza delle pene e proclama il canone di scienza penale messo in luce da Beccaria suo contemporaneo, il quale pubblicava l'opera immortale *Dei delitti e delle pene* tre anni prima che Genovesi scrivesse la sua Diceosina, cioè che non tanto la severità quanto la certezza e prontezza delle pene provvede alla sicurezza sociale. Talchè nella teorica del pubblicista napoletano, il taglione non è infine che un elemento della pena, il quale viene a combinarsi e a temperarsi col concorso di molti altri elementi, e segnatamente con quello dell'utilità sociale.

Se la dottrina di Genovesi sul fondamento del diritto di punire e sulle conseguenze immediate che ne trae, si pone a confronto con quella enunciata sul finire dello scorso secolo da Emmanuele Kant, sarà agevole il chiarirsi come non siavi tra l'una e l'altra essenzial differenza. Entrambi i filosofi fondano il diritto di punire sul principio di giustizia, entrambi ne deducono per misura della pena la quantità e qualità dell'offesa e quindi la legge del taglione. Se non che i temperamenti e i limiti segnati dal primo all'applicazione del principio palesano nel filosofo napoletano uno spirito più positivo e più preoccupato dei bisogni della pratica.

Dopo avere trattato dei diritti e delle obbligazioni, scende a ragionare dei giudizii siccome il mezzo per far rispettare quelli e procurare l'adempimento di queste. E qui, parlando dell'interpretazione delle leggi, l'A. coglie occasione per dimostrare la necessità pel giureconsulto della storia

delle leggi e della nazione a cui esse sono date per la retta loro intelligenza, della cognizione dei mutamenti che avvengono nelle opinioni, nei costumi, negli interessi, a fine d'introdurre le riforme, che si vanno mano mano rendendo necessarie. Nota con molto acume le attinenze che passano tra la legislazione, la giurisprudenza e l'economia civile, e l'influenza che le costituzioni politiche esercitano sulle leggi.

Additando la necessità di ridurre le leggi ad un numero comportevole e proporzionato alla memoria ed attenzione umana, di farne catechismi in lingua comune, affinchè e i cittadini e i giudici possano averle tutte sotto gli occhi, scorgesi come Genovesi esprimesse già sin d'allora il voto di una codificazione. Il bisogno della quale doveva più vivamente essere sentito, massime dagli uomini più intelligenti delle cose civili in un paese che contava allora undeci diverse legislazioni (1).

CAPO QUARTO.

Principii fondamentali di Genovesi sul diritto di famiglia, sul diritto pubblico interno, e sul diritto internazionale.

Fin qui io venni delineando il sistema di Genovesi intorno al principio fondamentale del diritto naturale e intorno ai diritti individuali, che forma il soggetto del libro primo della Diceosina. Ora mi farò a dare rapidamente contezza delle sue idee principali sul diritto di famiglia e sul diritto pubblico interno e delle genti, di cui tratta in modo assai più conciso nel secondo libro, ch'egli intitolò, per quanto a me pare non affatto esattamente, *Dei doveri particolari.*

Questo secondo libro, pubblicato dopo la morte dell'Autore, è brevissimo; in mole non è la metà del primo. Di maniera che la materia vi è piuttosto delineata che sviluppata. Forse l'Autore non ebbe tempo di dargli l'ultima mano (2).

Non è possibile stabilire le norme regolatrici dei rapporti nascenti dal civile consorzio nè spiegarne l'origine, senza avere prima determinato la

---

(1) V. Colletta, *Storia del Reame di Napoli*, lib. 1, cap. 1, § 12.

(2) Da una nota in calce al § 17 del capo 5, lib. I della Diceosina si deduce che Genovesi scriveva quest'opera nel 1766 Cessava di vivere tre anni dopo.

nozione e la natura del matrimonio e della famiglia e i rapporti morali e giuridici che ne sorgono. Imperocchè la famiglia non solo è il fondamento delle civili società, ma ne è l'essenziale elemento, essendo la civile società aggregato di famiglie non di semplici individui.

Avvertendo, che il coniugio può essere considerato sotto tre aspetti, a fronte della legge naturale, pel modo e forma che riceve dalla legge civile, per la dignità a cui lo solleva la religione, ne tratta soltanto sotto il primo aspetto e solo incidentemente sotto il secondo.

Nello stabilire però i principii cardinali della teorica del matrimonio, Genovesi non palesa quell'originalità di concetti che sarebbesi potuto aspettare.

Egli intravide il concetto razionale del matrimonio quando disse che esso è un contratto di perfetta società ed amicizia (1). Ma non lo seppe sviluppare; attribuendo un'importanza predominante alla nozione del contratto e prendendo per base la comune opinione, che il coniugio ha per iscopo la procreazione della prole e il piacere di una vita compagnevole e il mutuo soccorso, non potè fermare sopra solide basi la teorica del matrimonio, nè stabilire i due cardini del medesimo l'unità e l'indissolubilità, anche secondo la morale e il diritto razionale, per quindi dedurne i doveri e i diritti rispettivi dei coniugi.

Prendendo le mosse dalla nozione del contratto, il quale è bensì l'atto costitutivo della società coniugale, ma è insufficiente a farne conoscere l'essenza, venne a conchiudere che, come ogni contratto secondo il diritto naturale si può sciogliere per mutuo consenso, purchè non si nuoccia direttamente ad un terzo, il matrimonio per diritto naturale non è indissolubile.

Se Genovesi non si fosse limitato a considerare il matrimonio solamente dal lato della sua causa efficiente, ma l'avesse considerato nella sua essenza e nelle sue diverse attinenze, come l'attuazione cioè della più perfetta unione di due umani individui di sesso diverso, che comprende virtualmente quale naturale e legittima conseguenza la procreazione e il mutuo soccorso, sarebbe stato condotto ad un corollario ben diverso, a riconoscere cioè il matrimonio per intrinseca sua natura indissolubile e a dare la vera ragione dell'unità del matrimonio, che esclude la *poliandria* e la *poligamia*.

(1) Diceos., lib. 2, cap. 2, § 17.

Egli invece, posto il diritto d'ogni uomo e d'ogni donna di contrar nozze, ove il voglia, e il fatto che nasce un numero eguale dell'uno e dell'altro sesso, ne trasse la conseguenza che la poligamia e la poliandria siano contrarie alla legge di natura perchè quella lede il diritto dei maschi, questa il diritto delle femmine, impedendo ad un numero or maggiore, or minore d'individui dell'uno e dell'altro sesso l'uso del summentovato diritto. Ragione per fermo nè solida, nè decisiva, nè logicamente dedotta. Poichè siccome non tutti hanno le condizioni fisiche e morali necessarie per poter contrarre matrimonio, e il diritto di stringer nozze è tale anche nel sistema di Genovesi che ciascuno vi può rinunciare e non pochi di fatto vi rinunciano, in molte circostanze cesserebbe la ragione allegata dal filosofo napoletano, e potrebbe essere giustificata tanto la poliandria quanto la poligamia, perchè si potrebbe provare che non ne deriva la lesione del diritto di nessuno. La ripugnanza dell'una e dell'altra al diritto razionale e alla morale si prova con ragioni intrinseche dedotte dalla natura ed essenza stessa del coniugio, non con motivi estrinseci od accidentali.

Trattando dei rapporti tra marito e moglie, tra genitori e figli il nostro A. ragiona più da moralista che da giurista filosofo.

Facendosi a spiegare l'origine della società, rigetta il supposto di uno stato ferino, come lo stato primitivo dell'umanità, perchè contrario ai documenti della storia, alla natura dell'uomo, all'indeclinabile necessità della prima educazione. Congettura però che lo stato primitivo e naturale del genere umano in quanto all'uso della ragione abbia dovuto essere simile a quello dei fanciulli intorno agli anni della pubertà nelle nazioni colte, tutti senso, fantasia e moto. Di questa congettura od ipotesi però non dà alcuna ragione, tenendosi pago di dire che essa è provata dalla storia delle nazioni selvagge e dallo stato antico della Grecia. Ma oltrechè lo stato antico della Grecia non ci ritrae lo stato primitivo di tutta l'umanità, le condizioni primitive delle popolazioni greche non le conosciamo che dalla descrizione lasciatacene da Omero, la quale non confermerebbe la congettura di Genovesi. Le popolazioni selvagge poi ci presentano lo stato di degradazione di frazioni dell'umana famiglia, che, staccatesi dal tronco comune e vissute a lungo più o meno isolate, coll'andare poco per volta più o meno perdendo la memoria delle verità e tradizioni primitive intorno all'ordine religioso morale e sociale, o piuttosto col progressivo oscuramento ed alterazione delle medesime, si ridussero a stato di barbarie o di selvatichezza. Onde che questo stato non ci

fornisce dati per conoscere la condizione originaria e primitiva dell'umanità.

Genovesi per ispiegare l'origine e la formazione delle società politiche rigetta lo stato naturale di Obbes e quello di Rousseau, entrambi erronei e storicamente e razionalmente. Ma risale ad uno stato anteriore all'organamento più o meno imperfetto e regolare delle politiche aggregazioni, ed osserva che, la condizione morale delle famiglie senza vincolo civile fu uno stato di perfetta eguaglianza, e la sola legge di natura non ancor bene sviluppata ne' duri e feroci cuori regolava le loro azioni. In tal condizione vi era un imperio naturale tanto più forte e vigoroso, cioè l'impero paterno, quanto era ignoto l'impero civile, signorile durante l'infanzia, misto di regio nella prima gioventù, civile e repubblicano nell'età matura.

Egli riconosce in questo stato un vincolo naturale fra tutti gli uomini indipendentemente da qualunque patto, ma derivante da un rapporto di eguaglianza di natura e di diritti fra tutti gli uomini di qualunque tempo e luogo. Laonde anche in questo stato la legge di natura comanderebbe di rispettare i diritti di tutti e di soccorrere chi fosse in bisogno. Ma si ha una cognizione troppo imperfetta e confusa della medesima e manca un'autorità rettamente costituita che rannodi le famiglie disgregate e coordini l'attività degli individui che le compongono all'osservanza di questa legge.

Questo stato dell'umana famiglia non si può propriamente chiamare nè naturale, nè primitivo. Non primitivo, perchè non è quello in cui possa essere originariamente stata costituita l'umanità; non naturale, perchè non è punto conforme alla natura razionale dell'uomo uno stato in cui egli non può esplicare le più nobili sue facoltà. Ciò nondimeno non si può negare che alcune popolazioni siansi trovate e si trovino tuttora in una condizione sociale affatto imperfetta e informe, simile a quella enunciata da Genovesi.

È la condizione in cui si trovano, secondo recenti relazioni, i Metchegoni, gli Eschimesi ed altre popolazioni della baia d'Hudson e gli Australii della Nuova Olanda, che sono venuti all'estremo della disgregazione, oltre al quale andrebbero a perire interamente. Degli Australii or ora indicati narra un dotto Benedettino spagnuolo, Budesindo Salvado, il quale ha loro predicato il Vangelo con successo, che essi sono divisi in tante famiglie per lo più di otto o dieci individui affatto fra di loro indipendenti, governate dal loro capo. Se alcuno riceve ingiuria, non

ricorre a nessuno per averne giustizia, ma la fa da sè: trovandosi più debole del suo nemico, chiede aiuto ai parenti e agli amici. Pur nondimeno queste popolazioni oltre al vincolo di schiatta che li unisce e del medesimo linguaggio che parlano, hanno un vincolo morale in certe leggi generali conservate per tradizione, delle quali ogni padre di famiglia ha diritto di punire le infrazioni anche sopra un estraneo alla sua famiglia, reminiscenza di un diritto primitivo alterata e corrotta. Avverte anzi il preaccennato monaco, che tra queste famiglie si ravvisa una tal qual immagine di un diritto consuetudinario formato da certe costumanze giudicate utili alla conservazione della schiatta, e chi le viola è in certo modo fuori della legge (1).

Le quali considerazioni, tralasciandone molte altre, verrebbero a confermare ciò che poc'anzi accennava, e sembra omai generalmente ammesso, che la condizione delle popolazioni selvagge non è uno stato originario e primitivo, ma di successivo decadimento da uno stato sociale anteriore forse ancora incompleto.

Ritornando da questa digressione alle idee del pubblicista napoletano sull'origine delle società politiche, a suo giudicio, le repubbliche, i regni, gl'imperii sorsero per un patto espresso o tacito tra più famiglie fra di loro e con un capo. Questo patto però differirebbe essenzialmente dal contratto sociale di Obbes e di Rousseau.

La causa impulsiva della formazione delle politiche società sarebbe stata la debolezza e il bisogno di ciascun individuo. Egli sembra che dovrebbesi aggiungere la natural benevolenza e simpatia tra uomo e uomo. Le occasioni, o diremmo, cause immediate per cui molte famiglie indipendenti si poterono unire in corpo e crearsi un governo furono diverse: 1.° I rapporti di sangue tra più famiglie discese dallo stesso stipite; 2.° Il timore e il pericolo di vivere disperse e separate; 3.° L'ascendente di qualche uomo savio e benefico; 4.° La prepotenza di qualche ambizioso collegatosi con gente fiera e valorosa (2).

L'origine filosofica, l'origine giuridica e l'origine storica dei politici consorzii è qui additata, per quanto a me sembra, con molta esattezza. Ha accennato le cause della formazione degli Stati, il fatto giuridico che

---

(1 *Revue historique du droit* 1856, pag 106. 165 e segg

(2 Diceos. lib 2, cap 1.

razionalmente dà loro esistenza legittima, i modi diversi coi quali effettivamente si vennero formando. Sono concetti appena abbozzati ma giusti, che non richiederebbero se non di essere esplicati. Nè meno giuste nella loro sostanza sono le nozioni che porge intorno alla natura, alle attribuzioni e alla sede della sovranità.

Premesso che il corpo politico, come persona morale, ha per analogia coll'individuo dei diritti ingeniti e dei diritti acquisiti, divide i diritti della sovranità, che meglio si chiamerebbero attribuzioni o funzioni, in *interni* ed *esterni* secondo che mirano al mantenimento dell'unità della repubblica e se ne promove la felicità, o provveggono alla sicurezza esterna dello Stato.

Discute la questione, se i diritti di sovranità siano divisibili ed alienabili, e la risolve ammettendo l'alienabilità dell'uso e dell'esercizio, o piuttosto la delegazione di tali diritti ossiano funzioni, ritenendone il ius supremo di proprietà, com'egli si esprime. Rigetta quindi la dottrina degli Stati patrimoniali insegnata da Grozio e propugnata ancora da alcuni recenti pubblicisti; per conseguenza nega la facoltà di alienare la proprietà della sovranità, per la ragione che *l'impero non può che esser pubblico legato al corpo politico*, e perciò non alienabile l'imperio per nessun titolo, tranne che sia consentito da legge fondamentale o intervenga il consenso della nazione (1).

Dal quale concetto si arguisce come alla mente di Genovesi sia balenata, quantunque non l'abbia chiaramente espressa, la cardinale distinzione tra la sovranità *potenziale*, che ha la sua sede nel corpo politico, e la sovranità *effettiva*, che risiede in uno o più determinati soggetti, che sono l'organo della sovranità nazionale, e la esercitano in nome e per l'interesse della nazione, dalla diversità dei quali deriva la differenza delle forme di reggimento politico.

Passando ai modi di acquistare la sovranità, senza distinguere gli originarii dai derivativi, li riduce a due soli, *elezione* e *successione*. Osserva che il regno successorio è elettivo in *causa*, successorio in *effectu*. E per verità tutti i monarcati furono in generale elettivi nella loro origine.

Riconosce però un altro modo d'acquisto della sovranità che si differenzia

(1) Ibid., lib. 2, cap. 6. §§ 2, 8, 9

dai due or ora accennati, e si potrebbe chiamare occupazione della sovranità pacificamente fatta e consentita, quando cioè un uomo savio, prudente, benefico siasi conciliata colla sua saviezza, col suo accorgimento, co' suoi beneficii l'ubbidienza di una moltitudine che l'abbia accettato e riconosciuto per suo capo supremo.

Non ammette con ragione modo legittimo d'acquisto della sovranità per conquista o forza d'armi, perchè l'uso della forza non può per se solo essere titolo di un diritto. Questo acquisto, vizioso nella sua origine, può legittimarsi in seguito come per ratifica, quando, cessata la violenza che fa curvare le fronti, non piegare le volontà, vi sottentri il consenso e l'approvazione del popolo sottomesso.

Scende poi ad esporre partitamente i diritti o proprietà della sovranità, ossia i diritti *maiestatici*, come alcuni li chiamano, additando alcuni canoni di filosofia politica. Esamina brevemente la potestà legislativa, la podestà di punire, la creazione dei magistrati, il dominio eminente, la direzione delle scuole e della pubblica istruzione ed educazione, la vigilanza sul culto religioso (1).

Egli è intorno a quest'ultimo punto, e in generale in tutto ciò che concerne i rapporti della Chiesa e dello Stato (materie delle quali il pubblicista napoletano entra sovente e con una certa qual predilezione a ragionare), che le sue dottrine palesano più manifestamente l'influenza dei tempi in cui viveva, dello spirito dominante del Governo, e delle ardite innovazioni in fatto di materie ecclesiastiche o miste per le quali particolarmente è celebrato il regno di Carlo Borbone e l'amministrazione di Tanucci, tanto sotto Re Carlo, quanto durante la minorità di Ferdinando IV di lui figlio. Le dottrine di Genovesi intorno a questo soggetto p. es. intorno all'ingerenza della potestà civile su tutto che non sia puramente spirituale, alla limitazione del numero degli ecclesiastici in ragione della popolazione (2), al divieto degli acquisti alle mani-morte, al diritto di disporre dei beni ecclesiastici per utilità o necessità dello Stato, e simili, non sono in sostanza che l'eco dei provvedimenti governativi, che emanarono in quel periodo di tempo: oppure si potrebbe dire che le teoriche

(1) Diecos., lib. 2, cap. 7.

(2) Si stabilì che il numero dei preti non eccedesse l'uno per cento. Si vietò il chiericato al figlio unico, ad ogni famiglia di avere più di un chierico. V. Gatta, *Dispacci Reali*, materie can., Tom I t 11. Colletta *Storia del Reame di Napoli*, lib 2, cap. 1.

del più valente pubblicista del regno concorrevano a confermare e corroborare la politica e la pratica del Governo. Parlando dei diritti esterni di sovranità, diritto di guerra e di pace, diritto di alleanze e confederazioni, diritto delle ambascerie, viene a delineare la teoria del diritto pubblico internazionale (1).

Dimostra e conferma cogli insegnamenti della storia come non sia nè lecito, nè utile il far la guerra per ambizione di gloria o d'impero, per vendetta, per cupidigia di ricchezze. « Ogni nazione, dice sapientemente » il n. A., può esser ricca se ha giudizio, ed esser gloriosa e rispettata » se ha virtù ».

Passa poi a discutere se si possa fare la guerra, cioè quali siano le cause che la giustifichino, e se convenga farla. La prima è questione di giustizia ossia di diritto. La seconda è questione di prudenza e di convenienza. Limitandomi alla prima, riconosce cause giuste di guerra, la difesa, la riparazione dell'offesa e del danno, il rifiuto per parte di altra nazione de' mezzi necessarii alla sussistenza, di un passaggio necessario a chi lo domanda, innocuo a chi lo dovrebbe sopportare, il soccorso ad un popolo ingiustamente aggredito.

Egli pare che Genovesi inclini ad ammettere la guerra di punizione, *bellum punitivum*, sentenza propugnata da Grozio, il quale, coerente al fondamento da lui posto alla podestà di punire, censurato dal pubblicista di Napoli, riconosce il diritto di far la guerra punitiva nello Stato offeso che abbia prevalenza di forze sullo Stato offensore, diritto che alcuni pubblicisti restrinsero al caso di offesa irreparabile.

Ma secondo i principii sovra additati è manifesto, che pena propriamente detta non è giuridicamente concepibile ove non è rapporto di superiorità ed inferiorità legale, ma di sola forza materiale. Da pari a pari non vi può essere che diritto di difesa preventiva od attuale, o di riparazione o di guarentigia. La guerra punitiva, per altro nel senso di Genovesi e di altri pubblicisti a lui posteriori, si risolve in ultima analisi nel diritto di guarentigia, nel diritto cioè di usar la forza per mettere la nazione offenditrice in tal condizione da non poterci ulteriormente nuocere. Infatti Genovesi, proposta la questione se una guerra difensiva giusta possa nel progresso con pari giustizia diventare offensiva, risponde affermativamente,

(1) Cit. lib. 2, cap. 8

quando miri a *castigare e reprimere la superbia, la ferocia e rapacità di un popolo invasore, perchè ci lasci quieti in appresso* (1). Tant'è, che egli, scostandosi affatto dalla dottrina del pubblicista Olandese, rigetta a ragione, come erronea, la sentenza, che sia lecito far la guerra ad una nazione barbara ed inumana per punirla delle proprie scelleratezze ed insegnarle a vivere con giustizia ed umanità, sia perchè il principio sarebbe pericoloso e funesto per le conseguenze a cui potrebbe condurre, sia perchè il mezzo sarebbe troppo male appropriato a raggiungere lo scopo. E per verità la forza non può essere maestra di umanità e di civiltà.

Genovesi, oltre alle nozioni generali intorno a chi abbia diritto di fare la guerra, alle confederazioni, alle leghe, alle ambascerie, addita i principii per risolvere le più ardue e importanti quistioni di gius pubblico esterno, e segnatamente se l'accrescimento di potenza di uno Stato porga giusto motivo di guerra, quali siano i limiti dell'uso della forza e dell'astuzia in guerra, se e in quanto cessi l'obbligo di serbar fede ai patti con una nazione che li violi, se e in qual limite e misura siano legittimi gli acquisti fatti in guerra e per mezzo della guerra, se siano giuste le rappresaglie, quale sia in generale la condizione giuridica dei popoli neutrali a fronte dei guerreggianti, il qual tema doveva, non molti anni dopo la morte di Genovesi, essere così splendidamente sviluppato da un suo compatriota il Galiani, e da un altro illustre italiano Gio. Maria Lampredi. La Diecosina termina con una sommaria esposizione dei doveri dei cittadini e dei magistrati.

Dall'analisi che venni facendo delle dottrine giuridiche di Antonio Genovesi si può dedurre, che non ostante il difetto già sopra avvertito (del quale non se gli può dare grave colpa fatta ragione del tempo), della confusione dell'elemento morale coll'elemento giuridico, egli ha tracciato una teorica completa di diritto razionale fermandone i principii cardinali e toccando le quistioni più importanti. Alcune sue idee fondamentali hanno l'impronta dell'originalità e segnano un progresso nella filosofia del diritto. Le sue dottrine nelle parti sostanziali sono in generale giuste e splendono di molta luce di vero. Talchè nel volgere di un secolo dacchè furono dettate, la scienza vi ha recato più ampio svolgimento, ma poco vi ho trovato da correggere ed emendare. Laonde gli scritti giuridico-

(1) Cit. op., lib. 2 cap 8. § 12

morali, e segnatamente la filosofia del giusto e dell'onesto di Genovesi possono essere anche attualmente non senza profitto letti e studiati. Imperocchè uno dei principali doveri dei cultori dello scibile si è di non trasandare il patrimonio intellettuale lasciatoci dalle età trascorse specialmente nella propria patria, e di porre ogni cura per trasmetterlo perfezionato ed accresciuto alla generazione che succederà.


NATURAL HISTORY

INDICE

CLASSE DELLE SCIENZE MORALI, STORICHE, E FILOLOGICHE

Del principio supremo del diritto, del Prof. Pietro Albini ... pag. 1

Considerazioni intorno alla Commedia greca di mezzo; dissertazione prima, di Domenico Capellina ..... » 19

Disquisizioni bibliografiche intorno ad un'edizione fiorentina del secolo XV e di alcune altre stampe di quel secolo, di Costanzo Gazzera ..... » 57

Dei governi federativi della Grecia, di Amedeo Peyron ..... » 73

Schiarimenti alla filosofia Cartesiana, di Giovanni Maria Bertini ... » 153

Note sur le procès de Galilée, par Jean Plana ..... » 173

Delle dottrine filosofiche sul diritto di Antonio Genovesi, Memoria del Cav. Pietro Luigi Albini .. .. » 185

NATURAL HISTORY.

V.° Si stampi:

Barone GIOANNI PLANA Presidente.

Cavaliere Eugenio Sismonda
Cavaliere Gaspare Gorresio
} *Segretarii.*

